

SIS Piemonte

a.a. 2004_2005

**Corso di Fondamenti della
Matematica**

**Nodi fondamentali in
Matematica**

4° incontro

**Percezioni, linguaggi e
teorie in matematica**

INDICE

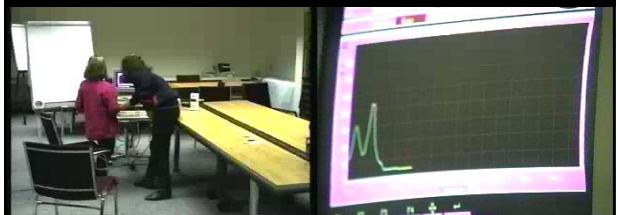
- 1. Il significato degli oggetti matematici**
- 2. Le radici cognitive degli oggetti matematici**
- 3. Lo spazio di azione, produzione e comunicazione**
- 4. Osservazioni conclusive**

Per motivi di chiarezza espositiva e di brevità, mi riferirò ad alcuni casi concreti che riguardano esclusivamente il concetto di funzione

1. Il significato degli oggetti matematici

VIDEOCLIP 1

(Eleanor)



And this is how it works. I push F1 to start, and you can move that.

[R. Nemirovsky & T. Wright]

UN SALTO

N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Hermann, 1970

Déf. 9. ... une correspondance $f = (F, A, B)$ est un fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f , la relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y ; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x de A , et se désigne par $f(x)$...

N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Hermann, 1970

Déf. 9. ... une correspondance $f = (F, A, B)$ est un fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f , la relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y ; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x de A , et se désigne par $f(x)$... (II, Théorie des ensembles, §3, n°4)

Una corrispondenza $f=(f,a,b)$ e' una funzione se, per ogni x appartenente all'insieme di partenza A di f , la relazione (x,y) e F e' funzionale in y ; l'unico oggetto corrispondente a x tramite f si chiama valore di f per l'elemento x di A e si indica con $f(x)$.

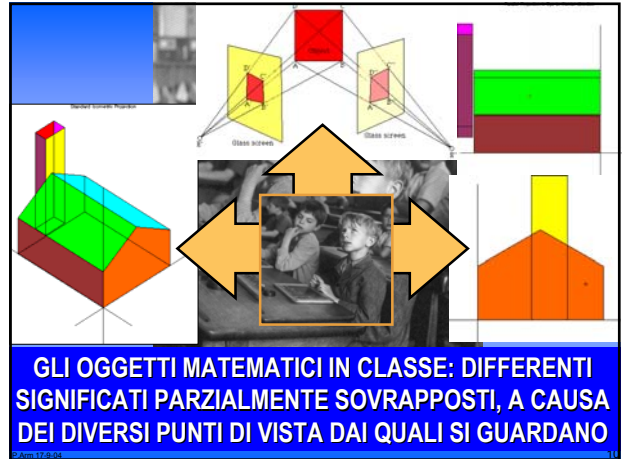


N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Hermann, 1970

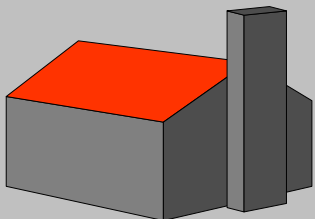
Déf. 9. ... une correspondance $f = (F, A, B)$ est un fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f , la relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y ; l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x de A , et se désigne par $f(x)$... (II, Théorie des ensembles, §3, n°4)

Una corrispondenza $f=(f,a,b)$ e' una funzione se, per ogni x appartenente all'insieme di partenza A di f , la relazione (x,y) e F e' funzionale in y ; l'unico oggetto corrispondente a x tramite f si chiama valore di f per l'elemento x di A e si indica con $f(x)$.

