SIS Piemonte

a.a. 2004_2005

Corso di Fondamenti della Matematica

Nodi fondamentali in Matematica

8° incontro

Dimostrazioni

Allo scopo di creare una situazione favorevole a una significativa riflessione sulla struttura della dimostrazione, l'insegnante potrà chiedere agli studenti, suddivisi in piccoli gruppi di lavoro, di provare a riprodurre una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

In seguito, mediante una discussione matematica rivolta a tutta la classe e guidata dall'insegnante, si potranno confrontare le produzioni dei diversi gruppi di lavoro con una dimostrazione proposta dall'insegnante.

L'insegnante guiderà gli studenti alla lettura dello schema dimostrativo: l'analisi della struttura della dimostrazione e l'esplicitazione delle regole inferenziali utilizzate dovranno avere lo scopo di fornire elementi, oltre a quelli già in possesso dagli studenti, per capire le idee che stanno dietro alla dimostrazione presa in esame e, più in generale, per capire come si struttura una dimostrazione.

Si assuma l'ipotesi che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale.

Ciò equivale a dire che $\sqrt{2}$ può essere espresso come rapporto di numeri naturali primi fra loro (si farà notare che l'ipotesi che i numeri siano primi fra loro non fa perdere generalità alla dimostrazione).

Dall'ipotesi che $\sqrt{2}$ = m/n (con *m* e *n* primi fra loro), ossia $2n^2 = m^2$, seguono i tre possibili casi (si farà notare che i casi sono esclusivi ed esaustivi):

q: *m* dispari e *n* pari

r: *m* e *n* entrambi dispari

s: *m* pari e *n* dispari

q: *m* dispari e *n* pari

r: *m* e *n* entrambi dispari

s: *m* pari e *n* dispari

In ciascuno dei tre casi si ottiene una contraddizione, il che porta ad affermare (per *assurdo*) che non è un numero razionale (ossia è irrazionale).

Come si può notare, in questa dimostrazione si intrecciano la dimostrazione “per casi” e la dimostrazione “per assurdo”.

Si possono esplicitare gli schemi deduttivi utilizzando, per esempio, le regole della deduzione naturale o anche limitarsi a descrivere nella lingua naturale gli schemi di deduzione utilizzati.

Schema della dimostrazione per casi: se una proposizione *p* è esprimibile con (equivalente a) la disgiunzione di più casi e se da ciascuno dei casi possibili si ottiene la stessa conclusione (equivalente a) *c*, allora da *p* si può concludere *c*.

Nella dimostrazione presa in considerazione, la proposizione *p* è “ $\sqrt{2}$ = m/n ” (con *m* e *n* numeri naturali primi fra loro); essa può essere espressa come la disgiunzione delle proposizioni

q: “*m* è dispari e *n* è pari”;

r: “*m* e *n* sono entrambi dispari”;

s: “*m* è pari e *n* è dispari”

che esauriscono tutti i casi possibili.

Dunque si può assumere che valga senz’altro $q \vee r \vee s$.

Poiché da ciascuno dei tre casi si ottiene l’assurdo, lo schema di dimostrazione per casi consente di dire che da *p* si ottiene l’assurdo.

$$\dfrac{q \vee r \vee s \qquad \begin{matrix}[q] \\ | \\ \bot\end{matrix} \quad \begin{matrix}[r] \\ | \\ \bot\end{matrix} \quad \begin{matrix}[s] \\ | \\ \bot\end{matrix}}{\bot}$$

(*eliminazione di* $\vee$)

Il segno $\bot$ indica l’assurdo e il significato delle parentesi quadrate è questo:

• ogni formula che è dedotta a partire da un dato insieme di assunzioni, dipende in genere da queste.

• nel corso di una dimostrazione è però possibile *scaricare* alcune assunzioni, ossia fare in modo che le formule derivate non dipendano più da tali assunzioni.

Per esempio, se si assume la formula φ e da essa si deriva la formula ψ, esiste una regola inferenziale, detta di introduzione dell’implicazione, che consente di concludere la formula $\varphi \to \psi$.

