Grissini e triangoli

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici. Produrre congetture. Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano. Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche.	Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Eventi e probabilità. Rette, segmenti, poligoni. Equazioni e disequazioni. Semplici funzioni razionali.	<u>Argomentare, congetturare, dimostrare</u> Dati e previsioni Spazio e figure Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Probabilità e geometria

L'attività si colloca al primo anno del secondo biennio quando gli studenti hanno già acquisito l'abilità di usare ed analizzare in varie situazioni linguaggi simbolici, produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e sono in possesso di conoscenze relative allo spazio degli eventi nel caso finito e alla valutazione classica di probabilità.
L'attività è finalizzata a favorire negli studenti l'evoluzione dall'argomentare al dimostrare privilegiando le loro capacità di ragionamento stimolate dal fatto che il problema proposto non suggerisce, a priori, neppure intuitivamente la soluzione.

Descrizione dell'attività
<u>Il grissino</u>
Un grissino di lunghezza b viene spezzato in tre punti a caso. Qual è la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo?
Si invitano gli studenti a formulare delle congetture (magari provando a spezzare in tre parti un grissino…) dalla discussione emerge che affinché i tre pezzi di grissino formino un triangolo essi devono avere una certa lunghezza!
La necessità di porre condizioni sulla lunghezza porta a tradurre il problema in linguaggio matematico: si consideri il grissino come un segmento che deve essere diviso in parti in modo da poter formare un triangolo.
Si rappresenti un segmento di lunghezza b e siano x e y due delle sue parti:

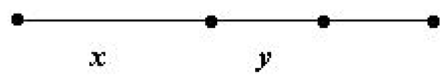


Figura 1

E' facile capire che $x + y < b$ traduce, in linguaggio formale, la condizione che il segmento possa essere diviso in tre parti.
Si sa che ciascuna delle tre parti per poter formare un triangolo deve avere una lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri due, che tradotto formalmente:

$$x < b/2\ ;\quad y < b/2;\quad x + y > b/2$$

Il passaggio dal grissino al segmento non è banale!
Richiede un processo di astrazione che, in questo contesto, si propone di realizzare utilizzando le abilità relative al calcolo delle probabilità. Per giungere ad esso è opportuno aver già abituato i ragazzi a calcolare la probabilità nel caso di spazi infiniti di eventi come rapporto di aree, proponendo ad esempio esercizi del tipo seguente.
Si vuole colpire un bersaglio di forma circolare. Qual è la probabilità di colpire il bersaglio in un punto più vicino al centro che alla circonferenza?

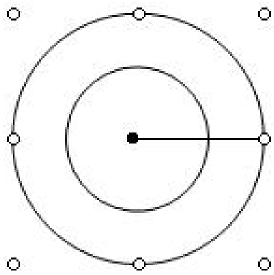


Figura 2

E' necessario osservare che il segmento, a differenza del grissino, è omogeneo rispetto ai suoi punti per cui si può congetturare che tutti i punti sono equiprobabili (cioè il segmento si può "spezzare" in ogni punto); si può quindi applicare la definizione classica di probabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.
Per il calcolo dei casi favorevoli si utilizzano le condizioni:

$$x < b/2\ ;\quad y < b/2;\quad x + y > b/2$$

Per il calcolo dei casi possibili si utilizzano le condizioni:

$$x>0;\quad y>0;\quad x + y < b$$

che nel caso continuo (per un segmento) possono diventare $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq b$ includendo così anche i casi limite.

Se si interpretano le disequazioni precedenti nel piano cartesiano si conclude che la probabilità cercata è data dal rapporto tra l'area *A1* del triangolo rettangolo (indicato in arancio in Figura 3) e l'area *A* del triangolo rettangolo che ha i cateti di lunghezza *b*.

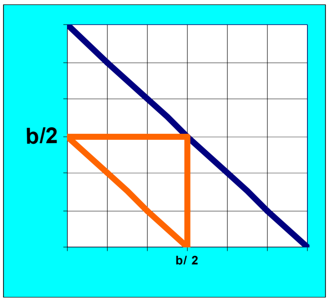


Figura 3

Se si indica con p la probabilità cercata, si ha:

$$p = A_1/A = 1/4$$

La risposta 1/4 non era assolutamente prevedibile!
Nel calcolo delle probabilità spesso le soluzioni dei problemi sono tutt'altro che intuitive e questo fatto ha una valenza didattica notevole soprattutto sul piano della motivazione.
Per aumentare il livello di astrazione si possono seguire due direzioni, aumentare:
a. il numero dei pezzi;
b. le condizioni sul tipo di triangolo.

