RISPOSTE AI QUESITI DELLA PROVA SCRITTA DEL CONCORSO A 50 BORSE DI STUDIO PER STUDENTI UNIVERSITARI DI MATEMATICA
Anno Accademico 2002-2003

Soluzioni a cura del dott. Federico Incitti e del prof. Roberto Tortora

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

QUESITO 1. All'interno di un quadrato con il lato di lunghezza 2, si tracciano le quattro semicirconferenze aventi per diametro i lati. Qual è l'area del "quadrifoglio" che si forma?

(A) $2(\pi - 2)$
(B) $(\pi + 1)/2$
(C) $4\pi - 1$
(D) 2
(E) nessuno dei valori precedenti

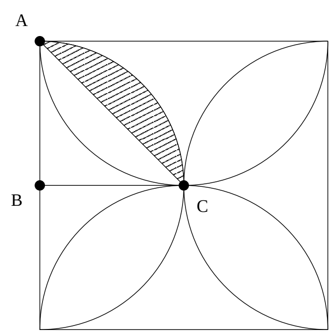

Figura 1

SOLUZIONE. La risposta esatta è (A) (vedi Figura 1). L'area del quadrifoglio è 8 volte l'area della regione tratteggiata in figura. L'area di tale regione è la differenza tra l'area del quarto di cerchio di centro B delimitato dai raggi AB e BC, che vale $\pi/4$, e l'area del triangolo ABC, che vale $1/2$. Quindi l'area del quadrifoglio è

$$8(\pi/4 - 1/2) = 2\pi - 4 = 2(\pi - 2).$$

QUESITO 2. Mario ha comprato un libro che costa meno di 100 euro, ma al momento di pagare ha scambiato gli euro con i centesimi: invece di pagare

x euro e y centesimi, ha pagato y euro e x centesimi. Sapendo che Mario ha pagato 1 centesimo in più del triplo di quanto avrebbe dovuto pagare, si può concludere che il valore di x (cioè il prezzo in euro approssimato per difetto) è

(A) 12
(B) 25
(C) 36
(D) 37
(E) 48

SOLUZIONE. La risposta esatta è (A). Mario avrebbe dovuto pagare $100x + y$ centesimi di euro, mentre ne ha pagati $100y + x$. Per la condizione data nel testo si ha $100y + x = 3(100x + y) + 1$, da cui segue

$$1 = 97y - 299x. \tag{1}$$

Per determinare x e y possiamo applicare l'algoritmo di Euclide. Si ha

$$299 : 97 = 3 \text{ resto } 8, \quad 97 : 8 = 12 \text{ resto } 1.$$

Dalla prima ricaviamo $8 = 299 - 3 \cdot 97$, dalla seconda $1 = 97 - 12 \cdot 8$. Combinando i due risultati, si ha

$$1 = 97 - 12(299 - 3 \cdot 97) = 37 \cdot 97 - 12 \cdot 299. \tag{2}$$

Dalla relazione (2) si ha che una coppia di valori che soddisfano la (1) è $x = 12$ e $y = 37$. Ciò basta a concludere a favore della risposta (A), se si sfrutta l'informazione che delle 5 risposte date una e una sola è esatta. In alternativa si può controllare che nessuna delle 4 equazioni in y ottenute dalla (1) mettendo al posto della x i valori 25, 36, 37 e 48 possiede soluzione intera.

QUESITO 3. Il numero dei valori di k per cui l'equazione $x^2 - kx + 40 = 0$ ammette come radici due interi positivi pari è

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) infinito

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). Come è noto, se l'equazione $x^2 - sx + p = 0$ ammette due radici reali, queste hanno somma s e prodotto p. Quindi se l'equazione $x^2 - kx + 40 = 0$ ammette due radici reali, queste hanno somma k e prodotto 40. Ma le uniche coppie di interi positivi pari che hanno come prodotto 40 sono $\{2, 20\}$ e $\{4, 10\}$.

Quindi se $k = 22$ l'equazione ammette le radici 2 e 20, se $k = 14$ l'equazione ammette le radici 4 e 10, mentre per ogni altro valore di k l'equazione non può ammettere come radici due interi positivi pari.

QUESITO 4. Su una circonferenza, gli archi AB e CD non hanno punti interni in comune; le loro ampiezze sono $60°$ e $30°$; qual è l'ampiezza dell'angolo BDP, essendo P un punto del prolungamento del segmento AD, dalla parte di D?

