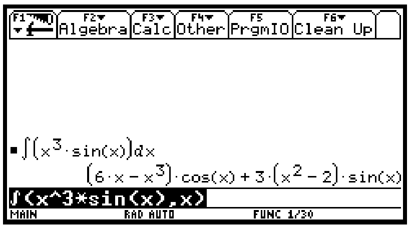
Abilità di calcolo manuale indispensabili
in un ambiente CAS

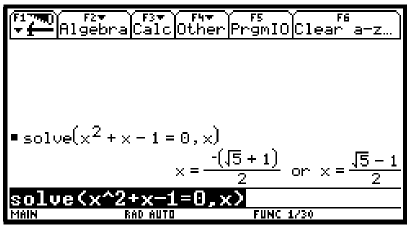
Wilfried Herget (Halle, Germany)
Helmut Heugl (Wien, Austria)
Bernhard Kutzler (Leonding, Austria)
Eberhard Lehmann (Berlin, Germany)

Traduzione italiana a cura di Candido Sitia e Giuliano Testa

Abstract: Which manual calculation skills are still needed when students use graphic/symbolic calculators or computers with computer algebra systems (CAS)? What should students be able to do manually, i.e. just using paper and pencil? This text is the outcome of a two-day discussion on these questions, held by the four authors. Our answers and proposals are meant to be a challenge, aiming at sparking off a broad discussion about which permanently available manual calculation skills we still need to teach and assess.

Computer algebra systems (CAS)
I *Computer algebra systems* (CAS) sono strumenti che automatizzano l'esecuzione di calcoli algebrici. I CAS possono semplificare espressioni, calcolare simbolicamente derivate ed integrali, disegnare grafici, risolvere equazioni e sistemi di equazioni, manipolare matrici, ecc. In breve: essi automatizzano la maggior parte delle abilità di calcolo che noi insegniamo nei corsi matematici scolastici.





I CAS maggiormente diffusi nelle scuole sono il programma per computer Derive e le calcolatrici algebriche TI-92 e TI-89. Introduzioni all'uso di questi strumenti sono i seguenti lavori: [Kutzler&Kokol-Voljc 2000] per Derive 5, [Kutzler 1997] per la TI-92 e [Kutzler 1998] per la TI-89.

Presto tali strumenti saranno usati con la stessa naturalezza con cui oggi noi usiamo le calcolatrici scientifiche (anche grafiche, in alcuni paesi).Usare una calcolatrice per derivare $x^3\sin^2(4x+5)$ sarà altrettanto comune come per valutare $\cos(1.3786)$ oppure $\sqrt{5.67}$. Le immagini sopra riportate esemplificano ciò che un CAS può fare.

Punto di partenza: Esame senza calcolatrice
Ipotizziamo un esame diviso in due parti. Nella prima parte non è permesso alcun strumento moderno - neppure una semplice calcolatrice scientifica - mentre nella seconda parte è permesso l'uso di qualsiasi tipo di tecnologia[1][1], in particolare calcolatrici grafiche oppure computer con sistemi CAS. Alcuni paesi, come l'Austria, stanno sperimentando esami con le due modalità. Altri paesi, come l'Inghilterra, usano già esami di questo tipo. Noi crediamo che gli esami a doppio sistema potrebbero essere un equilibrato compromesso fra il desiderio dei sostenitori della tecnologia e le riserve di coloro che sono preoccupati per il suo uso in classe. Alcune idee fondamentali su questo tipo di esami si trovano in [Kutzler 1999].

[1][1] In questo caso sarebbe più adatto utilizzare il termine "calcolatrice". Secondo *"The CASSELL Encyclopaedia"* la parola "tecnologia" significa “la scienza delle arti industriali; l'applicazione pratica della scienza per l'industria ed altri campi; la totalità degli strumenti tecnici e tecniche disponibili per una particolare società; la definizione di un'arte o scienza.” Comunque, l'utilizzo della parola “tecnologia” divenne radicato nella letteratura accademica in riferimento all'utilizzo di calcolatrici e computer per l'insegnamento. Quindi – per evitare confusioni – utilizziamo comunque tale termine.

