

## Arrivare a scuola

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Comprendere la differenza fra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e continui.  Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche.	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere.  Frequenze assolute, relative, percentuali.  Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze.	<u>Dati e previsioni</u>  Spazio e figure  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Lingua italiana

### Contesto

Extramatematico, sociale.

Il contesto di questa attività è di tipo extramatematico, in particolare riguarda l'ambito sociale.

Questa unità riguarda l'"arrivare a scuola". L'attività prevede la problematizzazione delle situazioni, la predisposizione del questionario, la raccolta dei dati, la loro elaborazione e rappresentazione grafica, la loro interpretazione.

Questa attività è consigliata nel 1° biennio, come uno dei possibili approcci al nucleo, in raccordo con quanto sviluppato nella scuola secondaria di primo grado. Il contesto è extramatematico e si basa sull'esperienza della vita quotidiana, ponendo i ragazzi di fronte all'analisi di problemi concreti.

### Descrizione dell'attività

Rendere protagonisti gli studenti, con tematiche che li coinvolgono in prima persona, si è mostrato una metodologia vincente sotto l'aspetto della motivazione. Qui si propone un tema già largamente sperimentato nella scuola superiore: "l'arrivare a scuola".

L'argomento si presta per affrontare il problema del trasporto in cui tutti gli studenti sono coinvolti. Nel caso in cui l'indagine riguardi tutto l'istituto, il momento della restituzione dei dati potrà, ad esempio, avviare un dibattito sul tema dei ritardi nell'ambito dell'assemblea degli studenti.

### Prima fase

Per accertare la conoscenza da parte degli allievi dei concetti di unità statistica, di collettivo statistico, come insieme delle unità indagate, di carattere e sue modalità, l'insegnante propone una attività di gruppo, chiedendo agli studenti di preparare una o più schede di lavoro sulla distinzione tra unità statistica, carattere e modalità. Per saggiare la conoscenza degli studenti con riferimento alla individuazione delle diverse tipologie di carattere il docente può sottoporli a prove di verifica (si vedano le proposte in fondo all'unità).

### Seconda fase

Nel presupposto che il questionario sia lo strumento più adatto per raccogliere i dati, l'insegnante propone una attività di gruppo finalizzata alla sua preparazione.

I questionari costruiti dai ragazzi sono poi confrontati e discussi per fare emergere una versione definitiva, completa e corretta.

L'attenzione viene focalizzata, in particolare, sulla necessità di porre domande semplici, chiare e precise in modo da evitare che una domanda possa essere interpretata in modi diversi o risulti non completa nella sua formulazione.

E' preferibile che le domande siano a risposta chiusa, in modo che le alternative di risposta siano previste in anticipo; quando non è possibile individuarle tutte si introduce la modalità "altro".

Si consiglia di limitare le domande a risposta aperta a quando si richiede un parere personale. Perché i dati abbiano la stessa natura e siano confrontabili, occorre riferirsi ad opportune unità di misura. In questo caso particolare, ad esempio, l'unità di misura è necessaria con riferimento a: il tempo necessario per effettuare il percorso casa-scuola e il momento in cui ci si alza al mattino. Dato che il tempo è un carattere quantitativo continuo le domande che lo riguardano vengono espresse in intervalli. In questo modo è possibile tenere conto anche dell'errore di approssimazione da cui le misure sono affette.

Con riferimento al tempo abitualmente impiegato per arrivare a scuola, si è deciso di utilizzare la classificazione proposta dall'ISTAT nella scheda del censimento della popolazione. Ad eccezione della prima e dell'ultima classe, ciò significa utilizzare classi chiuse sia a destra sia a sinistra; con la conseguenza che ogni estremo viene inteso come il punto centrale di un intervallo di ampiezza unitaria. Rispetto al "momento" in cui ci si alza al mattino, si considera che si alzi alle 6.29 chi lo fa tra le 6.29.00 e le 6.29.59.

L'attenzione alla formulazione del questionario può costituire un utile momento di interdisciplinarietà, in particolare con il collega di italiano.

L'insegnante orienta la discussione in modo che vengano prescelte le domande che soddisfano le finalità conoscitive del fenomeno e contemporaneamente in modo che siano presenti caratteri di tipo qualitativo, sconnesso e ordinato, e quantitativo, discreto e continuo, con l'obiettivo di mettere in evidenza il diverso trattamento dei dati a seconda del tipo di carattere.

Per collaudare il questionario predisposto, in analogia con le procedure usualmente adottate nelle indagini statistiche, risulta opportuno provare il questionario in un'altra classe.