(A) $120°$
(B) $135°$
(C) $150°$
(D) $160°$
(E) non è determinata, dipendendo dalla posizione degli archi

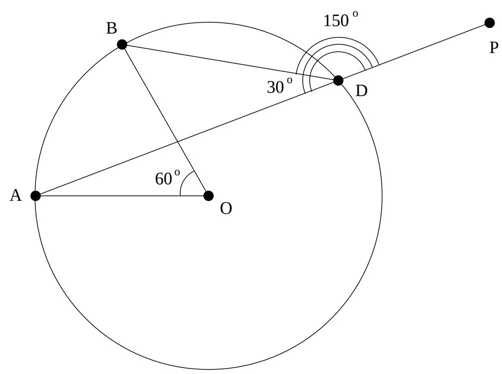

Figura 2

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C) (vedi Figura 2). Poiché gli archi AB e CD non hanno punti interni in comune, il punto D è esterno all'angolo AOB. Per il resto il punto C è irrilevante ai fini del quesito (per questo non è neanche stato inserito in figura).

Gli angoli ADB e AOB sono rispettivamente angolo alla circonferenza e angolo al centro che insistono sullo stesso arco AB. Quindi l'ampiezza di ADB è la metà dell'ampiezza di AOB, cioè $30°$. Allora l'angolo BDP, supplementare di ADB, ha ampiezza $180° - 30° = 150°$.

QUESITO 5. In una classe ci sono 10 tifosi di calcio, che si dividono fra tre squadre, l'Inter, la Juventus, la Roma, ciascuna con almeno un tifoso; la Juventus ha più tifosi dell'Inter e l'Inter ha più tifosi della Roma. Due studenti affermano che:

- "L'Inter ha 3 tifosi."
- "La Roma ha 2 tifosi."

Sapendo che una (e solo una) delle precedenti affermazioni è falsa, si può concludere che il numero dei tifosi della Juventus è

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). Indichiamo con I, J e R rispettivamente il numero di tifosi dell'Inter, della Juventus e della Roma. Per ipotesi I, J ed R sono interi positivi tali che $I+J+R=10$ e $J>I>R$.

Il primo studente afferma che $I=3$, il secondo che $R=2$.

Se avesse ragione il secondo studente si avrebbe $R=2$ e $I\neq 3$. Essendo $J>I>R$ si avrebbe $I\geq 4$ e $J\geq 5$. Quindi $I+J+R\geq 11$, contro l'ipotesi $I+J+R=10$.

Quindi ha ragione il primo studente e si ha $I=3$ e $R\neq 2$. Allora necessariamente $R=1$ e $J=6$.

QUESITO 6. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della tombola, se ne tolgono casualmente 30. Successivamente si estraggono due numeri fra i rimanenti 60. La probabilità che il numero 15 sia fra i due estratti è

(A) $2/90$
(B) $2/60$
(C) $1/60\times 1/59$
(D) $1/90+1/89$
(E) $1/90$

SOLUZIONE. La risposta esatta è (A). Il fatto di togliere casualmente 30 elementi dal sacchetto prima dell'estrazione non ci dà alcuna informazione. In altre parole la probabilità che cerchiamo è la stessa dell'evento "estraendo due numeri a caso tra i 90 numeri della tombola, il numero 15 si trova fra i due estratti". La probabilità P di questo evento può essere calcolata sommando le probabilità P_1 che 15 sia il primo estratto e P_2 che 15 sia il secondo estratto:

$$P=P_1+P_2=\frac{1}{90}+\frac{89}{90}\cdot\frac{1}{89}=\frac{2}{90}.$$

Allo stesso risultato si perviene usando la probabilità contraria:

$$P=1-\frac{89}{90}\cdot\frac{88}{89}=\frac{2}{90},$$

oppure calcolando il rapporto tra il numero delle coppie di numeri distinti tra 1 e 90 contenenti 15, che sono 89, e il numero totale delle coppie di numeri distinti tra 1 e 90, che sono

$$\binom{90}{2}=\frac{90\cdot 89}{2},$$

ottenendo ancora

$$P = 89 \cdot \frac{2}{90 \cdot 89} = \frac{2}{90}.$$

QUESITO 7. Mettere in ordine i tre numeri

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{30}, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}, \quad z = \left(\frac{1}{7}\right)^{10}$$

(A) $x < y < z$
(B) $y < x < z$
(C) $y < z < x$
(D) $z < x < y$
(E) $z < y < x$

SOLUZIONE. La risposta esatta è (B). Infatti si ha

$$x^{1/10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}, \quad y^{1/10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}, \quad z^{1/10} = \frac{1}{7},$$

quindi $y^{1/10} < x^{1/10} < z^{1/10}$, da cui segue, essendo la decima potenza una funzione crescente per valori della base positivi, $y < x < z$.