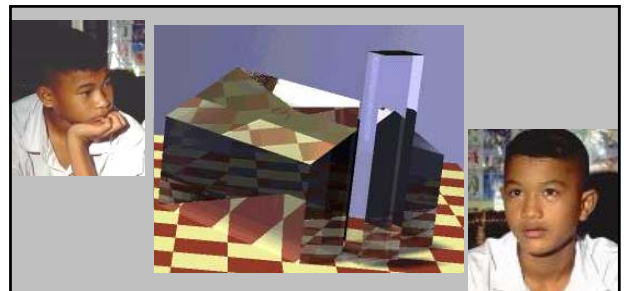
**Il problema è:
Come colmare il salto tra
la verità 'logica' di
Bourbaki e la verità
'corporea' di Eleanor?**



**GLI OGGETTI MATEMATICI IN CLASSE: DIFFERENTI
SIGNIFICATI PARZIALMENTE SOVRAPPosti, A CAUSA
DEI DIVERSI PUNTI DI VISTA DAI QUALI SI GUARDANO**



**Come far sì che gli studenti
li comprendano nella loro
totalità?**



**LO SPAZIO COGNITIVO DI AZIONE,
PRODUZIONE E COMUNICAZIONE
(Spazio APC)**

Lo Spazio APC è un ambiente cognitivo condiviso che si può sviluppare in classe.

E' un'entità integrata e dinamica, che agisce come un tutt'uno.

I suoi elementi costitutivi sono:

- il corpo
- il mondo fisico
- l'ambiente culturale

Quando gli studenti imparano la matematica tutti questi elementi (eventualmente con altri, ad es. gli aspetti affettivi) sono attivi ed interagiscono.

Arzarello, Bazzini & Chiappini, PME XX



Lo Spazio APC è costruito nella classe attraverso le interazioni tra gli studenti, la mediazione dell'insegnante ed eventualmente attraverso l'interazione con gli artefatti.

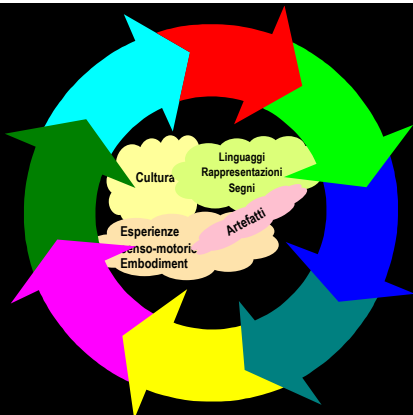
Il modello APC dà particolare importanza alla conoscenza percettivo-motoria.



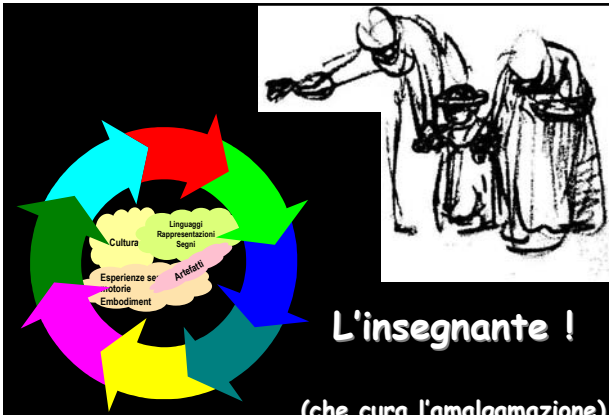
E: Oh I'm going to try and make a pattern

L'approccio percettivo-motorio considera sia l'agire che il percepire e produce apprendimento basato sul fare, toccare, muovere(-rsi), vedere.

Antinucci, Nemirovsky

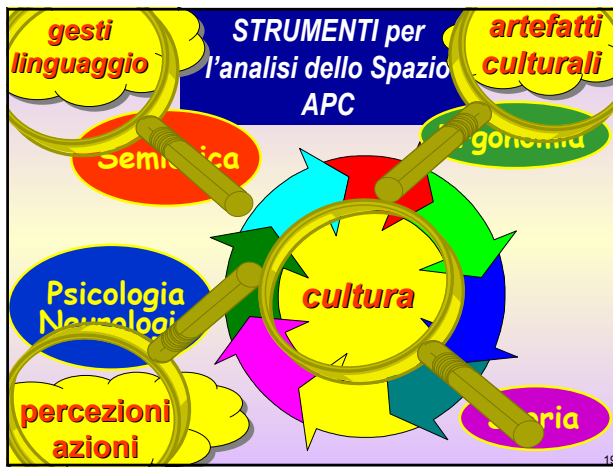


Amalgamare gli ingredienti



L'insegnante !

(che cura l'amalgamazione)



Le radici storiche delle funzioni hanno un interesse cognitivo e pedagogico.