Ipotizziamo un esame scritto immaginario ESST (esame senza supporto tecnologico), e cerchiamo le domande e le classi di domande che vi potremmo includere. Tracciare la linea di demarcazione tra le domande da porre in un ESST e le domande che non potrebbero esservi incluse, equivale a fare un elenco delle indispensabili abilità di calcolo manuale. Pertanto, l'immaginario ESST è per noi un mezzo e non un fine. La nostra discussione ed i suoi risultati hanno una rilevanza che va al di là della situazione di esame: essi sono fondamentali per lo sviluppo dell'educazione matematica negli anni a venire.
Dopo aver riconsiderato il significato e l'importanza delle abilità di calcolo e limitandoci al loro ruolo nell'insegnamento e nell'apprendimento, è cruciale discuterne le conseguenze nel campo scolastico. Ciò costituirà l'argomento delle nostre future discussioni.

Tre caselle: -T, ?T, +T
La linea di demarcazione tra le domande da porre e quelle da non porre in un ESST dipende da chiaramente molti parametri, incluso il tipo di scuola. Noi tentiamo di dare una risposta applicabile universalmente creando tre caselle, che chiameremo -T, ?T, e +T.
La prima casella, -T (= senza tecnologia), contiene quelle domande che vorremmo porre in un ESST, quelle domande cioè alle quali ci si aspetta che gli studenti rispondano senza l'aiuto di una qualsiasi calcolatrice o computer.
Le abilità di calcolo necessarie per rispondere alle suddette domande dovrebbero obbligatoriamente riguardare gli studenti dall'ottavo[2[2]] anno (o l'anno in cui queste vengono insegnate). Si suppone che gli studenti mantengano queste abilità di calcolo durante i rimanenti anni scolastici (e, si spera, al di là della scuola) e perciò gli insegnanti le possono valutare in qualsiasi momento.
La terza casella, +T (= con tecnologia), contiene domande che noi non faremmo in un ESST. Quindi, nei casi in cui tali domande dovessero presentarsi, noi concederemmo agli studenti l'uso di potenti calcolatrici o computer (CAS).
La seconda casella, ?T, rispecchia i nostri dubbi e le nostre differenti opinioni, e in parte anche le difficoltà inerenti all'argomento: o si tratta di domande su cui avevamo opinioni divergenti, oppure di domande che non potevano rientrare in nessuna delle altre due caselle. Ciò mostra quanto sia tuttora incerto il confine, almeno per noi.
Quando è stato possibile, abbiamo tracciato lo spettro ed il confine di una classe di domande per entrambe le caselle -T e +T, fornendo esempi per il confronto.

Richieste avanzate durante l'insegnamento e gli esercizi
Le domande della casella -T sono quelle che noi non faremmo in un ESST, ma neppure in un ECST (esame con supporto tecnologico). Queste domande sembrano sensate solo nel contesto di problemi appropriati, ma non come domande isolate. Nel migliore dei casi, potrebbero testare l'abilità di uno studente nell'uso di una calcolatrice.
Le domande di -T descrivono abilità manuali di lungo termine. Per raggiungere questo scopo, sarebbe sensato permettere agli studenti di esercitarsi, a qualche livello, con esempi più impegnativi.
Fino ad un certo punto, si potrebbe permettere agli studenti di esercitarsi con gli esempi di +T anche *senza tecnología.*

Altre importanti abilità e capacità
Va da sé che altre importanti abilità e capacità esistono in aggiunta alle abilità di calcolo. In un ambiente di insegnamento ed apprendimento CAS, molte di quelle abilità e capacità conserveranno, e molte altre diventeranno più importanti. In ogni caso, sono anche indispensabili (per maggiori dettagli, si veda [Heugl 1999]). Esempi di tali abilità sono:

- • trovare espressioni
- • riconoscere strutture
- • valutare
- • visualizzare
- • usare appropriatamente la tecnologia

[2[2]] L’ottavo anno in Austria corrisponde all’ultimo anno di scuola superiore in Italia.

- • documentare appropriatamente calcoli o soluzioni di problemi.

L'abilità a visualizzare, permette ad una persona di abbozzare rapidamente a mano un grafico per esempio di: x^2 o $sin(x)$.

Tra tutte le abilità e capacità che si suppone che vengano insegnate nelle ore di matematica, *quelle dí calcolo* hanno avuto e avranno un ruolo importante. Noi le insegnano non per se stesse soltanto (se lo facessimo la loro rilevanza sarebbe fortemente contesa dalla disponibilità di calcolatrici e computer potenti), ma anche perché sono prerequisiti per il raggiungimento di abilità "superiori" come quelle sopra menzionate. Pertanto tali abilità assieme ad altre giocano un ruolo decisivo quando si giudica l'importanza delle abilità di calcolo: per questa ragione sono state motivo per la nostra discussione, come in parte documentato da alcune nostre annotazioni.