QUESITO 8. Il serbatoio di un radiatore è inizialmente riempito con 20 litri di acqua; 5 litri vengono rimpiazzati con liquido antigelo. Dalla miscela omogenea che si ottiene, 5 litri vengono sostituiti da liquido antigelo. L'operazione si ripete poi una terza volta. Quanti litri di acqua restano?

(A) fra 4 e 5
(B) fra 5 e 6
(C) fra 6 e 7
(D) fra 7 e 8
(E) fra 8 e 9

SOLUZIONE. La risposta esatta è (E). Dopo la prima operazione ci sono 15 litri d'acqua e 5 di liquido antigelo.

Nella miscela che si forma i due liquidi si distribuiscono in modo uniforme. Quindi nella seconda operazione, quando si tolgono 5 dei 20 litri, togliendo $1/4$ della miscela, si toglie $1/4$ di acqua. I litri di acqua che rimangono sono $(3/4) \cdot 15 = 45/4$. Poi si aggiungono 5 litri di liquido antigelo, ottenendo 20 litri di una nuova miscela.

Nella terza operazione si toglie di nuovo $1/4$ della miscela, quindi $1/4$ di acqua. I litri di acqua che rimangono alla fine sono allora $(3/4) \cdot (45/4) = 135/16$, che è un numero compreso tra 8 e 9.

QUESITO 9. Quanti sono i numeri razionali z tali che $z + 1/z$ è intero (positivo o negativo)?

(A) nessuno
(B) 1
(C) 2
(D) infiniti
(E) nessuna delle risposte precedenti

SOLUZIONE. La risposta esatta è (C). Scriviamo $z = a/b$, con a e b interi senza fattori primi comuni. Dovendo considerare sia $z = a/b$ che $1/z = b/a$, gli interi a e b sono necessariamente diversi da 0. Si ha

$$z + \frac{1}{z} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Quindi perché $z + 1/z$ sia un intero a e b devono dividere $a^2 + b^2$. Ma se a divide $a^2 + b^2$, a deve dividere anche $(a^2 + b^2) - a^2 = b^2$. Allora, non avendo a e b fattori primi comuni, l'unica possibilità è che risulti $a = 1$ oppure $a = -1$. Analogamente si vede che b deve dividere a^2 e l'unica possibilità è che risulti $b = 1$ oppure $b = -1$. Quindi il numero z può valere solo 1 o -1.

QUESITO 10. In un triangolo rettangolo due delle tre altezze hanno lunghezza 4 e 5 rispettivamente. Qual è la massima lunghezza possibile per la terza altezza?

(A) 3
(B) 9/2
(C) 7
(D) 20/3
(E) 12/5

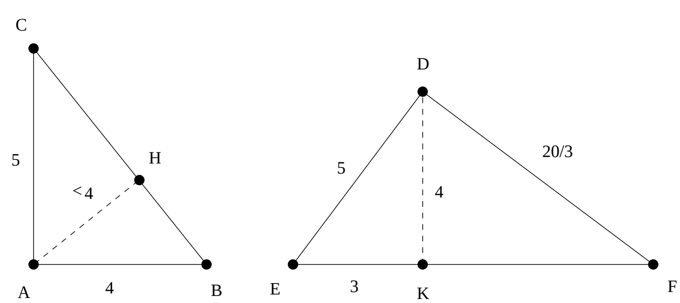

Figura 3

SOLUZIONE. La risposta esatta è (D) (vedi Figura 3). In un triangolo rettangolo l'altezza relativa ad un cateto è l'altro cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa è sempre minore dei due cateti. Quindi ci sono solo due casi da considerare:

a) i due cateti sono lunghi 4 e 5 (triangolo ABC in figura),

b) un cateto ha lunghezza 5 e l'altezza relativa all'ipotenusa ha lunghezza 4 (triangolo DEF in figura).

Nel caso a) la terza altezza (quella relativa all'ipotenusa) ha lunghezza minore di 4.

Nel caso b) la terza altezza è il cateto DF. Calcoliamone la lunghezza. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo DEK si ottiene $EK = 3$. Poiché i triangoli DEK e KDF sono simili (hanno gli angoli a due a due uguali), vale la proporzione $3 : 5 = 4 : DF$, da cui si ricava $DF = 20/3$.

Essendo $20/3 > 4$, la massima lunghezza possibile per la terza altezza, nelle condizioni del quesito, è $20/3$.

PROBLEMI

PROBLEMA 1. Si consideri il tetraedro regolare $ABCD$ di spigolo unitario.

