Qual è la distanza tra Roma e New York?

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare i vettori e il prodotto scalare nello studio di problemi del piano e dello spazio. Risolvere analiticamente problemi sulla sfera, piani e rette e interpretare le soluzioni. Utilizzare i primi elementi della geometria della sfera in altri ambiti (geografia, fisica, astronomia).	Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine).	Spazio e figure	Geografia

Contesto
Geometria della sfera.

Il contesto dell'attività è lo studio delle rotte di navigazione aerea con l'utilizzo della geometria sulla sfera.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
L'insegnante pone agli studenti il problema di come sia possibile descrivere la rotta aerea tra due città molto lontane, come ad esempio Roma e New York. Per aiutarli a visualizzare il problema ci si può avvalere dell'ausilio di un mappamondo, di un planisfero, di fili e di righe graduate. Gli studenti in gruppo provano a individuare i percorsi sul mappamondo e sul planisfero e a confrontarli.
Attraverso una discussione guidata si fanno emergere le considerazioni dei vari gruppi.
Gli alunni probabilmente considereranno come percorso ottimale solo quello riconducibile ad un "segmento".
In effetti, una delle proprietà di un segmento è di essere la linea più breve tra due punti: volendo attraversare una piazza, risulta conveniente muoversi in linea retta piuttosto che seguire un qualsiasi altro cammino. Per andare da Roma a New York non si potrà seguire una linea retta, dal momento che la Terra è rotonda e sulla sua superficie non ci sono linee rette.

<u>Seconda fase</u>
Il docente evidenzia come il problema richieda nuove conoscenze relative al modello geometrico più idoneo per rappresentare il caso in questione. Tale modello è costituito, in prima approssimazione, dalla superficie di una sfera.
La geometria della sfera rappresenta un tema importante della matematica sin dall'antichità, strumento essenziale per l'astronomia, la navigazione, la geografia, la stesura dei calendari e l'indicazione dell'ora.
Al fine di individuare in modo univoco la posizione delle due città sulla superficie della sfera è necessario stabilire su di essa un sistema di riferimento. L'insegnante fa osservare come in un mappamondo siano già presenti alcune linee che consentono di individuare le diverse posizioni dei luoghi sulla Terra. Analizzando in dettaglio queste linee si noterà che quelle passanti per i Poli sono circonferenze tutte uguali tra loro, mentre quelle parallele all'equatore si presentano "parallele" e diverse; in particolare le prime sono i meridiani e le seconde i paralleli. Ogni punto della superficie

terrestre, tranne i poli, può pertanto essere univocamente associato a una coppia di queste linee (meridiano, parallelo).
L'insegnante può sottolineare come la particolare scelta dei meridiani e dei paralleli presenti un'analogia con quanto già studiato sul piano cartesiano. In particolare, è conservata la perpendicolarità; infatti, un cerchio avente come circonferenza un meridiano giace in un piano che è ortogonale al piano di un cerchio avente come circonferenza un parallelo.
Per stabilire un sistema di riferimento è necessario fissare due assi orientati. Sulla sfera terrestre si adottano come "assi" due opportune circonferenze massime tra loro ortogonali: il meridiano di Greenwich (scelto come fondamentale; Greenwich è una località nei pressi di Londra con un osservatorio astronomico) e l'equatore (circonferenza massima). Il loro punto di intersezione, utilizzato come origine O del sistema di riferimento sferico, è un punto al largo della costa occidentale dell'Africa, nel Golfo di Guinea. L'altro punto di intersezione tra la circonferenza che contiene il meridiano di Greenwich e l'equatore è in pieno Oceano Pacifico, e appartiene al meridiano del "cambiamento di data".
Un punto sulla superficie sferica terrestre è solitamente individuato da due angoli, dalla sua longitudine (distanza angolare dal meridiano di Greenwich (l'angolo $R\hat{O}P$ nella Figura 1, dove G indica Greenwich), considerata positiva ad Est e negativa ad Ovest) e dalla sua latitudine (distanza angolare dall'equatore, positiva a Nord e negativa a Sud, rappresentata dall'angolo $P\hat{O}P'$ nella Figura 2, dove la circonferenza massima per R e per P' è l'equatore).