L'educazione matematica non diventerà più semplice!

Non riteniamo che l'educazione matematica diventerà più semplice: è vero il contrario. L'idea che basti un livello inferiore di abilità manuali riflette da un lato la credenza che i CAS diventeranno strumenti standard per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, dall'altro, la convinzione di ciò che si ritiene debbano essere le conoscenze realisticamente ottenibili dagli studenti durante e dopo la carriera scolastica. Una conseguenza dei nuovi strumenti è che la matematica diventa maggiormente utilizzabile e probabilmente più esigente - ma sicuramente non più semplice. Dopo la sfortunatissima discussione su "7 anni di insegnamento della matematica sono sufficienti" nella stampa tedesca ed austriaca di alcuni anni fa, ora non vogliamo suscitare un dibattito simile su "una manipolazione simbolica banale è sufficiente." Per noi è importantissima la distinzione tra gli obiettivi "eseguite una operazione" (entro certi limiti ciò può essere delegato ad una calcolatrice) e "scegliete una strategia" (e ciò non può essere fatto da una calcolatrice). Va da sé che l'esposizione che segue ha un impatto su molti aspetti dell'insegnamento della matematica: metodi di insegnamento e di addestramento, compiti domestici, curricula, argomenti insegnati, competenze richieste agli insegnanti, ecc. Noi abbiamo semplicemente toccato questi argomenti, senza elaborarli, per cui non li menzioniamo qui.

Il nostro scopo: abilità di calcolo minime

Noi vogliamo provocare una discussione, da tempo attesa, sulle conseguenze amministrative, metodologiche e matematiche, dell'uso dei CAS ed altro software per l'insegnamento e l'apprendimento.

Questo testo è intenzionalmente polemico, forse perfino provocatorio. Affrontiamo la sfida rappresentata dai nuovi strumenti e prendiamo le misure necessarie! In particolare, ciò richiede la disponibilità a dire addio alle cose familiari, se necessario.

Domande e classi di domande

In questo articolo ci limitiamo a domande per le quali si potrebbero usare calcolatrici potenti o computer con CAS.

Aritmetica – competenza minima a lungo termine

	-T (senza tecnologia)	**?T**	**+T (con tecnologia)**
01	Calcolare $3 \cdot 40$		Calcolare $3.2987 \cdot 4.1298$
02	Calcolare $\sqrt{81}$		Approssimare $\sqrt{80}$ a … cifre
03	Stimare $\sqrt{80}$		Semplificare $\sqrt{80}$
04			Calcolare $\sqrt{11\sqrt[3]{11}}$
05	Fattorizzare 15		Fattorizzare 30

L'esempio $\sqrt{80}$ (e le sue varianti -T03, +T02, e + T03) dimostra quanto sia importante e decisiva la formulazione di una domanda per il suo inserimento in una certa casella. Meno diventa importante l'abilità di calcolo manuale, più importante diventa l'appropriata formulazione della domanda per chiarirne l'obiettivo. Ciò diventa ancora più chiaro per alcune domande nelle prossime. Per noi, l'importanza dell'obiettivo "stima" va molto al di là dell'esempio dato (-T03): è così importante che è necessario raggiungerlo senza tecnologia, anche se può essere utile usare una calcolatrice come strumento pedagogico (per esempio quando si testa la qualità di una stima, si calcola l'errore o si dimostra lo scopo delle stime).

Per evitare fraintendimenti, ripetiamo ciò che abbiamo detto prima: le domande della casella +T sono domande che non faremmo in un ESST, né in un ECST, perché esse sembrano inutili in quanto tali, essendo il loro uso migliore quello di testare l'abilità di uno studente nell'uso di una calcolatrice.

Le domande in +T richiedono semplicemente l'abilità di valutare un'espressione tipicamente derivante da un problema più complicato. A lungo termine, ciò dovrebbe essere delegato ad una calcolatrice. Dobbiamo assicurarci che gli studenti capiscono il significato di queste espressioni. Ma per testare tale comprensione, sono necessari diversi tipi di domande.

A questo proposito, tuttavia, sarebbe certamente sensato usare domande della casella +T in “training units" con o senza tecnologia: ciò potrebbe essere richiesto per rendere un'abilità manuale a lungo termine le domande poste nella casella -T.

Essenzialmente le nostre proposte obbediscono alla seguente regola: i calcoli elementari (per esempio la scomposizione di un intero di due soli fattori, per es. 15) sono un'abilità indispensabile (pertanto queste domande vanno in -T), mentre i calcoli che richiedono l'applicazione ripetuta di calcoli elementari (come la scomposizione di un intero con tre o più fattori, per es. 30) possono essere delegati ad una calcolatrice.