Tale formula non dipende più dalla assunzione φ; si dice allora che φ è stata *scaricata* e per indicare tale fatto si mette φ fra parentesi quadre.

L’uso delle parentesi quadre indica quindi che una data assunzione è stata scaricata nel corso della dimostrazione, nel senso che essa non è più un’ipotesi necessaria per la dimostrazione.

Si scriverà per esempio, con le notazioni della deduzione naturale:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ |\\ \Psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\quad \text{(introduzione dell'implicazione)}$$

Nel nostro esempio sull'eliminazione del $\vee$, se si assume come ipotesi $q \vee r \vee s$, le ipotesi q, r, s, dalle quali si deriva l'assurdo, non sono più necessarie come ipotesi e possono essere scaricate.

$$\dfrac{q \vee r \vee s \qquad \begin{array}{c}[q]\\ |\\ \perp\end{array} \quad \begin{array}{c}[r]\\ |\\ \perp\end{array} \quad \begin{array}{c}[s]\\ |\\ \perp\end{array}}{\perp}\quad \text{(eliminazione di } \vee\text{)}$$

Il segno di assurdo permette di entrare nel significato di ~ *p*: infatti asserire ~ *p* significa proprio asserire che da p segue un assurdo, cioè $p \rightarrow \perp$. Con questa interpretazione di ~ *p* si può osservare che lo schema di introduzione dell'implicazione diventa:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[p]\\ |\\ \perp\end{array}}{\sim p}$$

Più complesso lo schema di dimostrazione per assurdo, che viene schematizzato così:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\sim p]\\ |\\ \perp\end{array}}{p}$$

Cioè: se supponendo ~ *p* si dimostra un assurdo, allora ciò equivale ad una dimostrazione di *p* senza utilizzare l'ipotesi ~ *p* (~ *p* è scaricato).

Si osserva che con la regola di introduzione dell'implicazione si dimostra solo ~~ *p*, scaricando ~ *p*.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\sim p]\\ |\\ \perp\end{array}}{\sim\sim p}$$

Lo schema di dimostrazione per assurdo equivale alla regola di cancellazione della doppia negazione, cioè alla regola in base alla quale ~~ p equivale a p.

È raro incontrare questo schema nelle dimostrazioni che si incontrano a scuola: di solito si tratta invece dello schema di introduzione dell'implicazione applicato a dimostrazioni in cui si è dimostrato l'assurdo a partire da un'ipotesi p, da cui si conclude ~ *p*, scaricando p (come nel nostro esempio sull'irrazionalità di).

Un altro esempio di questo tipo negli Elementi di Euclide è la proposizione 20 del IX libro che asserisce l'infinità dei numeri primi (si identifica "l'essere infinito" con il "non essere finito"): si parte dall'assunzione che i numeri primi siano in numero finito e si dimostra un assurdo. Si conclude che i numeri primi non sono in numero finito.

Un esempio di uso dello schema di dimostrazione per assurdo è invece la proposizione numero 6 del primo libro di Euclide (è la prima dimostrazione per assurdo degli *Elementi*): un triangolo che ha due angoli uguali ha uguali anche i lati opposti a quegli angoli. Nella dimostrazione si parte con la negazione della tesi, supponendo che i due lati non siano uguali e si trova un assurdo. Quindi si conclude che i due lati devono essere uguali.

Sito web: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI6.html

ESERCIZIO

Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti valgono i seguenti fatti:

1. i cavalieri dicono sempre la verità;
2. i furfanti mentono sempre;
3. sull'isola non vi sono altri abitanti oltre ai cavalieri e ai furfanti.

Si supponga che appena arrivato sull'isola si presentino due abitanti dell'isola che dicono entrambi:

"Io sono un cavaliere se e solo se lui è un cavaliere".

È possibile decidere la natura dei due abitanti (ossia dire se sono cavalieri o furfanti)? Giustificare la risposta esplicitando gli schemi deduttivi utilizzati nel ragionamento.