Solidi e volumi

Percorso: **Il problema della misura**

Abilità	**Conoscenze**	**Nuclei**	**Collegamenti esterni**
Calcolare perimetri e aree di poligoni. Calcolare valori approssimati di π (cfr. *Numeri e algoritmi, Laboratorio di matematica, Misurare*). Calcolare aree e volumi di solidi (cfr. *Misurare*)	Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Lunghezze e aree dei poligoni. Esempi di grandezze incommensurabili. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Il numero π. Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi. Approssimazione dell'area sottesa da un grafico.	Spazio e figure Relazioni e funzioni	Fisica Disegno Storia dell'arte

Contesto
Volumi

Questa attività viene proposta all'inizio del quinto anno e consolida alcune conoscenze e abilità già introdotte relativamente alla misura di superfici e volumi di solidi notevoli come la piramide e la sfera. Si confrontano diversi metodi visti negli anni precedenti, applicando il metodo di esaustione di Archimede già utilizzato per il calcolo dell'area del cerchio e di quella sottesa da un segmento parabolico.

Descrizione dell'attività
Gli strumenti di cui avvalersi come supporto all'attività didattica sono modelli fisici dei solidi, un software di geometria e un software di manipolazione simbolica.
Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata dei metodi per il calcolo di aree e volumi e della nozione di successione.

<u>Prima fase</u>
Consideriamo una sfera di raggio unitario e la sezioniamo in due parti con un piano α passante per il suo centro e consideriamo una delle due semisfere. Sezioniamo ora la semisfera con dei piani paralleli al piano α (Figura 1), e inscriviamo in essa dei cilindri di altezza costante.

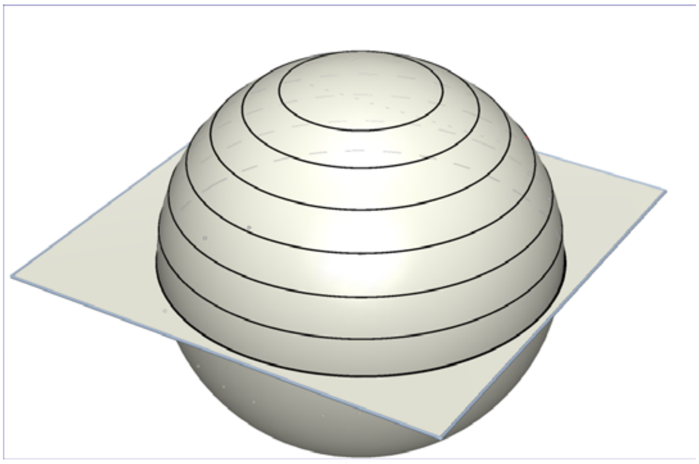

Figura 1

Per esempio possiamo dividere il raggio in dieci parti uguali (vedi Figura 2, nella quale si rappresenta la sezione mediana della semisfera di raggio unitario).

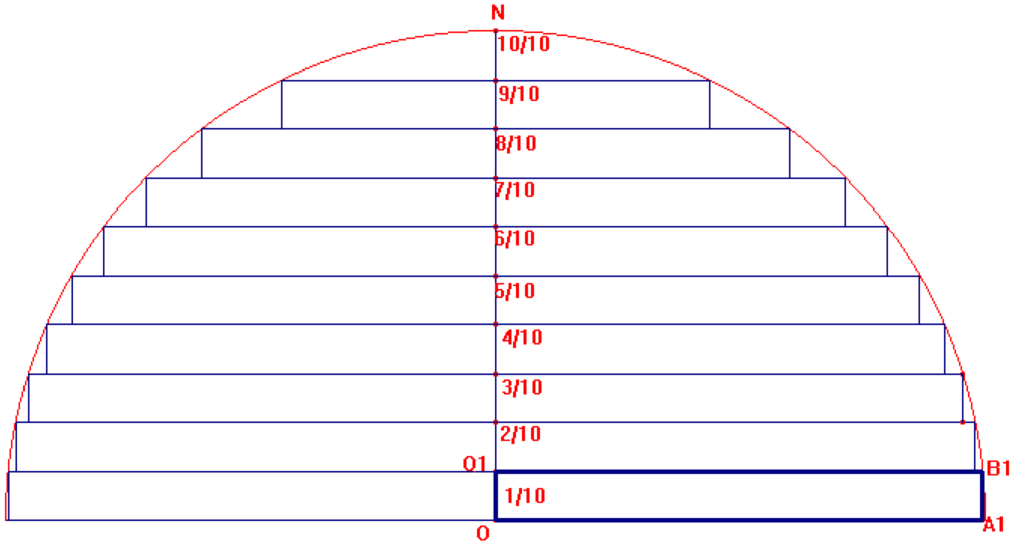

Figura 2

Per calcolare il volume dei cilindri inscritti dobbiamo preliminarmente determinare i raggi di base dei cilindri inscritti nella semisfera. Per risolvere questo problema ci aiutiamo con la costruzione della sezione mediana dei cilindri inscritti nella sfera. Ogni cilindro è generato dalla rotazione di un rettangolo attorno all'asse ON (Figura 2). Consideriamo ora un ingrandimento del rettangolo $OA_1B_1O_1$ (Figura 2; Figura 3) che, con la sua rotazione attorno all'asse ON, genera il primo cilindro.