Frazioni – competenza minima a lungo termine

	-T (senza tecnologia)	**?T**	**+T (con tecnologia)**
01	Semplificare $\frac{10^2}{5^2}$		Semplificare $7 \cdot \frac{2}{5} : \frac{4}{6}$
02	Semplificare $\frac{10^2}{10^5}$		Semplificare $\frac{100x^3y^2}{10xy^5}$
03	Semplificare $2 : \frac{1}{2}$		
04	Semplificare $\frac{2}{\frac{1}{2}}$		
05	Semplificare $\frac{5a}{5}$		
06	Semplificare $\frac{a}{5} \cdot 5$		
07	Semplificare $\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}$		Semplificare $\frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{3ac}$
08			Semplificare $3x^2 : \frac{2x}{5y^3}$
09	Semplificare $2a - \frac{a}{3}$		Semplificare $2a - \frac{a}{3} + \frac{a}{7}$
10	Semplificare $\frac{a}{3} + \frac{a}{7}$		
11	Semplificare $\frac{5}{x} - \frac{2}{x}$		
12	Semplificare $\frac{2}{x} - \frac{5}{y}$	Semplificare $\frac{2}{x} - \frac{x}{5}$	

-T01: Qui vogliamo che gli studenti vedano l'ovvio calcolo $\frac{100}{25}=4$.Il che non è banale!

-T02: Espressioni come questa sono richieste in fisica.

-T03: Una questione corrispondente alternativa (di maggior valore) sarebbe: "Perché $2:\frac{1}{2}$ è uguale a 4?" Qui è implicata la capacità di riconoscere strutture.

Volutamente non abbiamo voluto verificare se la regola $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ era stata imparata a memoria. La consideriamo un *obiettivo di fondo* - col che intendiamo un obiettivo che non è necessario verificare esplicitamente in un esame scritto. Imparare a memoria questa regola porta soltanto a studenti che la applicano stolidamente per sommare due frazioni - invece di usare l'approccio in generale più appropriato di calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori. Ugualmente, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ è solo un obiettivo di fondo per noi. Ciononostante, queste regole (che possono anche essere generate con un CAS) sono un importante punto dell'insegnamento, anche perché sono buoni esempi di strutturazione di fatti matematici.

Espressioni: Con e Senza Parentesi - competenza minima a lungo termine

Prima abbiamo ricordato che la formulazione di una questione è decisiva per la sua valutazione. Nella tabella seguente abbiamo volutamente evitato l'uso dei comando "expand" ed abbiamo invece usato quello di " "Eliminare le parentesi"

Mentre la prima formulazione sembra suggerire l'applicazione della legge distributiva, la seconda non la suggerisce, il che aumenta il valore della questione.

	-T (senza tecnologia)	**?T**	**+T (con tecnologia)**
01	Eliminare le parentesi: $a-(b+3)$	Eliminare le parentesi: $(5+p)^2$	Eliminare le parentesi: $3a^2(5a-2b)$
02	Eliminare le parentesi: $2(a+b)$		Eliminare le parentesi $(a^2-3b)(-3a+5b^2)$
03	Eliminare le parentesi: $2(ab)$		Eliminare le parentesi: $(2a+t)^2$
04	Eliminare le parentesi: $3(5a-2b)$		Eliminare le parentesi: $(5+p)^3$
05	Eliminare le parentesi: $(3+a)(b-7)$		
06	Trovare la forma equivalente di: $2a+2b$		
07	Semplificare $x^2y^2+(xy)^2$		
08	Fattorizzare $3ab+6ac$		
09	Fattorizzare x^2-4	Fattorizzare x^2+4x+4	Fattorizzare x^2-x-6

-T09: Questa questione è importante perché aiuta a sviluppare le abilità "decisionali" e di "giustificazione". Entrambe queste abilità sono richieste per un uso intelligente dei comando o tasto "factor" di un calcolatrice.

La legge distributiva $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ in questo caso è un obiettivo di base.

Abbiamo fatto una lunga discussione sulle questioni? T01 e ?T09. Una parte del nostro gruppo pensava che abilità di riconoscere strutture richiede questa capacità di calcolo. D'altro canto, i progetti di CAS Austriaci CAS fornivano una certa evidenza che usare la tecnologia supporta l'abilità di scegliere una strategia senza richiedere lo sviluppo di corrispondenti abilità calcolatorie.