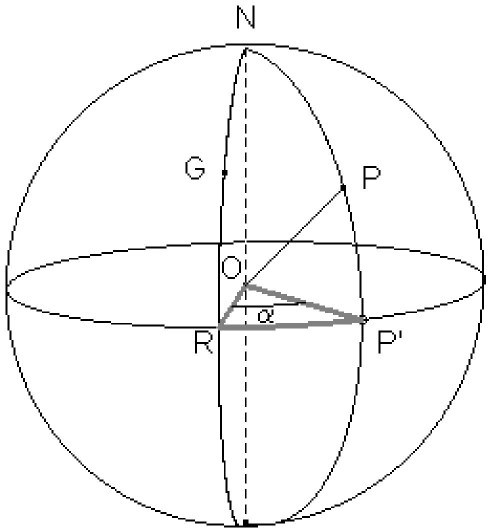

Figura 1

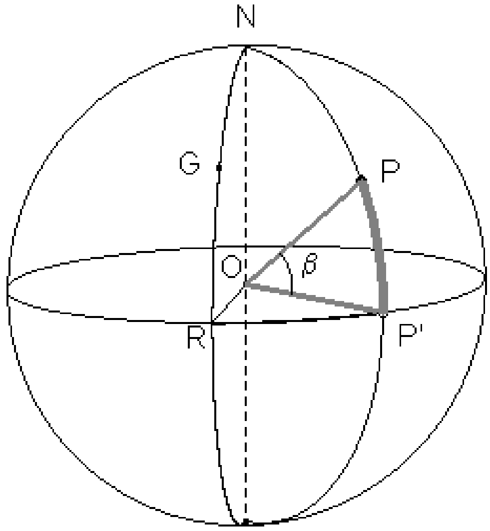

Figura 2

L'insegnante propone agli studenti la lettura della posizione di alcune città, prestando attenzione che nella scelta ricadano città presenti nei vari "quadranti" rispetto all'equatore e al meridiano di Greenwich. Le longitudini precedute dal segno + si leggono anche "Est", quelle precedute dal segno meno "Ovest". Le latitudini con il segno + si dicono "Nord" e quelle con il segno – "Sud".

	Longitudine	Latitudine
Roma	+12° 27'	+41° 55'
Milano	+09° 11'	+45° 29'
New York	–70° 15'	+40° 45'
Buenos Aires	–70° 40'	–33° 30'
Sydney	+151° 10'	–33° 55'

Un punto sull'equatore ha latitudine zero, un punto sul meridiano di Greenwich ha longitudine zero. In particolare si sceglie come unità di misura delle distanze il raggio terrestre equatoriale (circa 6378 km = 1 RT, che corrisponde all'angolo di 1 radiante).
Considerando la Terra una sfera liscia, senza rilievi (l'altezza di volo di un aereo di linea è circa 10 km, una distanza trascurabile rispetto al raggio terrestre). Con le convenzioni adottate possiamo ora stabilire un sistema di riferimento sulla superficie sferica.
Sia *P* un punto sulla superficie sferica (Figura 3); esso è univocamente individuato dalla coppia di misure angolari, in gradi sessagesimali, (α, β), dove α è la longitudine e β è la latitudine, con le seguenti limitazioni:

$$-180° < \alpha \leq 180°$$
$$-90° \leq \beta \leq 90°.$$

Se escludiamo i due poli (che hanno latitudine rispettivamente + 90° e −90° e longitudine qualsiasi) tale sistema di riferimento stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie sferica e le coppie di angoli (α, β).