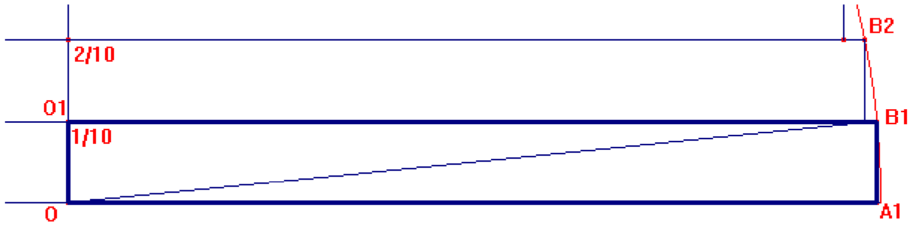

Figura 3

Il raggio r_1 è uguale al segmento OA_1 e per determinarlo applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OA_1B_1; si ha quindi:

$$r_1^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1.$$

Per determinare il raggio di base r_2 del secondo cilindro (Figura 4) si applica lo stesso procedimento al triangolo OA_2B_2; si ottiene

$$r_2^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 1$$

e così via.

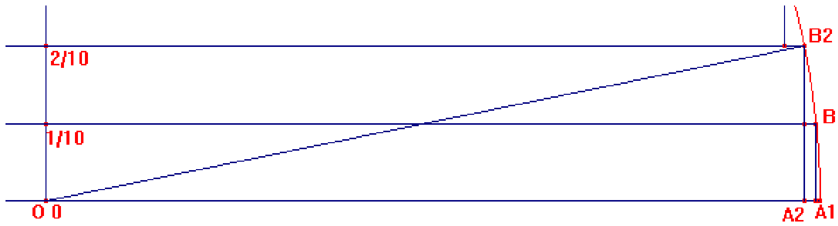

Figura 4

Chiamiamo V_n la somma dei volumi dei cilindri. Otteniamo, dopo aver espresso il raggio in funzione degli altri termini e calcolato la somma dei volumi dei cilindri, la seguente relazione:

$$V_n = \pi\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)\frac{1}{10} + \pi\left(1-\left(\frac{2}{10}\right)^2\right)^2 \frac{1}{10} + ... + \pi\left(1-\left(\frac{10}{10}\right)^2\right)\frac{1}{10}$$

Generalizzando, supposto di dividere il raggio unitario in n parti uguali, otteniamo

$$V_n = \pi\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n} + \pi\left(1-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)^2 \frac{1}{n} + ... + \pi\left(1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}$$

e raccogliendo

$$V_n = \frac{\pi}{n}\left[\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \left(1-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right) + ... + \left(1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right].$$

Per valutare quest'ultima somma, si riordinano opportunamente i termini; otteniamo la seguente relazione

$$V_n = \pi - \pi\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\right].$$

Per valutare il valore dell'espressione (indicata tra parentesi quadre):

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

all'aumentare di n, possiamo interpretarla geometricamente:

- il primo termine $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ è uguale al volume di un cubo di spigolo $1/n$;
- il secondo termine $\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ è uguale al volume un parallelepipedo rettangolo che ha per base un quadrato di lato $2/n$ e altezza $1/n$;
- …
- il termine $(n-1)$-esimo è uguale al volume di un parallelepipedo di base un quadrato di lato $(n-1)/n$ e altezza $1/n$;

- l'ultimo termine $\left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ è uguale al volume di un parallelepipedo che ha per base il quadrato unitario e per altezza $1/n$.

Possiamo ora rappresentare graficamente questi parallelepipedi e "sistemarli" uno sopra l'altro come indicato in Figura 5: otteniamo uno"scaloide".