Equazioni lineari - competenza minima a lungo termine

	- T (senza tecnologia)	**? T**	**+ T (con tecnologia)**
01	Risolvere rispetto a *x*: $X - 6 = 0$		
02	Risolvere rispetto a x: $5 - X = 2$		
03	Risolvere rispetto a x: $3X = 12$		
04	Risolvere rispetto a x: $5X - 6 = 15$		Risolvere rispetto a x: $5x - 6 = 2x + 15$
05	Risolvere rispetto a y: $\frac{y}{3} = 5$		Risolvere rispetto a x: $2x + 3 = \frac{4}{3}$
06	Risolvere rispetto a x: $a \cdot x = 5$	Risolvere rispetto a x: $a \cdot x - 6 = 15$	
07	Risolvere rispetto a x: $x + 1 = x$	Risolvere rispetto a x: $2(x+1) = 2x$	
08	Risolvere rispetto a x: $x + 1 = x + 1$	Risolvere rispetto a x: $2(x+1) = 2x + 2$	
09	Risolvere rispetto a t: $s = v \cdot t$	Risolvere rispetto a x: $K = k \cdot x + F$	
10	Risolvere rispetto a r: $U = 2r\pi$		
11	Risolvere rispetto a x: $\lvert x \rvert = 1$		

-T06: Questo esempio è importante, perché i CAS ordinariamente disponibili oggi non fanno la necessaria distinzione dei casi per i valori di *a.*
-TI 11: CAS spesso genera risposte che implicano la funzione valore assoluto. Perciò gli studenti dovrebbero conoscere questa funzione e farne delle semplici applicazioni senza l'uso della tecnologia.

Equazioni quadratiche - competenza minima a lungo termine

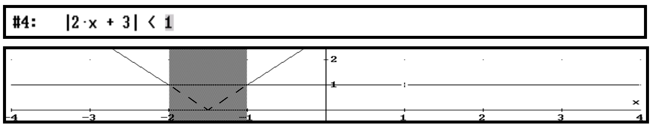
	-T (senza tecnologia)	**?T**	**+T (con tecnologia)**
01	Risolvere rispetto a x: $x^2 = 4$		Risolvere rispetto a x: $9x^2 = 4$
02	Risolvere rispetto a x: $x^2 - 4 = 0$		Risolvere rispetto a *x:* $9x^2 - 4 = 0$
03	Risolvere rispetto a *x:* $x^2 - x = 0$		
04	Risolvere rispetto a $x^2 - 4x = 0$	Risolvere rispetto a x*:* $x^2 + 4x + 4 = 0$	Risolvere rispetto a x: $2x^2 - 5x + 9 = 0$
05	Risolvere rispetto a x: $x^2 = a$		
06	Risolvere rispetto a r: $A = 4\pi r^2$		Risolvere rispetto a $v_0 : X = \frac{1}{2a} \cdot v_0^2$

+T04 e ?T04 rappresentano ciò che alcuni insegnanti possono considerare il cambiamento più radicale: eliminiamo la formula risolutiva dell'equazione quadratica dalla lista delle indispensabili manualità. Tuttavia, noi la manteniamo come obiettivo di base a causa del suo importante ruolo in algebra e del relativo concetto di una distinzione di caso. L'approccio tradizionale della risoluzione di equazioni quadratiche mediante una procedura (sia applicando la formula o seguendo il metodo del completamento di un quadrato) scomparirà (cfr. [Herget 1996].) Per ragioni simili le tavole logaritmiche ed i regoli calcolatori spariranno "dalla sera al mattino" dopo che i calcoli aritmetici potranno essere delegati ai calcolatori scientifici.

Disuguaglianze - competenza minima a lungo termine

	- T (senza tecnologia)	**? T**	**+ T (con tecnologia)**
01	Per quale x è valida: $x-2<4$	Per quale x è valida: $x-2<x+3$	Per quale x è valida: $3x+1<2x-1$
02	Per quale x è valida: $-2x<4$		Per quale x è valida: $\frac{1}{x-1}\leq 2$
03	Per quale x è valida: $x<x+1$		Per quale x è valida: $ax<4$
04	Per quale x è valida: $x<x$		
05		Per quale x è valida: $\|x\|<1$	Per quale x è valida: $\|x-2\|<1$

L'uso di un CAS significa uno slittamento ovvio da capacità di calcolo a capacità di visualizzazione come è dimostrato dalle immagini seguenti di schermo (Derive).