(i) Si descrivano i due solidi secondo cui esso resta diviso dal piano per D, parallelo alla retta BC e perpendicolare al piano ABC.

(ii) Si determini il rapporto dei volumi delle due parti del tetraedro considerate nella domanda (i).

(iii) Siano M un punto del lato AB e N un punto del lato AC, tali che il segmento MN sia parallelo al lato BC. Si determini la distanza fra le rette MN e BC per la quale i volumi delle due parti secondo cui il tetraedro considerato resta diviso dal piano MND siano uguali.

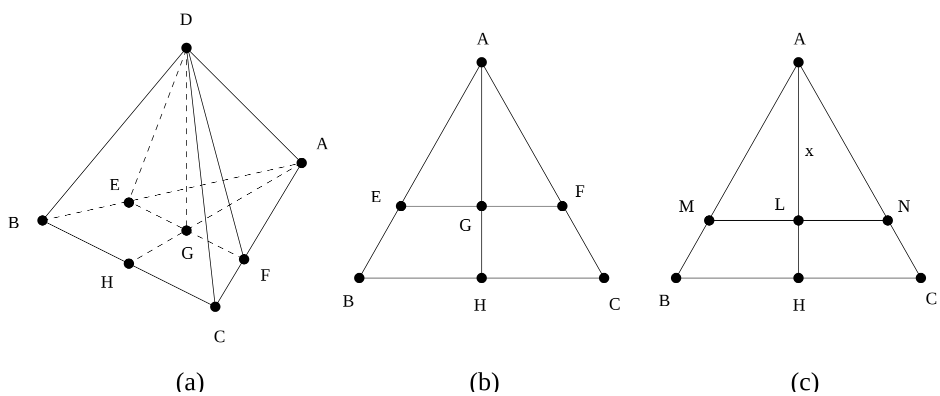

Figura 4

SOLUZIONE.

(i) Siano E e F le intersezioni del piano considerato con i segmenti AB e AC (vedi Figura 4a). Il tetraedro risulta diviso in due solidi, di cui uno è il tetraedro non regolare di vertici A, E, F e D, che può essere visto come piramide a base triangolare avente come base una qualunque delle quattro facce (AEF, AED, AFD e EFD) e l'altro è la piramide che ha come base il trapezio isoscele $BCFE$ e vertice D.

(ii) Sia G il piede della perpendicolare al piano ABC passante per D. Evidentemente il punto G si trova sul segmento EF e, per ragioni di simmetria, è il baricentro del triangolo equilatero ABC (vedi Figura 4b).

I due solidi in cui il tetraedro è diviso hanno entrambi altezza DG. Quindi, detta S_1 la superficie del triangolo equilatero AEF e detta S_2 la superficie del trapezio isoscele $BCFE$, i volumi dei due solidi sono dati rispettivamente da

$$V_1 = \frac{S_1 \cdot DG}{3} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{S_2 \cdot DG}{3}.$$

Quindi il rapporto tra i volumi V_1 e V_2 è uguale al rapporto tra le aree S_1 e S_2. Il triangolo AEF è simile al triangolo ABC. Il rapporto tra i lati omologhi di tali triangoli è uguale al rapporto tra le altezze AG e AH, che, essendo G il baricentro di ABC, vale $2/3$. Allora il rapporto tra le aree di AEF e ABC (che è uguale al quadrato del rapporto tra i lati omologhi) è $4/9$ e di conseguenza l'area del trapezio $BCEF$ è i $5/9$ dell'area di ABC. Il rapporto richiesto è quindi dato da

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}.$$

(iii) Ragionando come nel punto (ii), i volumi delle due piramidi $AMND$ e $BCNMD$ sono uguali se sono uguali le aree delle loro basi, cioè del triangolo equilatero AMN e del trapezio isoscele $BCNM$ (vedi Figura 4c). Queste aree sono uguali se l'area di AMN è la metà dell'area di ABC.

Chiamiamo x la lunghezza dell'altezza AL del triangolo AMN. I triangoli ABC e AMN sono simili, quindi il rapporto tra le loro aree è uguale al quadrato del rapporto tra le loro altezze $AL = x$ e $AH = \sqrt{3}/2$.

Quindi l'area di AMN è la metà dell'area di ABC se

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}/2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

cioè se $x^2 = 3/8$. L'unica soluzione positiva di tale equazione è

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

In tal caso la distanza tra BC e MN è

$$LH = AH - AL = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}\,(2-\sqrt{2})}{4}.$$

PROBLEMA 2. Trovare tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$(6x^2 - 5x)^{6x^2-11x} = 1.$$

SOLUZIONE. Chiamiamo $p(x)$ la base e $q(x)$ l'esponente.
L'equazione è soddisfatta in tutti e soli i seguenti tre casi:

a) se $q(x) = 0$ e $p(x) \neq 0$;

b) se $p(x) = 1$, qualunque sia il valore di $q(x)$;

c) se $p(x) = -1$ e $q(x)$ è un intero pari.