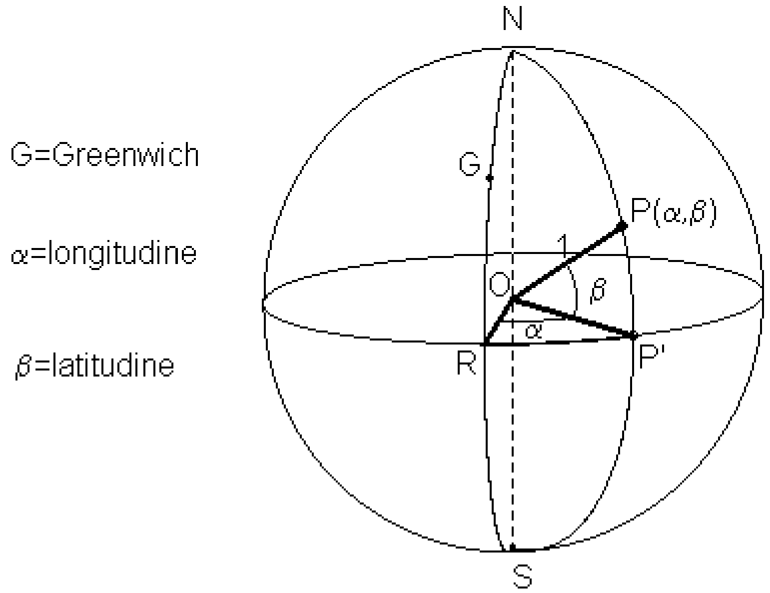

Figura 3

A differenza di quanto accade nel piano, sulla superficie sferica non esistono rette parallele: tutte le *rette* in questa geometria, cioè le circonferenze massime, si intersecano in due punti antipodali. Ne consegue una differenza sostanziale tra la geometria del piano e quella della sfera: sul piano le coordinate (*x*,*y*) di un punto *P* rappresentano le distanze, con segno, di *P* rispettivamente dall'asse *y* e dall'asse *x*. Sulla sfera, invece, solo la seconda coordinata (la latitudine) rappresenta la "distanza" dall'equatore; la prima coordinata (la longitudine) non è uguale alla distanza dal meridiano di Greenwich, tranne nel caso in cui *P* stia sull'equatore; la distanza di *P* dal meridiano di Greenwich diminuisce con l'aumentare della latitudine, fino ad annullarsi per i poli.
In altri termini: i *meridiani* (luoghi dei punti aventi una data longitudine) sono semicirconferenze massime (che possiamo quindi chiamare "*rette*" sulla sfera), i *paralleli* (luoghi dei punti aventi data latitudine) non sono circonferenze massime, tranne nel caso dell'equatore.
A differenza di quanto accade nel piano, la distanza tra due punti non è invariante per *traslazioni*: tali trasformazioni non sono, sulla sfera cartesiana, delle isometrie.

Terza fase
Il docente procede in analogia con quanto già svolto nell'introduzione al piano cartesiano ed evidenzia che la strategia risolutiva migliore consiste nel porre la sfera in un sistema di riferimento

ortogonale *xyz* con l'origine nel centro *O* della sfera (Figura 4). L'origine del piano *xy*, che giace nel piano dell'equatore, corrisponde nel sistema di riferimento sferico al punto *R* di coordinate (0,0,1), l'asse *z* passa per i due poli ed è ortogonale al piano *xy*. In tal modo è possibile associare ad ogni punto $P(\alpha,\beta)$ della sfera il vettore $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ e utilizzare le operazioni in $\mathbf{R}^3$.

