SIS Piemonte

a.a. 2004_2005

Corso di Fondamenti della Matematica

Nodi fondamentali in Matematica

6° incontro

Induzione

The three levels of Bruner

Bruner (1966) focused on *homo sapiens* as a tool-using species.

Man's use of mind is dependent upon his ability to develop and use "tools" or "instruments" or "technologies" that make it possible to express and amplify his powers.

His very evolution as a species speaks to this point. It was consequent upon the development of bipedalism and the use of spontaneous pebble tools that man's brain and particularly his cortex developed.

It was not a large-brained hominid that developed the technical-social life of the human; rather it was the tool-using, cooperative pattern that gradually changed man's morphology by favoring the survival of those who could link themselves with tool systems and disfavoring those who tried to do it on big jaws, heavy dentition, or superior weight. What evolved as a human nervous system was something, then, that required outside devices for expressing its potential.

(Bruner, *Education as Social Invention*, 1966, p. 25.)

In his essay "Patterns of Growth", Bruner (1966) distinguished three modes of mental representation – the *sensori-motor*, the *iconic* and the *symbolic*.

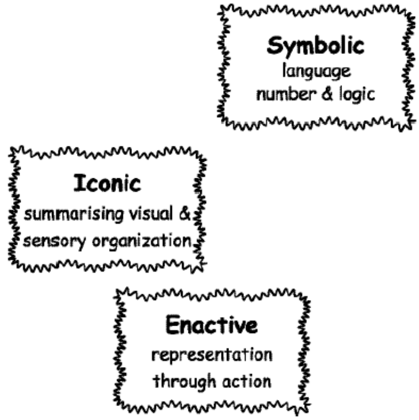
What does it mean to translate experience into a model of the world. Let me suggest there are probably three ways in which human beings accomplish this feat. The first is through action. […]

In his essay “Patterns of Growth”, Bruner (1966) distinguished three modes of mental representation

– the *sensori-motor*,

– the *iconic*,

– the *symbolic*.



Bruner considered that these representations grow in sequence in the cognitive growth of the individual,

–first enactive,

–then iconic,

–and finally the capacity for symbolic representation.

The development of modern computer interfaces shows something of Bruner’s philosophy in the underlying use of:

- Enactive interface,
- Icons as summarizing images to represent selectable options,
- Symbolism through keyboard input and internal processing.

When representations in mathematics are considered, clearly the single category of ‘symbolism’,
including both language and mathematical symbols,
requires subdivision.

The ‘Rule of Four’: extending the representations to include the *verbal*, giving four basic modes:

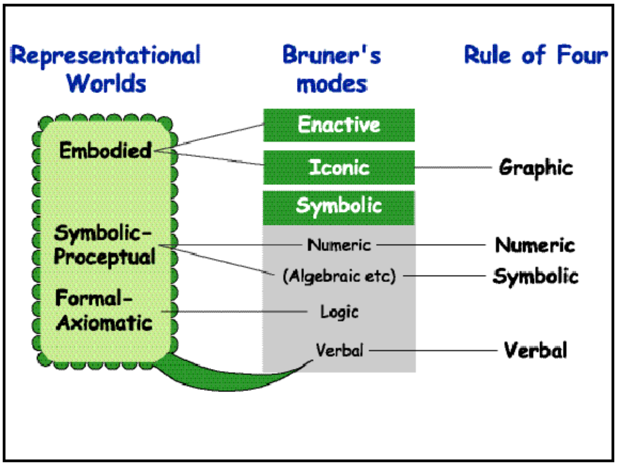
- verbal,
- graphic,
- numeric,
- symbolic (or analytic).

The omission of the enactive mode is presumably because it does not seem to be a central focus in the graphs and symbols of the calculus.

This omission is a serious one because the embodied aspects of the calculus help to give fundamental human meaning.

Tall categorises the modes of representation into three fundamentally distinct ways of operation:

- **Embodied:** based on human perceptions and actions in a real-world context including but not limited to enactive and visual aspects.
- **Symbolic-proceptual:** combining the role of symbols in arithmetic, algebra and symbolic calculus, based on the theory of these symbols acting dually as both process and concept (procept).
- **Formal-axiomatic:** a formal approach starting from selected axioms and making logical deductions to prove theorems.



The *embodied* world is the fundamental human mode of operation based on perception and action.

The *symbolic-proceptual* world is a world of mathematical symbol-processing, and the *formal-axiomatic* world involves the further shift into formalism that proves so difficult for many of our students.

Languages operate throughout all three modes, enabling increasingly rich and sophisticated conceptions to be developed in each of them.