Studiamo separatamente i tre casi.

a) $q(x) = 0$, cioè $6x^2 - 11x = 0$ è soddisfatta da $x = 0$ e da $x = 11/6$. Poiché $p(0) = 0$ e $p(11/6) = 11$, solo $11/6$ è soluzione dell'equazione.

b) $p(x) = 1$, cioè $6x^2 - 5x - 1 = 0$ è soddisfatta da $x = -1/6$ e da $x = 1$. Entrambi questi valori sono soluzioni dell'equazione.

c) $p(x) = -1$, cioè $6x^2 - 5x + 1 = 0$ è soddisfatta da $x = 1/3$ e da $x = 1/2$. Poiché $q(1/3) = -3$ e $q(1/2) = -4$, solo $1/2$ è soluzione dell'equazione.

L'equazione ha quindi quattro soluzioni: $-1/6$, $1/2$, 1 e $11/6$.

PROBLEMA 3. Siano α e β due circonferenze di centri A e B (rispettivamente), aventi raggi a e b (rispettivamente) e tangenti esternamente nel punto T. Sia t la tangente in comune passante per T e sia r un'altra retta tangente ad entrambe le circonferenze nei punti A' e B' (rispettivamente). Infine, sia P il punto d'intersezione fra r e t.

(i) Dimostrare che P è il punto medio del segmento $A'B'$.

(ii) Dimostrare che l'angolo APB è retto.

(iii) Dimostrare che l'angolo $A'TB'$ è retto.

(iv) Dimostrare che la circonferenza avente diametro AB è tangente alla retta r. Qual è il punto di tangenza?

SOLUZIONE. Vedi Figura 5.

(i) Come è noto, se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le due tangenti ad essa, i segmenti che hanno come estremi il punto e i due punti di tangenza hanno la stessa lunghezza.

Quindi $A'P = PT$ e $PT = PB'$. Allora $A'P = PB'$, cioè P è il punto medio di $A'B'$.

(ii) I due triangoli $A'PA$ e TPA sono congruenti avendo i lati a due a due uguali. In particolare sono uguali gli angoli $A'PA$ e APT. In modo analogo si vede che sono uguali gli angoli TPB e BPB'.

Essendo $A'PA + APT + TPB + BPB' = 180°$, si ha $2APT + 2TPB = 180°$, da cui segue $APT + TPB = 90°$, cioè APB è retto.

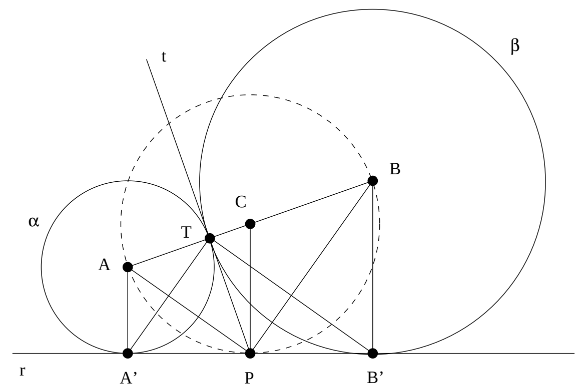

Figura 5

(iii) Il triangolo $A'PT$ è isoscele perché ha i due lati $A'P$ e PT uguali. Quindi gli angoli alla base $PA'T$ e PTA' sono uguali. In modo analogo si vede che gli angoli PTB' e $PB'T$ sono uguali.

Essendo $PA'T + PTA' + PTB' + PB'T = 180°$ (somma degli angoli interni del triangolo $A'TB'$), si ha $2PTA' + 2PTB' = 180°$, da cui segue $PTA' + PTB' = 90°$, cioè $A'TB'$ è retto.

(iv) Sia C il punto medio di AB. La circonferenza di diametro AB e di centro C passa per il punto P, perché l'angolo APB è retto. Nel trapezio rettangolo $AA'B'B$ il segmento CP, che congiunge i punti medi dei lati obliqui, risulta per il Teorema di Talete parallelo alle basi AA' e BB', e dunque perpendicolare alla retta r. Quest'ultima ha dunque distanza dal centro C della circonferenza pari al raggio CP ed è pertanto tangente ad essa nel punto P.