Sono spesso *radici cognitive* [Tall, 1992].

- **MOVIMENTO** (Oresme, Galilei, Newton,...)
- **GRAFICI** (Euler,..., Klein,...)
- **EQUAZIONI** (Leibniz, Euler, D'Alembert,...)

Esse focalizzano differenti *immagini-concetto* delle funzioni, *che* illustrano il loro variegato aspetto.

Malik, Monna, Gravemeijer&Doorman, Grattan Guinness, Vinner, DeMarois,Tall

**IL MOVIMENTO:
il punto di vista della fisica**

Le radici del concetto di funzione si sono sviluppate quali relazioni tra variabili concrete, dinamiche e continue, per esprimere

l'idea di **cambiamento**

fenomeni di **movimento**

J. Kaput (1979), ...

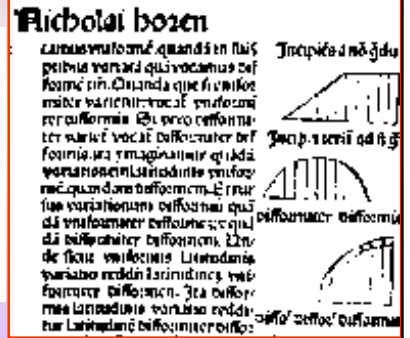
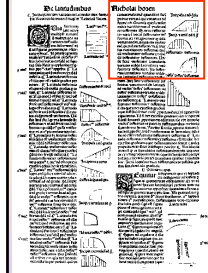
L'analisi della velocità

Merton College
(Oxford, XIV c.)



N. Oresme
(Paris, 1325-1382)

Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum (1353)



© Am 17.9.04 25

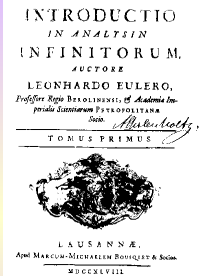


Newton:
la genesi attraverso il movimento

I ...consider Mathematical Quantities ...as generated by continual motion... These Geneses are founded upon Nature and are every Day seen in the motion of Bodies.

[Newton, Quadr. Curves, 1710]

I GRAFICI: il punto di vista della geometria

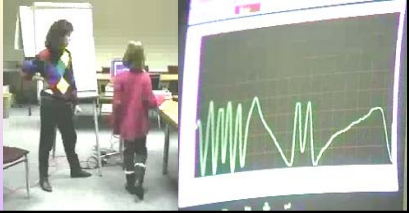


"...Thus any function of x, geometrically interpreted... will correspond to a well defined line, straight or curve, the nature of which will depend on the nature of the function."

I fenomeni di cambiamento e di movimento possono produrre a **risonanze cognitive** positive negli allievi e supportare il loro apprendimento.

T: So what happened?
Do you remember what you were doing here?
E: I was going slower

Però...



P.Am. 17.9.04

Inoltre...oggi...



2. Uso di sensori per raccogliere i dati su oggetti e persone in movimento in tempo reale e li rappresentano in tempo reale sullo schermo di un computer in forme diverse (numeriche, grafiche, iconiche, ...)

Kaput, Malik, Mariotti & Laborde, Nemirovsky

P.Am. 17.9.04

artefatti culturali

2

Ergonomia



P.Am. 17.9.04

SCROLLING AND COVARIANZA

L'artefatto, sotto la guida dell'insegnante, può produrre in modo 'naturale' importanti effetti cognitivi e didattici.

- Rabardel: genesi (in)strumentale
- Hoyles & Noss: astraction situata

DATA	c1	c2	c3	c4	c5
36	4.4974	4.3869			
37	4.5973	4.3859			
38	4.6973	4.487			
39	4.8972	4.3755			
40	4.9971	4.3932			
41	5.197	4.368			
42	5.2969	4.3692			

F42c2=4.37916

FABIO: diminish (Giulia: Scroll)...Here it's already beginning to diminish

P.Am. 17.9.04

percezioni azioni

3

Psicologia Neurologia

LE FUNZIONI SOTTO LALENTE



P.Am. 17.9.04

Nei processi di apprendimento si osserva una complessa interazione ed intreccio di molti ingredienti con il-del nostro corpo:

- ARTEFATTI
- GESTI
- SGUARDI
- PAROLE
- SEGNI



P.Am. 17.9.04




Vygotsky

I gesti dal punto di vista sociale

© Am 17-9-04

Pointing

- Il movimento con cui si afferra cambia l'atto con cui si indica.
- Esso diventa un vero gesto solo dopo che oggettivamente mostra tutte le funzioni con cui si indica per gli altri ed è inteso dagli altri in quel senso.