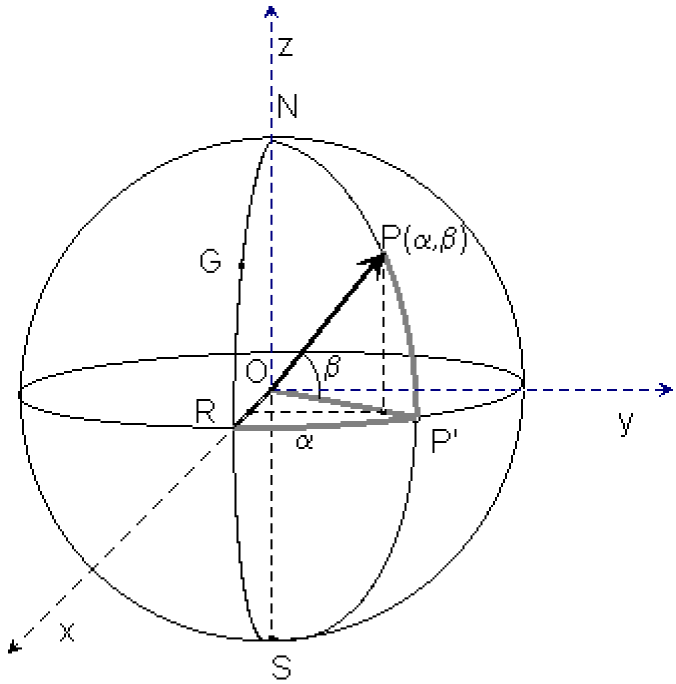

Figura 4

Sia dato un punto $P(\alpha, \beta)$ sulla superficie sferica. Ragionando sui triangoli rettangoli presenti in Figura 5 si possono ottenere per via trigonometrica le componenti in $\mathbf{R}^3$ del vettore $\overrightarrow{OP}$.

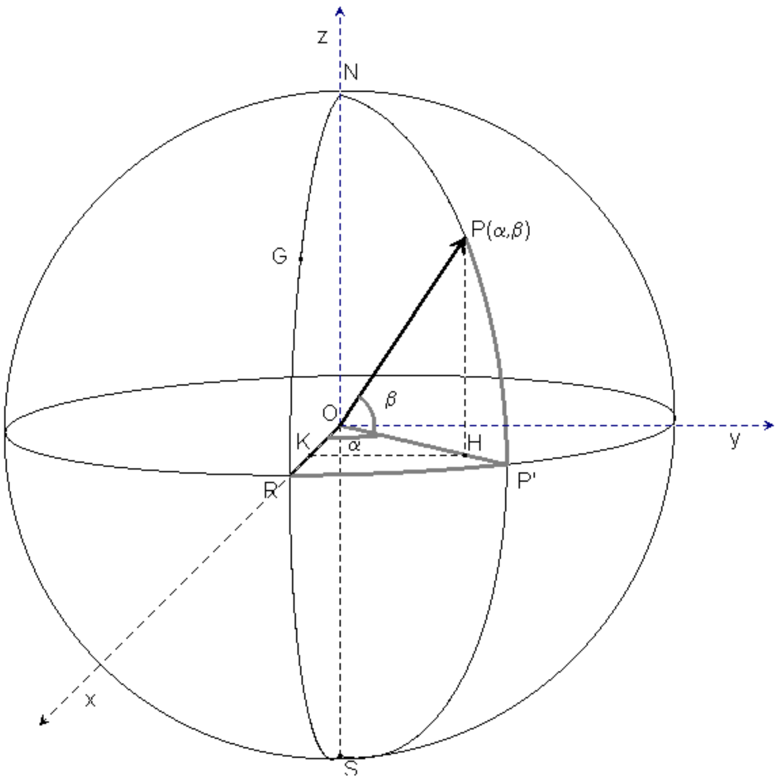

Figura 5

Si ottiene (considerato il raggio terrestre come unità di misura):

$$\begin{cases} x = OK = \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ y = KH = \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ z = HP = \sin\beta \end{cases}$$

Quindi si ha che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha per componenti cartesiane:

$$\overrightarrow{OP} = \left[\cos\alpha \cdot \cos\beta,\ \sin\alpha \cdot \cos\beta,\ \sin\beta\right].$$