<u>Caso a</u>
Se il segmento in questione si divide in quattro parti qual è la probabilità che si ottenga un quadrilatero?
Se il segmento si divide in cinque parti? …e in *n* parti?
Gli studenti, per rispondere, possono formulare congetture, pensando a un:
- grissino "ideale" che si può dividere in *n* parti;
- segmento divisibile all'infinito.

La discussione permetterà di consolidare la distinzione tra caso discreto (*grissino*) e caso continuo (*segmento*).

<u>Caso b</u>
Se la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo è 1/4, qual è la probabilità di ottenere un triangolo:
- equilatero?
- rettangolo?

<u>Triangolo equilatero:</u>

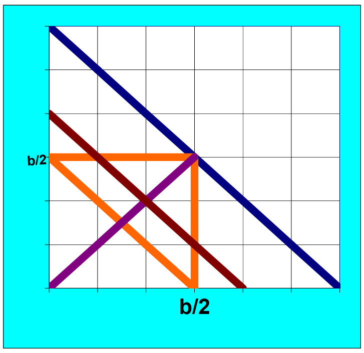


Figura 4

Il triangolo è equilatero se $x = y = b/3$
I casi favorevoli sono costituiti dal punto di intersezione (Figura 4) della bisettrice $y=x$ con la retta

$$x+y = 2/3\ b$$

Ne consegue che la probabilità di ottenere un triangolo equilatero dividendo a caso in tre parti un segmento è 0.
Questo non vuol dire che l'evento non si possa verificare!
Ma è un evento di probabilità nulla (come vincere alla lotteria)!

<u>Triangolo rettangolo:</u>
Dalla relazione Pitagorica:

$$x^2+y^2 = (b-x-y)^2$$

si perviene, con semplici calcoli, all'equazione:

$$y = \frac{b(x-\frac{b}{2})}{x-b}$$

che rappresenta, con i vincoli posti dal problema considerato, il ramo di iperbole disegnato azzurro in figura:

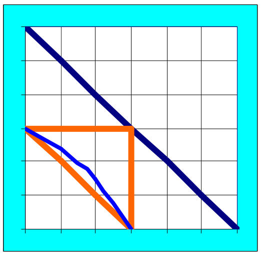


Figura 5

I casi favorevoli sono i punti del ramo di iperbole e i casi possibili sono sempre dati dall'area del triangolo rettangolo che ha per cateti b.
Se si suppone che si sia ottenuto un triangolo, per calcolare la probabilità che sia rettangolo, si deve tener conto che i casi favorevoli restano gli stessi mentre i casi possibili sono dati dall'area del triangolo rettangolo in arancio.
Quanto vale p?
Essendo l'area di un arco di curva uguale a zero la probabilità è in ogni caso 0.

<u>Osservazione</u>**:** Comprendere che una curva ha area 0 è un concetto che richiede una capacità di astrazione molto elevata.

Possibili sviluppi

- Il caso b può essere ulteriormente sviluppato cercando la probabilità che il triangolo sia ottusangolo. La probabilità è sempre un rapporto di aree in questo caso però, la sua valutazione quantitativa richiede la conoscenza del calcolo integrale (area di una figura a contorno curvilineo).

Area di un rettangolo: come cambia variando la lunghezza dei lati

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a contro-esempi. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare congetture, proprie o altrui, e teoremi. Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	<u>Argomentare</u>, <u>congetturare</u>, <u>dimostrare</u> Relazioni e funzioni Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Lingua italiana

Contesto
Figure geometriche e loro relazioni.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del secondo biennio in un contesto matematico in cui gli allievi sono stimolati a formulare congetture di fronte a una situazione problematica. Con esplorazioni successive, alcune di queste congetture saranno confutate, mentre quella corretta sarà corroborata. Rimane però da spiegare il *perché*, che non appare intuitivamente evidente. Solo il passaggio al linguaggio algebrico e alla sua traduzione grafica nel piano cartesiano permetterà di comprendere e dimostrare le ragioni per cui la congettura è vera.
Si userà sia il quadro algebrico che quello cartesiano: la lettura opportuna delle rappresentazioni usate permetterà un inquadramento teorico delle esplorazioni numeriche iniziali.
E' opportuno che gli studenti dapprima congetturino e facciano previsioni, successivamente esplorino esempi numerici concreti e, infine, utilizzando il linguaggio algebrico, esplicitino in forma matematicamente compiuta la proprietà studiata.
L'attività può essere affrontata con una conoscenza preliminare del piano cartesiano, della parabola e dell'iperbole equilatera come funzioni.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Presentazione del problema.
Si consideri un rettangolo; come varia la sua area se un lato diminuisce del 10% e l'altro aumenta del 10%?