© Am 17-9-04

Dati recenti dalle ricerche sui gesti

Psicologia


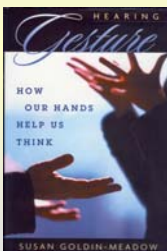
Neuroscienze

© Am 17-9-04

Dalla psicologia:

“...i gesti giocano un ruolo nella produzione verbale in quanto giocano un ruolo nel processo di concettualizzazione”

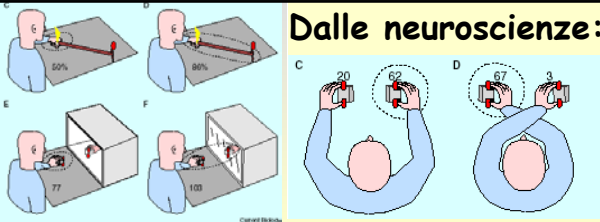
→ Un ruolo diretto nei processi di **PENSIERO**

Goldin-Meadow, Kita, McNeill

© Am 17-9-04

Dalle neuroscienze:

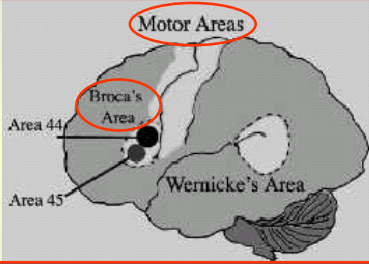


‘Il cervello del primate costruisce varie rappresentazioni dello spazio centrate su parti del corpo, basate sull’integrazione di informazioni visive, tattili e propriocettive. Tali rappresentazioni possono cambiare plasticamente secondo l’uso attivo di strumenti che estendono lo spazio raggiungibile ed anche modificano la rappresentazione dello spazio peripersonale.’

A. Maravita et al.

© Am 17-9-04

Le aree del cervello che orchestrano le azioni: le aree motorie e di Broca



Le azioni sono organizzate sulla base di immagini di gesti

D. McNeill

Un esempio

Problema

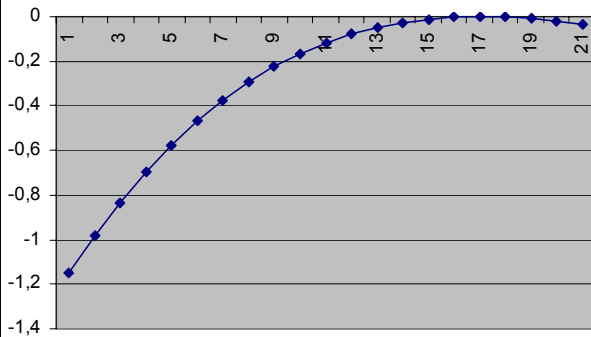
(10 th grade)

A	B	C	D
-0,80	-1,15		
-0,75	-0,99	0,16	
-0,70	-0,84	0,15	-0,01
-0,65	-0,70	0,14	-0,01
-0,60	-0,57	0,13	-0,01
-0,55	-0,45	0,12	-0,01
-0,50	-0,34	0,11	-0,01
-0,45	-0,24	0,10	-0,01
-0,40	-0,15	0,09	-0,01

$A =$ variabile indipendente
 $B = f(A)$
 $C =$ differenze I
 $D =$ differenze II

Diagram annotations: A green arrow points from -1,15 to -0,99. A blue arrow points from -0,99 to 0,16. A red arrow points from 0,16 to (-1,15) = 0,16. A green circle highlights (-1,15) = 0,16.

Il problema con $\Delta 2 = \text{cost}$



Una parabola

Il problema è dato a studenti che lavorano in coppia (con o senza un computer)

La consegna:

- Traccia uno schizzo del grafico della funzione $B = f(A)$
- Spiega le strategie usate

QuickTime™ and a
VC H.263 decompressor
are needed to see this picture.