Il docente propone agli studenti di verificare che in ogni caso $\overline{OP} = 1$.
Si procederà con l'introduzione del prodotto scalare tra due vettori in $\mathbf{R}^3$.
In uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è possibile quindi definire l'angolo compreso tra due vettori.
Siano $P(\alpha_1,\beta_1)$ e $Q(\alpha_2,\beta_2)$ due punti della superficie sferica. La loro distanza è la lunghezza dell'arco di circonferenza massima di estremi P, Q e coincide con la misura (in radianti) dell'angolo $P\hat{C}Q$.
Con il prodotto scalare si procede al calcolo della distanza PQ.
Poiché:

$\overrightarrow{OP} = \left[\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta_1,\ \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta_1,\ \sin\beta_1\right]$

$\overrightarrow{OQ} = \left[\cos\alpha_2 \cdot \cos\beta_2,\ \sin\alpha_2 \cdot \cos\beta_2,\ \sin\beta_2\right]$

risulta:

$$\cos(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}) = \frac{\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ}}{\|OP\| \cdot \|OQ\|}$$

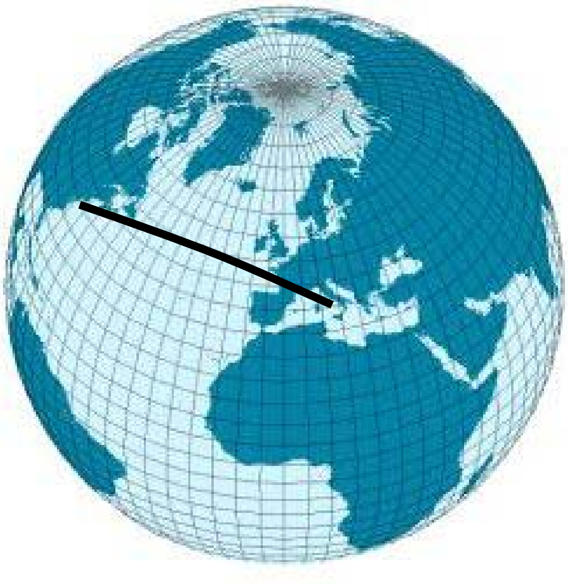

Figura 6

Calcoliamo prima di tutto il prodotto scalare dei due vettori:

$$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ} = \left[\cos\beta_1 \cdot \cos\alpha_1, \cos\beta_1 \cdot \sin\alpha_1, \sin\beta_1\right]\left[\cos\beta_2 \cdot \cos\alpha_2, \cos\beta_2 \cdot \sin\alpha_2, \sin\beta_2\right].$$

da cui:

$$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ} = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2$$

e quindi

$$d(P,Q) = \arccos\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2\right).$$

La misura, in radianti, di $d(P,Q)$ rappresenta, in raggi terrestri, la distanza tra i due punti.
Si giunge quindi alla risposta al problema iniziale: *d*(Roma, New York) = 1,041 RT.
Tale distanza di 1,041 radianti corrisponde a circa 6640 km (Figura 6).
Si conclude perciò che sulla superficie sferica, se si vuole risparmiare carburante, anziché lungo percorsi rettilinei occorre muoversi con delle traiettorie curve. Tali curve, contenute nelle circonferenze massime e dette *geodetiche*, consentono di utilizzare il percorso più breve che collega due località.

Possibili approfondimenti

- Triangoli sulla sfera e loro proprietà.
- Problemi di cartografia.
- Studio delle "geodetiche" su alcune superfici (cilindro, cono) e sulla sfera.

Elementi di prove di verifica

1. Sulla base di quanto visto in precedenza si calcoli la distanza tra Roma e Sidney.

2. In Italia il capoluogo di provincia di massima latitudine è Bolzano (11° 21', 46° 30') e quello di minima latitudine è Ragusa (14° 45', 36° 56'); la loro distanza è 0,173 radianti, pari a circa 1100 km: questo numero rappresenta la lunghezza *in linea d'aria*. Determinare la lunghezza della rotta aerea più breve e commentare il risultato ottenuto.