The highly complex thinking processes in mathematics can be categorised in many ways. The choice of three categories puts together those aspects which have a natural relationship between them whilst allowing sufficient distinction to be of value.

The embodied mode, for example, lies at the base of mathematical thinking. It does not stay at a low level of sensori-motor operation in the sense of the first stage of Piagetian development. It becomes more sophisticated as the individual becomes more experienced, while remaining linked, even distantly, to the perception and action typical in human mental processing.

A ‘straight line’, for instance, is sensed initially in an embodied manner through perception and conception of a straight line given by a physical drawing.

However, an embodied conception of a straight line may become more subtly sophisticated to cover the idea that a line has length but no breadth, which is a fundamental concept in Euclidean geometry. What matters here is that the conception of a ‘straight line’ remains linked to a perceptual idea even though experience endows it with more sophisticated verbal undertones.

The *proceptual* mode (beginning with Piaget's concrete operational) is based on symbolic manipulation found in arithmetic, algebra and symbolic calculus.

The final *axiomatic* category also includes a range of approaches. The earlier modes of thought already have their own proof structures

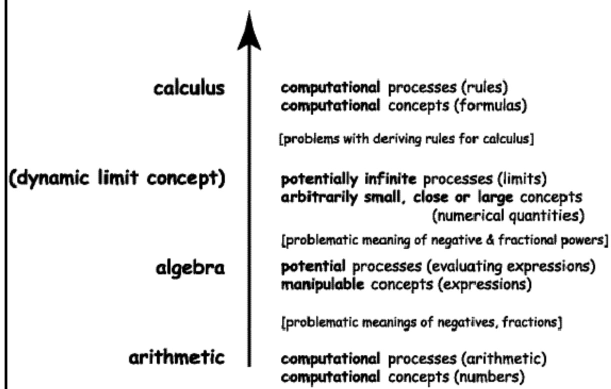


Figure 3: Some different types of procept in mathematics (Tall et al, 2001)

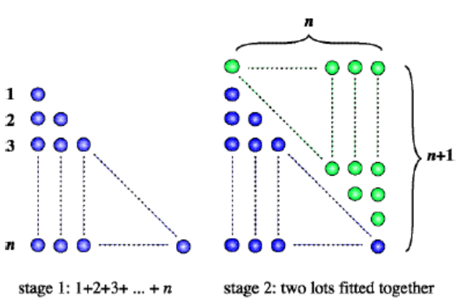


Figure 4: The embodied proof that the sum of the first n whole numbers is $\frac{1}{2}n(n+1)$

Proof 2: (proceptual).

$1+2+3+\ldots n$

$n+ \ldots +3+2+1$

$(1+n) + (2+n-1) + \ldots + (n+1)$

$n(n+1)$

$\rightarrow\ 1+2+3+\ldots n = 1/2n(n+1)$

Proof 3: (*axiomatic*) By induction.

The embodied and proceptual proofs have clear human meaning, the first translating naturally into the second.

The induction proof, on the other hand, often proves opaque to students, underlining the gap that occurs between the first two worlds and the formal world.

Nota tecnica sull'induzione

I numeri naturali, il cui insieme denotiamo con N, sono i numeri

0, 1, 2, 3, ...

o talvolta

1, 2, 3, ...

G. Lolli, Nota pubblicata nel suo sito presso il Dipartimento di Matematica.

I. S. Sominskii, *Il metodo di induzione matematica*, Progresso Tecnico Editoriale, Milano, 1964

Il principio di induzione afferma che, per dimostrare che una proprietà P vale per ogni $x \in$ N, schematicamente "*x* P(*x*), è sufficiente dimostrare questi due fatti:

- (base dell'induzione) P vale per 0, o P(0).

- (passo induttivo) Per un *x* generico, se P(*x*) allora P(*x*+1).

Nel passo induttivo, si deve dimostrare P(*x*+1) assumendo come ulteriore assunzione, oltre agli assiomi e alle proprietà già dimostrate, P(*x*), che in questa sottoderivazione di chiama ipotesi induttiva. Nel passo induttivo, *x* è una variabile; si dice anche che si fa un'induzione *su x*. In seguito useremo anche *n* come variabile per numeri naturali.