P.Am. 17.9.04

49

Una prospettiva più ampia sui gesti

1

I gesti:

possono essere uno strumento di
pensiero

P.Am. 17.9.04

50

STRUMENTI DI PENSIERO



Ins.: che cosa ti aspetti dalle differenze se cresce sempre di più?
G: ... le differenze crescono sempre di più

P.Am. 17.9.04

51

Una prospettiva più ampia sui gesti

2

I gesti:

possono essere parzialmente alternativi
agli artefatti, come protesi con cui fare
esperimenti reali con oggetti virtuali

P.Am. 17.9.04

52



... ma se crescono sempre di più il
grafico sale sempre di più...

P.Am. 17.9.04

53



Però se decrescono e decrescono sempre
meno ... Si... devono fare una curva

P.Am. 17.9.04

54

Una prospettiva più ampia sui gesti

3

I gesti:

possono avere funzioni esplorative, anticipatorie e organizzative

P.Am. 17.9.04

55



Una prospettiva più ampia sui gesti

4

I gesti:

possono avere aspetti sociali: appartengono allo spazio peripersonale delle persone che interagiscono

P.Am. 17.9.04

57



1



2



3



4



P.Am. 17.9.04

59

Una prospettiva più ampia sui gesti

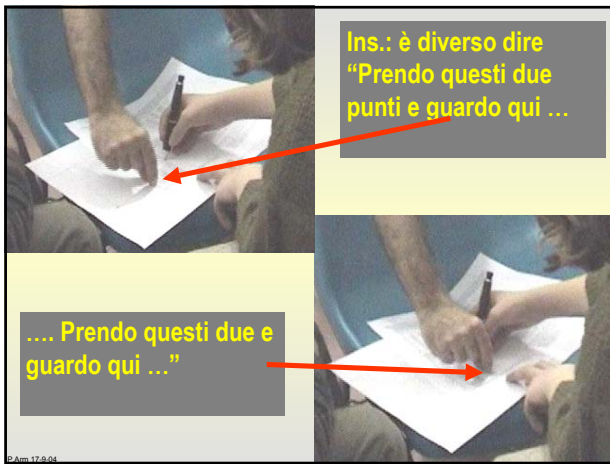
5

I gesti:

possono avere aspetti sociali: possono contribuire alla dialettica della costruzione sociale del sapere, SE l'insegnante ne incoraggia l'uso in classe

P.Am. 17.9.04

60



Una prospettiva più ampia sui gesti

**SOVRAPPOSIZIONE TRA
PERCEZIONE E IMMAGINAZIONE**

⇒ astrazione

[Decety, Nemirovsky]



Il ruolo dei segni

La relazione tra il segno e il suo significato non è di mera sostituzione, ma è immersa in un sistema semiotico culturale che provvede i significati alle attività degli individui.

L. Radford, 2003 64

Il ruolo dei segni

Il nodo semiotico

L. Radford 65

Gesti e parole acquisiscono un coordinamento di tempo, spazio e movimento che porta all'oggettificazione sociale delle relazioni matematiche astratte di natura spazio-temporale.

Da un punto di vista epistemologico, il nodo semiotico ha una dimensione costruttiva finalizzata alla produzione di significato.

(L. Radford)

PAmm.17.9.04

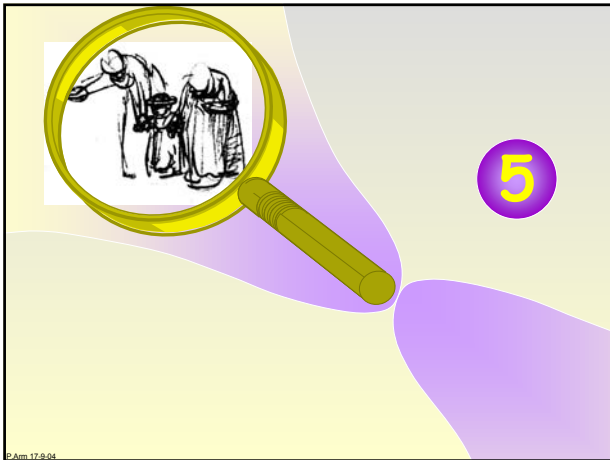
66



T: Potresti farlo salire verticalmente? ...