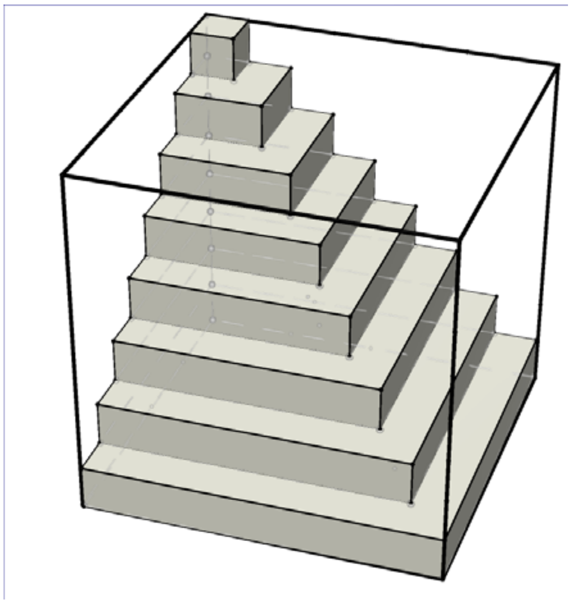

Figura 5

Una sezione è data dal seguente disegno (Figura 6).

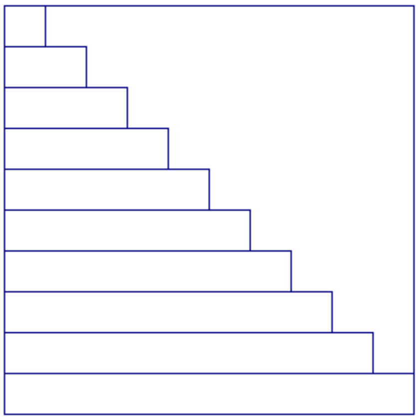

Figura 6

Al crescere di n la figura precedente si avvicina alla seguente (Figura 7), cioè alla metà di un quadrato che, ovviamente, ha area $\frac{1}{2}$ essendo il quadrato di lato unitario.

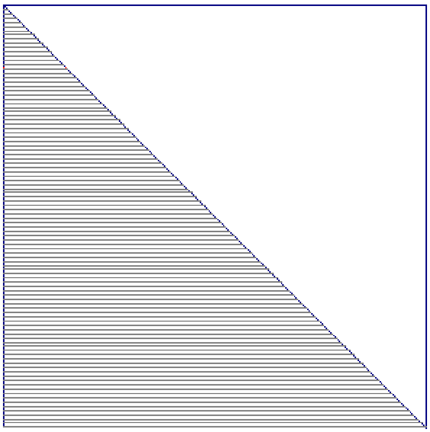

Figura 7

In modo analogo, la figura tridimensionale detta “scaloide”, di cui la Figura 6 rappresenta una sezione, si avvicina a una piramide con base un quadrato di lato 1 e altezza pari a 1.

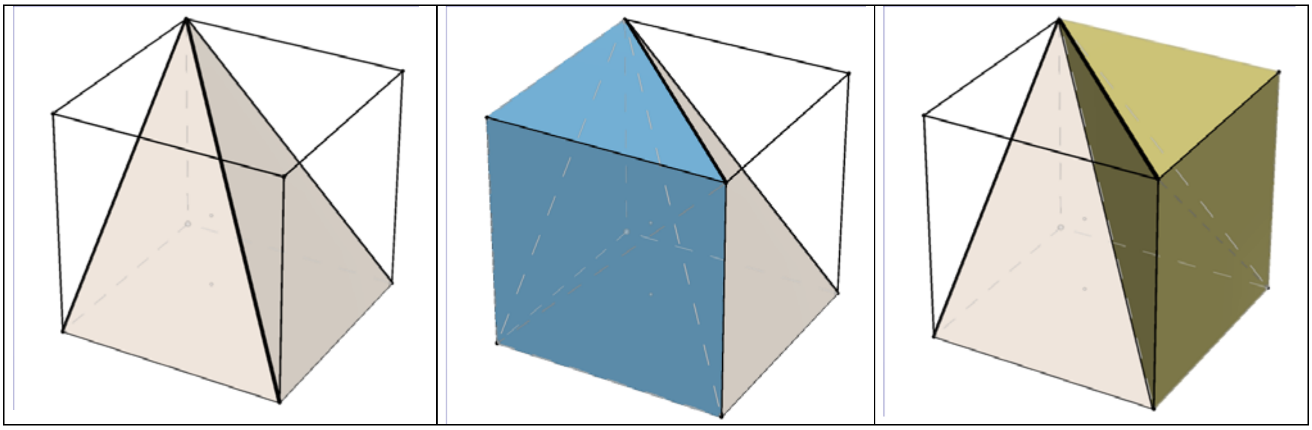

Figura 8

Poiché un cubo si può scomporre in tre piramidi tra loro equivalenti (Figura 8), il volume dello scaloide si avvicina, al crescere di n, a $\frac{1}{3}$ e quindi V_n, che rappresenta un valore approssimato del volume della semisfera, tende a

$$V_{semisfera} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi .$$

Quindi il volume della sfera di raggio unitario è $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi$.

Il metodo proposto è sostanzialmente una riformulazione, “per via algebrica”, di quello di esaustione usato da Archimede.

E cosa possiamo dire se la sfera non ha raggio unitario?