Possibili risposte degli studenti:
- l'area non cambia,
- dipende da quale lato (il maggiore o il minore) aumenta/diminuisce ….

L'insegnante invita gli studenti a fare degli esempi. I calcoli mostrano che c'è sempre una diminuzione dell'area. Di quanto diminuisce? Di poco, di tanto?
Il lavoro degli studenti, opportunamente guidato dall'insegnante, si precisa via via, definendo i termini del problema in forma sempre più netta.
È solo con il ricorso al linguaggio algebrico che il problema può essere interpretato in forma chiara e incontrovertibile:
se le dimensioni dei lati del rettangolo di partenza sono a e b, le dimensioni del secondo rettangolo sono $1{,}1a$ e $0{,}9b$; e *l'area* vale quindi:

$$1{,}1a \cdot 0{,}9b = 0{,}99ab$$

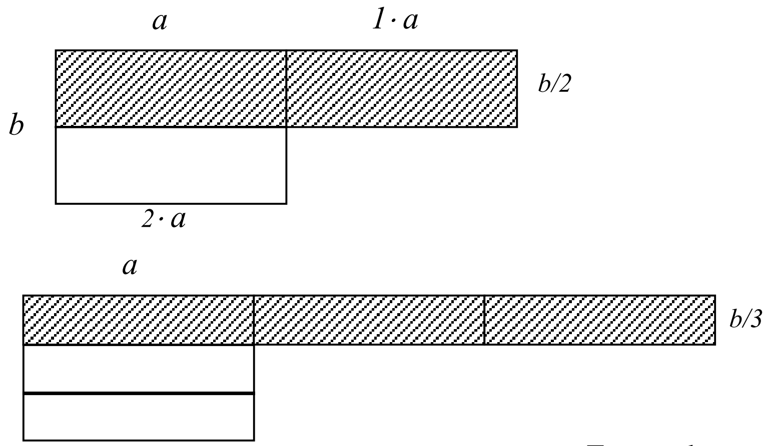
cioè diminuisce dell'1%.

<u>Seconda fase</u>
Generalizzazione del problema.
La seguente generalizzazione è occasione di discussione fra gli studenti sulle varie strategie risolutive.
I lati, di misura a e b, di un rettangolo vengono incrementati, uno secondo un fattore h (cioè a diventa $a+h\cdot a$) e un altro secondo un fattore k (cioè b diventa $b+k\cdot b$).
Come varia l'area del rettangolo?

Il problema ha senso per $h > -1$ e $k > -1$, perché per h e k uguali a -1 le dimensioni del rettangolo si ridurrebbero a zero.
L'area aumenta se h e k sono entrambi positivi.
Ha senso, invece, porsi il problema per h e k discordi.

Possibili approcci risolutivi al problema
- Esplorazione grafica

L'alunno può provare a raddoppiare, triplicare, ecc., un lato ed osservare che l'area resta invariata se l'altro lato viene dimezzato, diventa un terzo del lato iniziale, ecc.
Quindi l'area aumenta solo se il secondo lato diminuisce meno della metà, meno dei 2/3 , ecc.



$h = 1$
$k = -1/2$
$(k>-1/2)$

$h = 2$
$k = -2/3$
$(k>-2/3)$

Figura 1

- Esplorazione numerica

L'alunno può costruire una tabella di valori, eventualmente tramite l'uso di un foglio elettronico, attribuendo diversi valori agli elementi del problema (può far variare tutti gli elementi, oppure può rendersi conto che la soluzione è indipendente dalle dimensioni iniziali del rettangolo; ancora, può accorgersi che il problema è simmetrico e far variare solo uno tra h e k).
Entrambe le esplorazioni possono sfociare, poi, in un