Per fare dimostrazioni per induzione, e il fondamentale passo induttivo, occorre conoscere l'enunciato P(*x*) da usare come ipotesi induttiva, enunciato che funge da invariante nel passaggio da *x* a *x*+1 e che è anche quello finale; questo è un punto delicato, fonte di possibili confusioni, per la sua aria di circolarità

Esempi classici, che sono anche buoni esercizi per iniziare, sono le formule aritmetiche:

$$1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2$$

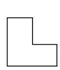
$$1/2 + 1/2\bullet 3 + 1/3\bullet 4 ... + 1/n(n+1) = n/(n+1)$$

$n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per 6

A volte può succedere che il tentativo di dimostrare il passo induttivo mostri, fallendo, l'opportunità e la possibilità di rafforzare l'ipotesi induttiva; con un'ipotesi induttiva più forte, si dimostra di più; naturalmente si deve anche dimostrare di più, poiché quello che si deve derivare da P(*n*) è P(*n*+1); ma la maggior generalità che si è aggiunta a P(*n*) può tradursi in minori vincoli nel verificare P(*n*+1). Alla fine, se l'operazione riesce, si è dimostrato un teorema più generale, suggerito dalla dimostrazione stessa fallita.

Esempio.

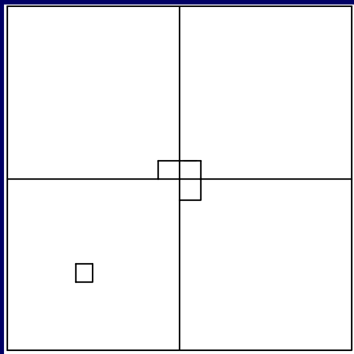
Si consideri il seguente problema: si vuole tassellare un quadrato di lato 2*n* con domino, o piastrelle, ciascuna di tre quadratini disposti a L, della forma



Si vuole anche lasciare libero al centro un quadratino; siccome non esiste *un* quadratino centrale, dato che il lato del quadrato è un numero pari, con "quadratino al centro" si intende uno dei quattro quadratini intorno al centro. Si chiede se questo sia possibile.

La base dell'induzione è banale, perché per *n* = 0, o anche *n* = 1, il problema è risolubile; nel primo caso c'è solo il posto per la statua; nel secondo, una piastrella e un quadratino libero risolvono con poca spesa il problema.

Ma il passo induttivo non riesce, non si vede come manipolare i quattro quadrati di lato 2*n* che compongono quello di lato 2*n*+1, ciascuno con un quadratino libero al centro (per ipotesi induttiva). Se i quadratini scoperti non fossero al centro, ma fossero ad esempio disposti come nella figura (slide seguente), tre li si potrebbe coprire con una piastrella.



Ed ecco che viene l'idea di dimostrare questo teorema più generale: per ogni *n*, si può tassellare un quadrato di lato 2*n* con piastrelle a L lasciando scoperto un quadratino in un posto qualunque fissato del quadrato.

La base si dimostra come sopra; dato ora un quadrato di lato 2*n*+1, e il quadratino che si vuole lasciare scoperto, questo sarà in uno dei quattro quadrati di lato 2*n* che compongono il quadrato; supponiamo sia come nella figura, nel quadrante in basso a sinistra, ma non necessariamente al centro; applichiamo l'ipotesi induttiva ai quattro quadranti, quello in basso a sinistra col quadratino scoperto nel posto dato, gli altri con i rispettivi quadratini scoperti nella posizione indicata in figura, cioè in modo che formino una L al centro del quadrato grande. Queste quattro pavimentazioni sono possibili per ipotesi induttiva; ora si coprano i tre quadratini scoperti al centro con una piastrella a L, e si ha il risultato.

Paradossi con l'induzione

Teorema (!). Tutte le mele hanno lo stesso colore.

Dimostrazione. Basta dimostrare che, comunque si prendano *n* mele, queste hanno tutte lo stesso colore. Se prendiamo una mela, tutte le mele nell'insieme hanno lo stesso colore. Sia dato un insieme di *n*+1 mele. Se togliamo una mela *a*, si ha un insieme di *n* mele che per ipotesi induttiva hanno lo stesso colore. Ma se uniamo *a* ad altre *n*–1 mele di questo mucchio, abbiamo un altro insieme di *n* mele che devono avere tutte lo stesso colore; quindi *a* ha lo stesso colore delle altre.

(Trovare l'errore.)

Teorema (!!). Io, o chiunque, siamo in grado si sollevare un mucchio di sabbia pesante quanto si vuole.

Dimostrazione. Dato un granello di sabbia, chiunque è in grado di sollevarlo. Se una persona è in grado si sollevare un mucchio di sabbia, e al mucchio si aggiunge un granello, la stessa persona è in grado di sollevare il nuovo mucchio. Qualunque mucchio di sabbia, di qualsiasi peso, si ottiene accumulando un numero sufficiente di granelli di sabbia.

(Trovare l'errore.)