Si può pensare alla sfera di raggio r come l’ingrandimento tramite un’omotetia rispetto al centro della sfera unitaria e di rapporto r. Poiché il rapporto tra i volumi di figure nello spazio che si corrispondono tramite un’omotetia di rapporto r è uguale a r^3, si ottiene che il volume della sfera di raggio r è:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Possibili sviluppi

1. Dal volume della sfera alla superficie della sfera.

Per misurare la superficie S della sfera sfruttiamo l'idea di “trasformare la superficie S in un solido” (citato da Giovanni Prodi), dotandola di un piccolo spessore *h*. Precisamente, si considera il “guscio” sferico formato dai punti che hanno distanza non superiore a *h* dalla superficie sferica di raggio *r*.
In questo ragionamento, in qualche modo si considera più semplice e intuitiva l’idea di volume rispetto a quella di area e si procede in senso inverso rispetto a quello che normalmente si fa per altre figure solide.

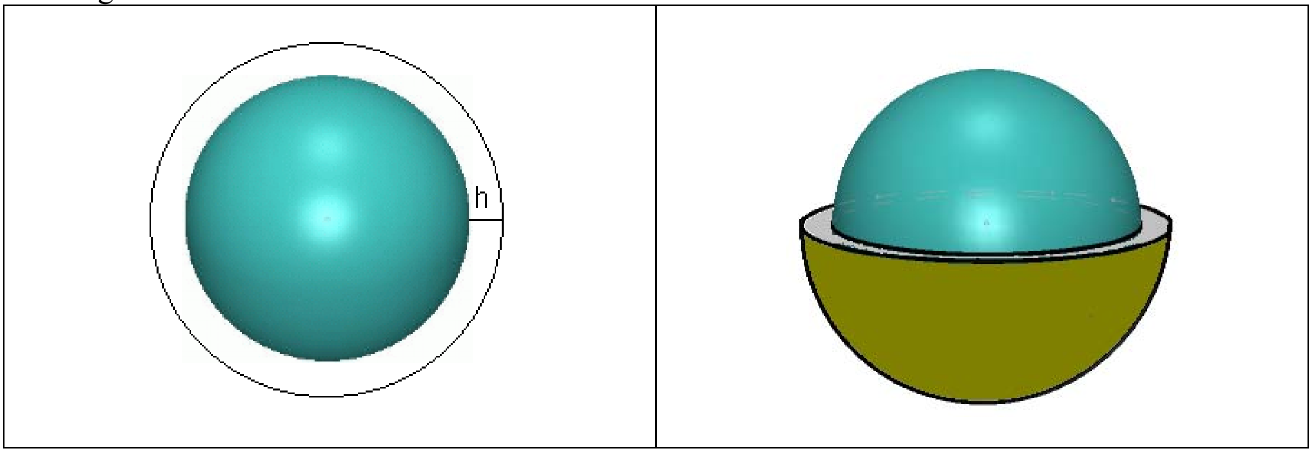

Figura 9

Indicando con $W(h)$ il volume del “guscio” sferico (Figura 9), si ha che

$$W(h) = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Quest’ultima espressione può essere interpretata come l’incremento del volume della sfera di raggio r quando il raggio diventa $r+h$. Quindi, indicato con $V(r)$ il volume della sfera di raggio r, possiamo anche scrivere:

$$W(h) = V(r+h) - V(r) = \Delta V .$$

Sviluppando i calcoli otteniamo il volume del guscio sferico:

$$W(h) = 4\pi\left(r^2h + rh^2 + \frac{1}{3}h^3\right).$$

Possiamo quindi interpretare l’ultima formula trovata come l’espressione del volume di un solido equivalente a un cilindro di altezza h e superficie di base pari a

$$S_{base} = \frac{W(h)}{h} = \frac{4\pi\left(r^2h + rh^2 + \frac{1}{3}h^3\right)}{h} = 4\pi\left(r^2 + rh + \frac{1}{3}h^2\right).$$

Diminuendo h lo spessore del “guscio” diventa sempre più piccolo. Di conseguenza la misura della superficie S_{base}, data dall’espressione $\frac{W(h)}{h}$, si avvicina al valore della superficie sferica. Ragionando sulla formula trovata precedentemente, si osserva che, al divenire di h sempre più piccolo, $\frac{W(h)}{h}$ si avvicina a $4\pi r^2$. Quindi la superficie della sfera è $S = 4\pi r^2$.

2. Revisione del procedimento per determinare il volume della sfera usando il principio di Cavalieri e la cosiddetta *scodella di Galileo*.

3. Il procedimento di Archimede per determinare la superficie della sfera.
Si usa in questo caso il cilindro circoscritto alla sfera, con altezza uguale al diametro della sfera stessa (detto, con espressione imprecisa, cilindro “equilatero”).