- Approccio algebrico

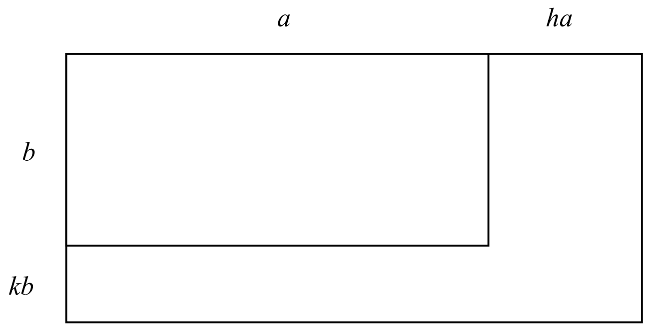


Figura 2

Dette A ed A' rispettivamente l'area del rettangolo dato e l'area del rettangolo i cui lati sono stati incrementati, in generale è $A' > A$ se:

$$(a + ha)(b + kb) > ab$$

cioè se:

$$a(1 + h)b(1 + k) > ab$$

da cui si ricavano le seguenti disuguaglianze:

$$(1 + h)(1 + k) > 1, \quad h + k + hk > 0, \quad k(h + 1) > -h,$$

ed essendo $h > -1$, si ha $k > -\dfrac{h}{h+1}$.
E' interessante osservare, cosa generalmente non banale per gli studenti, che nella formula

$$(1 + h)(1 + k)$$

che esprime il rapporto tra le aree, h, k possono essere negativi.
Le condizioni trovate, $k > -\dfrac{h}{h+1}$, $h > -1$, possono essere interpretate graficamente in un riferimento cartesiano Ohk come la parte di piano "sovrastante" un opportuno arco di iperbole equilatera.

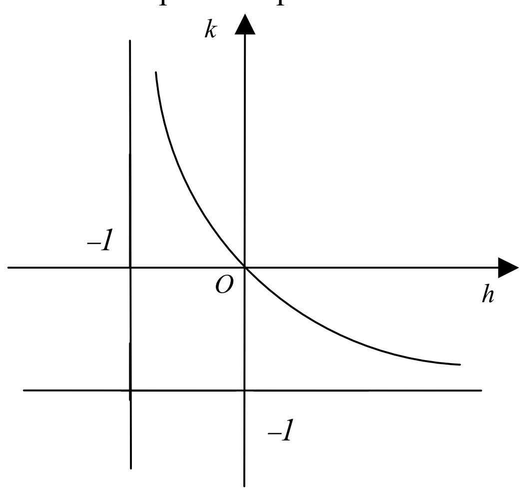


Figura 3

Possibili sviluppi

Si aggiunge un vincolo al problema precedente, per esempio la condizione $h + k = c$ con c reale fissato.

Cosa succede per c=0?

Per quali valori di h e k si ottiene il massimo incremento dell'area?

Il rapporto tra le aree, cioè l'incremento relativo, si può esprimere in funzione di c, sostituendo, per esempio, $k = c - h$, $\frac{A}{A'} = 1 + c + h(c - h)$.

Studiando il grafico (Figura 4) di tale funzione, $y = (1 + c) + ch - h^2$, si trova il massimo per

$$h = k = c/2.$$

Si osserva che un analogo metodo può essere applicato allo studio della propagazione degli errori nel prodotto (cfr. nucleo Misurare).

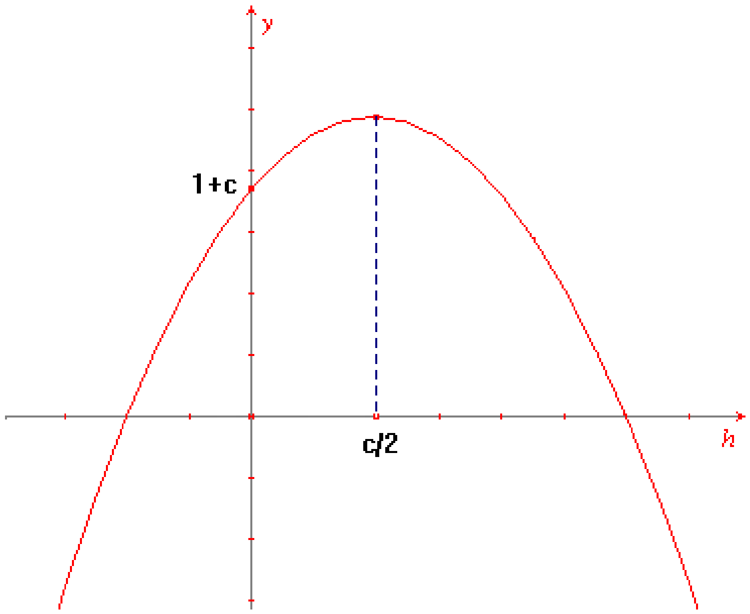


Figura 4

Tasselli del domino e induzione

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. Applicare in semplici casi il principio d'induzione. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazione.	Schemi di ragionamento.	Argomentare, congetturare, dimostrare Numeri e algoritmi Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Ragionamenti combinatori.