Negli anni 1872-78, Richard Dedekind[1] definisce l'insieme dei numeri naturali come il più piccolo insieme infinito; con "più piccolo" si intende che è contenuto in ogni altro insieme infinito. Lo stesso Dedekind definisce un insieme infinito come un insieme che ammette un'iniezione non suriettiva in se stesso; di qui seguono i primi assiomi su "zero" e sul "successore": zero è un elemento che non appartiene alla immagine della iniezione, la funzione "successore" è l'iniezione.

[1] R. Dedekind, *Scritti sui Fondamenti della Matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1982.

La summenzionata proprietà degli insiemi finiti oggi si dimostra, ed è nota anche in combinatoria come il *principio dei cassetti* (in ingl. *Pigeonhole Principle*): se si distribuiscono *m* oggetti in *n* cassetti, $m > n$, in almeno un cassetto c'è più di un oggetto. In altri termini

Si definisce N_m come l'insieme dei *k* minori di *m* :

$$N_m = \{k : k < m\}$$

Teorema. Se $m > n$, non esiste un'iniezione di N_m in N_n.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione. Si noti che l'enunciato da dimostrare è del tipo "*n*"*m* … ma non si dimostra per induzione doppia, bensì per induzione su *n*.

- (base) N_0 è $\varnothing$; se $m > n$, $N_m \neq \varnothing$ e non esiste un'iniezione da un insieme non vuoto nell'insieme vuoto.

- (passo induttivo) Supponiamo per *n* che per ogni $m > n$ non esista un'iniezione di N_m in N_n; supponiamo per assurdo che esista invece un $m > n+1$ con un'iniezione di N_m in N_{n+1}, chiamiamola g. $N_{n+1} = N_n \cup \{n\}$. $n = g(i)$ per qualche $i < m$; consideriamo g' così definita: $g'(i) = g(m-1)$, e $g'(j) = g(j)$ per ogni altro $j < m-1$, $j \neq i$. g' risulta un'iniezione di N_{m-1} in N_m, con $m-1 > n$, contro l'ipotesi induttiva.

Per esprimere le proprietà che Dedekind (e dopo di lui indipendentemente Peano) attribuiscono all'insieme dei numeri naturali (gli assiomi) usiamo formule aritmetiche, scritte in un linguaggio logico con un simbolo di costante 0 per 0 e un simbolo funzionale S per il successore:

$$0 \neq Sx$$

$$Sx = Sy \Rightarrow x = y.$$

Quindi si esprime il carattere di minimalità facendo l'intersezione di tutti gli insiemi X che contengono 0 e sono chiusi rispetto alla funzione successore S:

$$N = \leftrightarrow \{ X : 0 \, \varepsilon \, X \wedge \forall y \, (y \, \varepsilon \, X \Rightarrow Sy \, \varepsilon \, X)\}$$

Ne segue che per l'insieme dei numeri vale, e che esso è caratterizzato dal *principio di induzione*:

$$\forall X \, (0 \, \varepsilon \, X \Rightarrow \forall y \, (y \, \varepsilon \, X \Rightarrow Sy \, \varepsilon \, X) \Rightarrow X \subseteq N)$$

o anche

$$\forall X \, (0 \, \varepsilon \, X \Rightarrow \forall y \, (y \, \varepsilon \, X \Rightarrow Sy \, \varepsilon \, X) \Rightarrow \forall x \, (x \, \varepsilon \, X)),$$

come assioma per N, scritto però in linguaggio insiemistico.

La dimostrazione per induzione di una proprietà A per tutti i numeri, la dimostrazione cioè di "*x* A(*x*), si ottiene da quella di A(0) e di "*x* (A(*x*) $\Rightarrow$ A(S*x*)) considerando l'insieme $X = \{x \mid A(x)\}$:

$A(0)$	base dell'induzione
$\forall x \, (A(x) \Rightarrow A(Sx))$	passo induttivo, A(*x*) ipotesi induttiva
$\therefore \; \forall x \, A(x)$	

La base assicura che $0 \, \varepsilon \, X$,

il passo induttivo che:
" $\forall y \, (y \, \varepsilon \, X \Rightarrow Sy \, \varepsilon \, X)$, e " $\forall x \, (x \, \varepsilon \, X)$" è lo stesso che " $\forall x \, A(x)$".

A questo punto si dovrebbe introdurre la relazione d'ordine, ma affronteremo dopo questo argomento. Si può accettare che tale relazione si riesca a definire e ad esprimere nel linguaggio aritmetico.