E: Per salire verticalmente dovrebbe essere sempre lo stesso tempo, perché [il tempo] si muove da solo indipendentemente da quello che fai...

Così dovresti in certo modo fermare il tempo e andare così...



IL RUOLO DELL'INSEGNANTE

L'insegnante ha il compito di condurre l'interazione tra il livello percettivo, corporeo della protomatematica degli studenti e il livello socialmente condiviso della matematica come patrimonio culturale, storicamente situato.



Più precisamente, il ruolo dell'insegnante è conseguito con diversi strumenti di mediazione, tra di loro integrati:

- **mediazione diretta**
- **mediazione indiretta**

mediazione diretta

Ins.: "È diverso dire
Prendo questi due punti e guardo qui Prendo questi due e guardo qui ...
che guardare in questo modo:
ZZZ..."

mediazione indiretta



G: ...le differenze crescono sempre più

Ins.: le differenze crescono sempre più

P.Am. 17.9.04

73

3. Lo spazio di azione, produzione e comunicazione



P.Am. 17.9.04

75

Un esempio: l'eurowheel a Mirabilandia

P.Am. 17.9.04

76

Progetto fisica [G. Pezzi]



Un'aula senza pareti

L'organizzazione

Si studiano quattro attrazioni

Carousel



Sierra Tonante



Eurowheel



Discovery
e
Columbia



P.Am. 17.9.04

78

L'organizzazione

Eurowheel

- Studi sul moto circolare (misure di tempo, ...)
- *Misure online* della pressione atmosferica con un barometro connesso a CBL2, TI83



Gli strumenti online

Calcolatore grafico TI83

Barometro

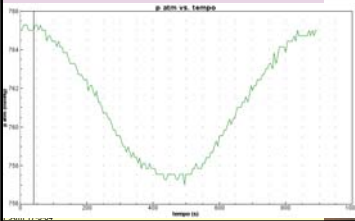
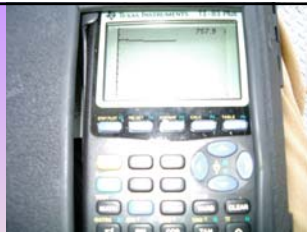
Accelerometro

CBL2

P.Am.17-9-04

80

Misurando la pressione



QuickTime™ and a VC H.263 decompressor are needed to see this picture.

P.Am.17-9-04

82

1. Il fenomeno: una descrizione della ruota che gira (gesto iconico-fisico)

O: this is a circular motion.... I have thought it so... I don't know if I have thought right...

16.25.1

16.25.2

16.25.3

16.25.4

Gesto iconico-fisico

16.26

2. Una nuova grandezza: la pressione
(gesto iconico-rappresentazionale)



La proiezione dei valori della pressione
su di un **Gesto iconico-rappresentazionale**
moto della ruota, da una cosinusoide