L'attività è consigliata per la seconda classe del secondo biennio.
Quali prerequisiti?
Quali obiettivi?
Quali strumenti?
L'induzione matematica rappresenta un'elaborazione molto astratta di forme di ragionamento più intuitive, ma meno complete. Come tale essa rappresenta una sistemazione "matura" e rigorosa di conoscenze acquisite precedentemente in forma intuitiva e quasi empirica.
Il seguente esempio illustra bene la questione.

E' noto che la somma dei primi n naturali vale $\frac{n(n+1)}{2}$.

Vi sono vari modi per comprendere il perché di questa formula
Il primo è *visivo* ed è illustrato dalla Figura 1, che non richiede parole:

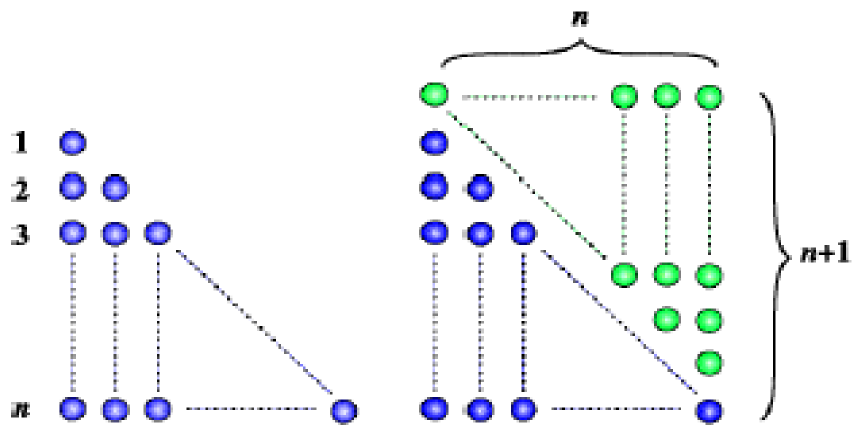


Figura 1

Il secondo risulta dalle seguenti due diverse scritture per la somma cercata:

$$1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \quad 3 \quad + \quad 2 \; + 1$$

Sommando le coppie di termini in colonna, si ottiene n volte la somma $(n+1)$, cioè il valore $n(n+1)$, pari al doppio della somma cercata.
A livello intuitivo le due "dimostrazioni" (che sono in realtà la stessa dimostrazione, la prima con i "pallini" usati quali unità per rappresentare numeri generici, la seconda con le lettere dell'algebra che adempiono alla stessa funzione) sono convincenti, ma non esenti da critiche. Quella più seria riguarda la presenza dei "puntini" in entrambe: mentre i pallini e a maggior ragione le lettere possono trovare una traduzione rigorosa nel linguaggio matematico, non è così per i puntini di sospensione. Per superare questo scoglio i matematici ricorrono all'induzione matematica.
Tale metodo dimostrativo si è affermato solo in tempi relativamente recenti. Il primo a usarla in forma precisa, a quanto pare, è stato Pascal per dimostrare la celebre formula sul binomio che porta anche il suo nome. Solo con Dedekind e Peano[1] il metodo di dimostrazione per induzione è stato compreso e sistemato in modo completo, evidenziandone il carattere fondante della struttura dei numeri naturali.
Si tratta di un metodo molto astratto e "delicato", cui si può giungere alla fine di un percorso didattico in cui gli studenti abbiano fatto esperienza di esplorazioni numeriche nella ricerca di regolarità e si siano abituati a formulare congetture sulle medesime, cercandone delle "dimostrazioni" intuitive. Tale metodo dimostrativo può acquistare concretezza affrontando le definizioni di successioni per ricorrenza in ambienti informatici, ad esempio il fattoriale o la successione di Fibonacci: il supporto tecnologico può costituire un formidabile strumento di mediazione.
Le dimostrazioni per induzione rappresentano la sistemazione rigorosa di tutto il percorso.