Osserviamo che, applicando la forma originaria di induzione all'insieme $\{x \mid \forall y\ (y < x \Rightarrow y \in X)\}$, otteniamo

$$\forall X(\forall x\ (\forall y\ (y < x \Rightarrow y \in X) \Rightarrow x \in X) \Rightarrow \forall x\ (x \in X)),$$

che si chiama anche induzione *forte*, o induzione *completa*, o induzione *sul decorso dei valori*.

Per contrasto, quella usuale si chiama induzione *semplice*. In formule

$$\frac{\forall x\ ((\forall y_{\,y<x}\ A(y) \Rightarrow A(x))}{\therefore\quad \forall x\ A(x)}$$

Si noti che non c'è bisogno della base, c'è solo il passo induttivo, per un trucco logico dovuto al significato dell'implicazione: 0 non ha predecessori, per cui

$\forall y_{\,y<x}\ A(y)$, ovvero $\forall y\ (y < x \Rightarrow A(y))$

è sempre soddisfatta; il caso 0 è quindi incluso nell'ipotesi induttiva, vale a dire che non è possibile dimostrare nella sua generalità il passo induttivo se A non vale per 0, e se lo si dimostra, ponendo 0 al posto di *x* si ha A(0).

Se contrapponiamo l'induzione forte, dopo aver particolarizzato "X a un insieme scritto come N – Y, otteniamo

$$Y \neq \varnothing \Rightarrow \exists x\ (x \in Y \wedge \forall y(y < x \Rightarrow y \notin Y)$$

il cosiddetto *principio del minimo*, classicamente equivalente al principio di induzione. La relazione < che soddisfa tale principio del minimo (che in breve afferma che ogni sottoinsieme non vuoto ha un minimo) si chiama, dopo Georg Cantor, un *buon ordine* (se è anche una relazione d'ordine, antiriflessiva e transitiva, come lo è <; altrimenti si chiama relazione ben fondata). Un insieme che abbia un buon ordine si dice bene ordinato.

Il principio del minimo è anche noto *come principio della discesa infinita*, che sarebbe meglio dire della discesa finita. Esso afferma che se una proprietà P vale per un certo *k* > 0, e se vale per *n* > 0 qualunque allora vale anche per il predecessore di *n*, allora P vale per 0. Infatti in queste ipotesi, in cui l'insieme degli *n* che soddisfa P non è vuoto, il minimo deve essere 0, perché se fosse un *n* > 0, non sarebbe il minimo, in quanto anche il suo predecessore soddisferebbe P.

Viceversa, ammesso il principio della discesa infinita, e data una proprietà P non vuota, o 0 soddisfa P, ed è ovviamente il minimo, oppure, se 0 non soddisfa P, ci deve essere un *n* che soddisfa P ma tale che il suo predecessore non soddisfa P. O questo *n* è il minimo di P, oppure tra i numeri minori di P alcuni altri soddisfano P e altri no, ma in un insieme finito, come è $\{i \mid n \geq i\}$, c'è sempre un minimo per ogni proprietà.

Le definizioni ricorsive

La definizione di **N** oltre a giustificare le dimostrazioni per induzione legittima anche le definizioni per induzione. Per chiarezza sarebbe bene distinguere, cosa che non sempre si fa, tra definizioni di funzioni o predicati numerici, che si chiamano più propriamente ricorsive, e definizioni generali (di insiemi ad esempio) per induzione.

Le definizioni ricorsive

La definizione ricorsiva di una funzione è data da un insieme di equazioni in cui occorre un simbolo funzionale incognito f, e le equazioni legano il valore f(n) con valori f(m) per $m < n$. Ce ne sono di diversi tipi e complessità; la più semplice è la definizione per *ricorsione primitiva* di f in termini di h e g, data dalle due equazioni:

$$f(x1,\dots, xn, \mathbf{0}) = g(x1,\dots, xn)$$

$$f(x1,\dots, xn, Sx) = h(x1,\dots, xn, x, f(x1,\dots, xn, x))$$

dove g ed h sono due funzioni date, rispettivamente di n ed n+2 argomenti,.

Le definizioni ricorsive

Il *teorema di ricorsione* afferma (in questo caso particolare, ma vale per sistemi di equazioni più generali) che esiste una ed una sola funzione f a n+1 argomenti che soddisfa, per ogni x1,..., xn, x, le due equazioni.

Somma e prodotto sono definite per ricorsione primitiva in termini di successore, la prima, e di successore e somma la seconda:

$$y + \mathbf{0} = y$$

$$y + Sx = S(y + x)$$

e

$$y \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$y \bullet Sx = y \bullet x + y.$$