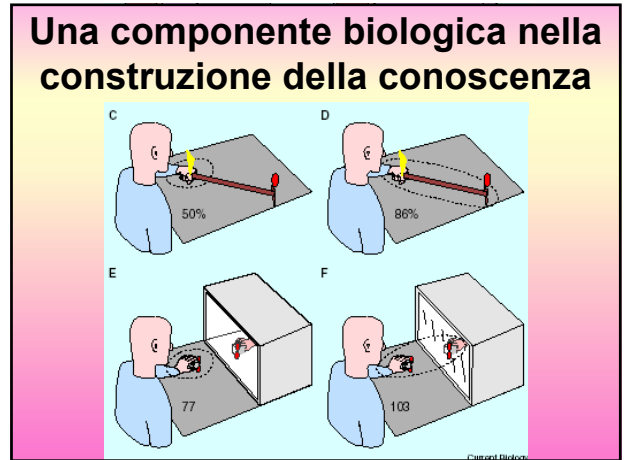
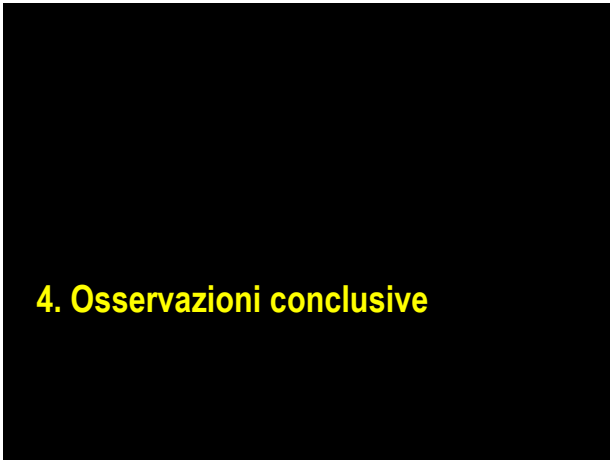
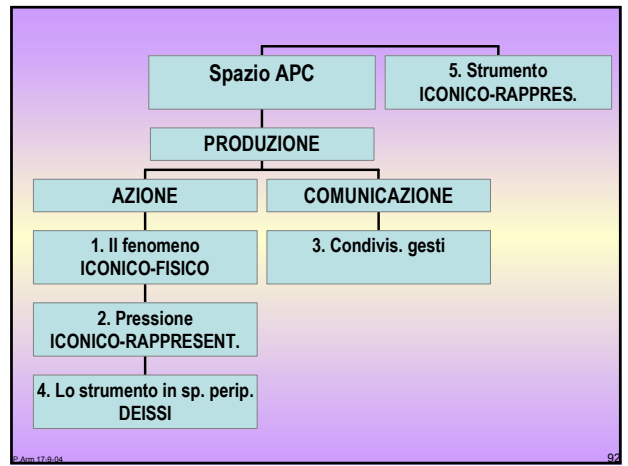
3.COMUNICAZIONE
CONDIVISIONE dei gesti

4. Lo strumento
entra nello spazio
peripersonale
Instrument.
.. if you
have
the
proc
s of A
confe
there
writt

Interazione con lo strumento
con gesti (deittici)

5. Lo strumento entra lo spazio APC

el
nce
the
re
nce

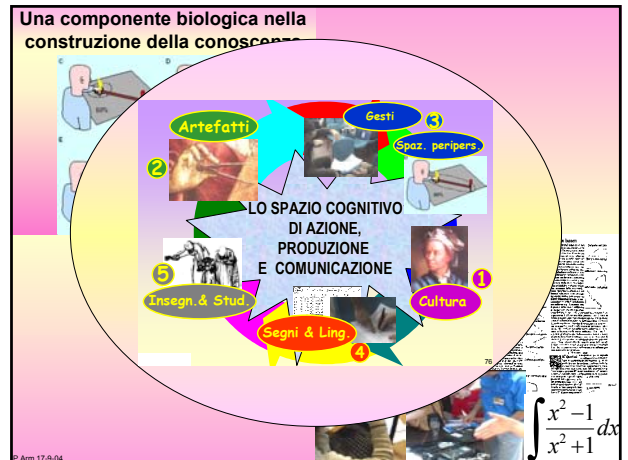


Una componente culturale nella costruzione della conoscenza

De Lantadimbo Richard boson

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

P.Am. 17-9-04



In conclusione, la mia tesi è
che...

P.Am. 17.9.04

97

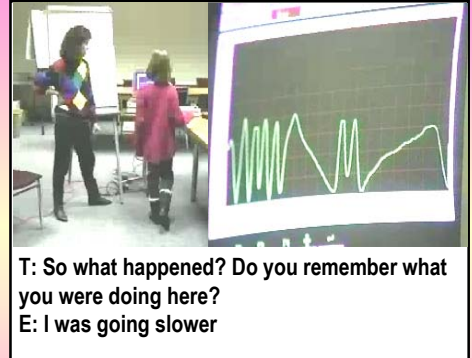
... c'è un ampio corpo di matematica reale
e significativa che può essere appresa in
modo 'naturale', cioè...



...promuovendo l'**integrazione** delle radici culturali e
biologiche delle idee matematiche...

P.Am. 17.9.04

98



T: So what happened? Do you remember what
you were doing here?
E: I was going slower

... questo effetto può essere conseguito alimentando la
loro **risonanza cognitiva** negli studenti.

P.Am. 17.9.04

100

Quindi:



insegnare una
matematica
dal volto umano

P.Am. 17.9.04

101

Ciò può aiutare a colmare
il salto tra la **verità logica**
di Bourbaki e la **verità**
fattuale di Eleanor



P.Am. 17.9.04