Descrizione dell'attività

Prima fase

Viene proposto alla classe di risolvere individualmente (le soluzioni trovate vengono poi discusse collettivamente) il seguente problema:

Provare che una scacchiera da dama con $2^n \times 2^n$ *quadrati* (*o celle*) *dalla quale un quadrato angolare è stato rimosso, può essere ricoperta esattamente da "trimini"* come in Figura 2.

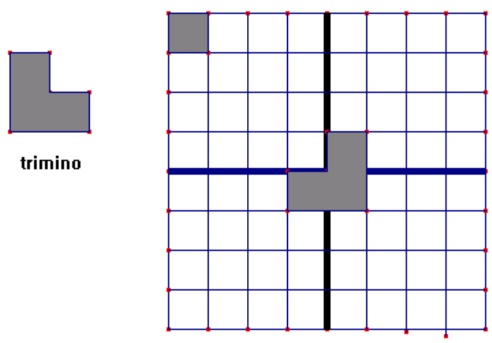


Figura 2

[1] Il principio di induzione è così formulato: se una proprietà P(n) vale per n=0 e, supposto che, ogniqualvolta vale per k, allora vale anche per k+1, ne segue che la proprietà vale per ogni naturale n.

Gli studenti vengono invitati ad esplorare i casi $n = 2, 3, 4$. Ci si rende conto che conviene mettere il trimino al centro della scacchiera come indicato in Figura 2.

La strategia suggerita dalle esplorazioni è la seguente per il caso generico $2^n \times 2^n$: suddividere la scacchiera in quattro grandi quadrati uguali, ciascuno con $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ celle; si pone un singolo pezzo (un "trimino") al centro della scacchiera come in Figura 2. Risulta così ricoperta esattamente una cella in ciascuno dei tre quadrati in cui non è stata tolta la cella. Si ricade così nella situazione in cui si hanno quattro scacchiere $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ e da ciascuna è stata tolta una cella. Quindi la soluzione relativa alla scacchiera $2^n \times 2^n$ è ricondotta al caso precedente, cioè la scacchiera $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Seconda fase

Si propone di trovare la somma dei primi *n+1* numeri dispari:

$$1+3+5+\dots\dots\dots\dots+(2n+1)$$

Può essere utile disegnare la seguente Figura 3 (una dimostrazione "visuale") che fornisce una previsione del risultato:

$$1+3+5+\dots\dots\dots\dots+(2n+1) = (n+1)^2$$

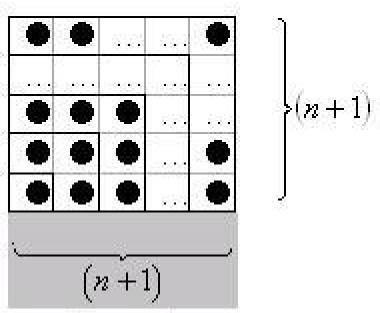


Figura 3

A questo punto l'insegnante propone la dimostrazione per induzione che la somma dei primi $n+1$ numeri dispari sia $(n+1)^2$.

Terza fase

Numeri di Fibonacci con il domino.

Problema: *In quanti modi si può ricoprire una scacchiera* $2 \times n$ *con tasselli di domino* 2×1?

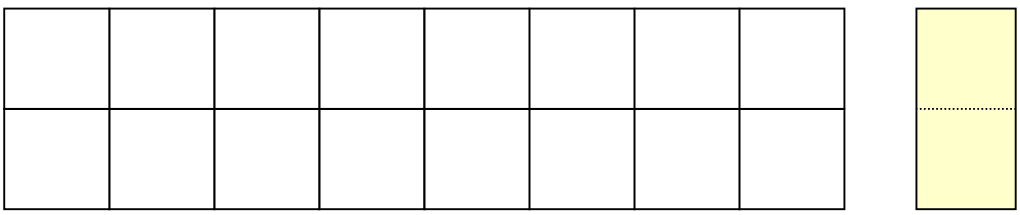


Figura 4

Gli studenti esplorano concretamente la situazione proposta; si suggerisce loro di organizzare il ricoprimento secondo le due seguenti strategie:

1ª strategia - il ricoprimento inizia come in figura 5

2ª strategia - il ricoprimento inizia come in figura 6

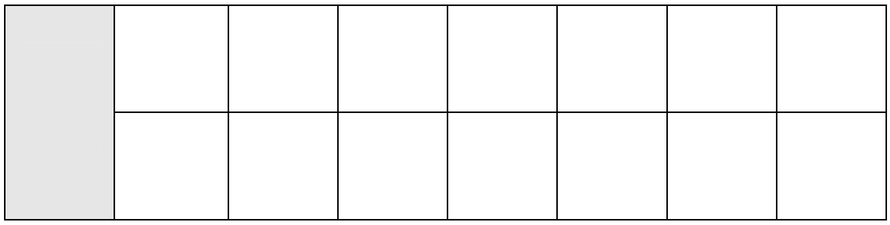


Figura 5

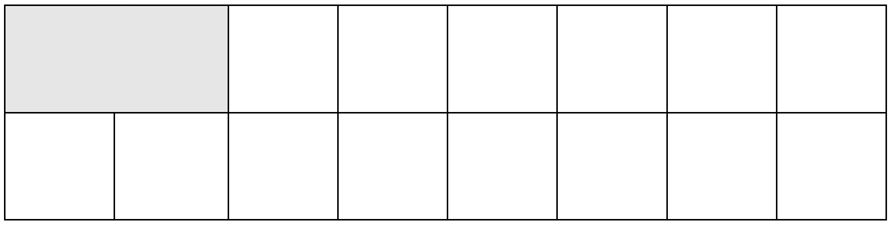


Figura 6

Nel primo caso ci si riconduce a dover risolvere il problema per una scacchiera $2 \times (n-1)$ con tasselli di domino 2×1.
Nel secondo caso ci si riconduce a dover risolvere il problema per una scacchiera $2 \times (n-2)$ con tasselli di domino 2×1.
Se il numero di modi cercato è indicato con T_n , allora nel primo caso ci si riconduce a risolvere il problema di determinare T_{n-1} e nel secondo caso il problema T_{n-2}. Poiché i due casi sono disgiunti, abbiamo che $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$, con $T_1 = 1$ e $T_2 = 2$

L'introduzione dei numeri di Fibonacci è l'occasione per far ricavare agli studenti la regola per doppia ricorrenza: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ che definisce la successione una volta assegnati i valori iniziali $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$.

Possibili sviluppi
Come ulteriore sviluppo si può implementare questa regola in un foglio elettronico oppure in una calcolatrice programmabile.

Elementi di prove di verifica

1. Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza che esprime la somma dei primi n quadrati

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza che esprime la somma di una serie (serie di Mengoli):

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F., Barbero, R., Desantis, L., Tartaglione, A., *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Morano, Napoli, 1992.

Bernardi, C., *L'uso delle lettere in algebra e in logica*, Quaderni MPI n. 7, 1994

Bernardi, C., *Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della e*, Progetto Alice, vol. 1° , 2000.

Boyer, C.B., *Storia della matematica*, Introduzione di L. Lombardo Radice, Milano, Arnoldo Mondadori, 1980

Campedelli, L., *Fantasia e logica nella matematica*, Milano, Feltrinelli, 1966

F. M. Dellisanti - *Congetture sui Numeri primi – aspetti semantici e matematici,*. Una esperienza nella scuola dell'Autonomia - IPSIA "Archimede" - Barletta, a. s. 1999-00.

D. Di Sorbo, *La persuasione e la retorica sul ramo dell'iperbole*, da *Sotto il segno di Michelstaedter*, a cura di Toni Iermano, Avellino, Periferia, 1995

Hofstadter, D.R., *Godel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi, 1984.

Jakobson, R., *Saggi di linguistica generale*, Milano, Feltrinelli, 1966, p. 57

H. Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico*, introduzione di L. Lombardo Radice, Torino, Boringhieri, 1973

D. Paola - *Un'esperienza di insegnamento dell'algebra in una prima liceo classico sperimentale*, Atti del V Convegno Internuclei per la Scuola Secondaria Superiore a cura di Luciana Bazzini.

G. Prodi - *Matematica come scoperta* Vol. 1° Ed. G. D'Anna.

Queneau, R., *Esercizi di stile*, Torino, Einaudi, 1992

Russell, B. *Introduzione alla filosofia matematica*, introduzione di Flavio Manieri, Perugia, Newton Compton Italia, 1971

Siti Web (2003)

http://utenti.lycos.it/mate_fisica/matematica/presentazione.htm
http://www.geocities.com/congetture/congetture.htm
http://www.geocities.com/congetture/teoria-numeri.htm
http://www.geocities.com/congetture/altro.htm