Derivazione - competenze minime a lungo termine

	- T (senza tecnologia)	**? T**	**+ T (con tecnologia)**
01	Derivare rispetto a x: $y=x^4$		
02	Derivare rispetto a x: $y=7x^2+3x+1$		
03	Derivare rispetto a x: $y=\frac{1}{x^2}$		
04	Derivare rispetto a x: $y=3$		
05	Derivare rispetto a x: $y=\sqrt{x}$		
06	Derivare rispetto a x: $sinx$	Derivare rispetto a x: $y=x^2+\cos x$	Derivare rispetto a x: $y=x\sin x$
07		Derivare rispetto a x: $y=2\cos x$	Derivare rispetto a x: $y=sin^2 x$
08		Derivare rispetto a x: $3sin2x$	Derivare rispetto a x: $y=\frac{sinx}{x}$

09	Derivare rispetto a x: $y = e^x$	Derivare rispetto a x: $y = e^{2x}$	Derivare rispetto a x: $y = 2^x$
10	Derivare rispetto a x: $y = \ln x$		
11	Derivare rispetto a x: $y = \|x\|$		

I corsi tradizionali di analisi sono pieni di manualità calcolatorie. Vi è una forte richiesta di Cambiamento.

Osservazione e richiesta Conclusive

Come menzionato all'inizio, vorremmo considerare questo articolo come un impulso verso un'ampia discussione su quali manualità calcolatorie dovremmo continuare a richiedere e quali possiamo lasciar cadere. Non era nelle nostre intenzioni fornire un'analisi pedagogica dettagliata e impeccabile - desideravamo soltanto dare una presentazione pragmatica, breve del nostro attuale giudizio sul complicato problema delle abilità di calcolo manuale. Abbiamo voluto deliberatamente essere provocatori per scuotere la situazione statica dell'insegnamento tradizionale della matematica. Fateci sapere che cosa ne pensate.

W Herget (**herget@mathematik.uni-halle.de**) H Heugl (**hheugl@netway.at**)

B Kutzler (**b.kutzler@eunet.at**) E Lehmann (**mirza@berlin.snafu.de**).

Bibliografia

Herget, Wilfried, 1996.: *Rettet die Ideen! - Rettet die Rezepte?* In: Hischer, H. / Weiß, M. (eds.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung - Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Hildesheim: Franzbecker, pp. 156-169.

Herget, Wilfried, 1999: *Wíe víel Termumformung braucht der Mensch? - Taschencomputer und Mathematikunterrícht.* In: Amelung, Udo (ed.): Der TI-92 im Mathematikunterricht. Pfingsttagung 1998. Zentrale Koordination Lehrerausbildung, ZKL-Texte Nr. 7, Westfalische Wilhelms-Universitat, Munster, pp. 3-19.

Heugl, Helmut, 1999: *The necessary fundamental algebraic competence ín the age of Computer Algebra Systems.* Proceedings of the 5th ACDCA Summer Academy, 1999, bttp://www.acdca.ac.at.

Kutzler, Bernhard, 1997: *Introductíon to the TI-92 (Handheld Computer Algebra).* Hagenberg: bk teachware, 184 pages, ISBN 3-901769-02-1.

Kutzler, Bernhard, 1998: *Introductíon to the TI-89.* Hagenberg: bk teachware, 62 pages, ISBN 3-901769-14-?.

Kutzler, Bernhard, 2000: *Introduzíone alla TI-89.* Media Direct Press. 124 Pagine

Kutzler, Bernhard, 1999: *The Algebraic Calculator as a Pedagogícal Tool for Teaching Mathematícs.* In: Laughbaum E.D. (ed.): Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers, Teachers Teaching with Technology Short Course Program @ The Ohio State University, pp. 98-109. Also: bttp://www.kutzler.com

Kutzler, Bernhard & Kokol-Voljc, Vlasta, 2000: lntroduction to Derive 5. Hagenberg: Soft Warehouse Europe. 277 pages.

Kutzler, Bernhard & Kokol-Voljc, Vlasta, 2000. Introduzione a Derive 5. Media Direct SRL - Italia. 277 pagine.

Lehmann, Eberhard, l999a: *Terme ím Mathematikunterricht unter Verwendung von Computergrafik und Computeralgebra,* Hannover: Schroedel-Verlag.

Lehmann, Eberhard, 1999b: *Neue Aspekte im Unterrícht über Terme durch Einsatz von Computeralgebra-Systemen.* University Bayreuth, Germany.