Effettuata la somministrazione pilota ed apportate le eventuali modifiche si ottiene il questionario definitivo col quale eseguire l'indagine. Di seguito si fornisce un esempio di questionario frutto di un'attività realmente effettuata in un istituto scolastico superiore.

### Sezione 1: Dati relativi al rispondente

Domanda 1: Qual è la tua età (in anni compiuti)?

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Meno di 14 | <input type="checkbox"/> 17        |
| <input type="checkbox"/> 14         | <input type="checkbox"/> 18        |
| <input type="checkbox"/> 15         | <input type="checkbox"/> 19        |
| <input type="checkbox"/> 16         | <input type="checkbox"/> più di 19 |

Domanda 2: Sesso

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Femmina | <input type="checkbox"/> Maschio |
|----------------------------------|----------------------------------|

Domanda 3: Qual è il tuo comune di residenza?

---

Domanda 4: Quale classe stai frequentando?

- Prima
- Seconda
- Terza
- Quarta
- Quinta

### Sezione 2: Andare a scuola

Domanda 5: A che ora ti alzi abitualmente il mattino per venire a scuola?

- Prima delle 6.00
- Dalle 6.00 alle 6.29
- Dalle 6.30 alle 6.59
- Dalle 7.00 alle 7.29
- Dalle 7.30 in poi

Domanda 6: Con quale tipo di mezzo abitualmente raggiungi la scuola?

- A piedi
- Solo con mezzi privati (bicicletta, motorino, automobile,...)
- Solo con i mezzi pubblici (bus urbano e/o extraurbano, treno,...)
- Con mezzi sia privati che pubblici

Domanda 7: Quanto tempo impieghi abitualmente per arrivare a scuola, partendo da casa?

- Fino a 15 min.
- Da 16 a 30 min.
- Da 31 a 45 min.
- Da 46 a 60 min.
- Oltre 60 min.

Domanda 8: Abitualmente arrivi a scuola in orario?

- Sì
- No

### Terza fase

Una volta somministrato il questionario, è necessario elaborare i dati. Si ritiene utile, a questo livello scolastico, procedere allo spoglio manuale di un adeguato numero di questionari per mettere in evidenza la difficoltà dell'operazione e il rischio, in questa fase molto delicata, di introdurre degli errori sia di lettura che di registrazione.

Si propone di utilizzare schemi di spoglio del tipo di Tabella 1 e di Tabella 2.

Qui, come nei prossimi esempi i dati riguardano un'indagine condotta presso alcune classi prime dell' I.T.C.S. "G. Salvemini" di Casalecchio di Reno (BO), nel febbraio 2003.

Prospetto di spoglio: carattere "Età"

Età in anni compiuti	Spoglio	N. studenti
14 anni	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	61
15 anni	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	26
16 anni	<input type="checkbox"/>	3
Totale		90

Tabella 1

Prospetto di spoglio dei caratteri: "Sesso" e "Puntualità"

Sesso	Puntualità		Tot
	Sì	No	
F	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		61
M	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		29
Totale	84	6	90

Tabella 2

E' fondamentale nel presentare i dati in forma tabellare inserire il titolo, indicando nell'ordine due elementi "chiave" che danno senso all'analisi: la definizione del collettivo statistico in esame e l'indicazione del carattere secondo il quale si sta effettuando lo studio del collettivo stesso. L'esigenza che entrambe le indicazioni siano esatte e sintetiche può rendere difficile sia la predisposizione del titolo della tabella che si sta costruendo, sia la comprensione di dati acquisiti già in forma tabellare.

L'operazione di spoglio effettuata produce rispettivamente la Tabella 3 e la Tabella 5a. La prima contiene una distribuzione statistica secondo un solo carattere (distribuzione semplice), la seconda una distribuzione statistica contemporaneamente secondo due caratteri (distribuzione doppia).

#### Quarta fase

L'insegnante propone di esaminare in dettaglio le risposte ad alcune domande.

Rispetto all'età:

Studenti della classe prima dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"  
per età (in anni compiuti)  
(7 febbraio 2003)

Età (in anni compiuti)	N° studenti
14	61
15	26
16	3

Totale	90
--------	----

Tabella 3

Qual età è la più frequente? (*moda* = 14 anni) Qual è l'età minima? Qual è l'età massima?  
 Se ci si vuole confrontare con la prima classe di un liceo scientifico vicino, è possibile utilizzare la tabella ottenuta? La risposta dipende dal fatto se le due scuole hanno lo stesso numero di studenti iscritti alla classe prima, se così non fosse occorrerà ricorrere al calcolo delle frequenze relative, o a quelle percentuali, di entrambe le tabelle, che diventeranno in tal modo commensurabili.

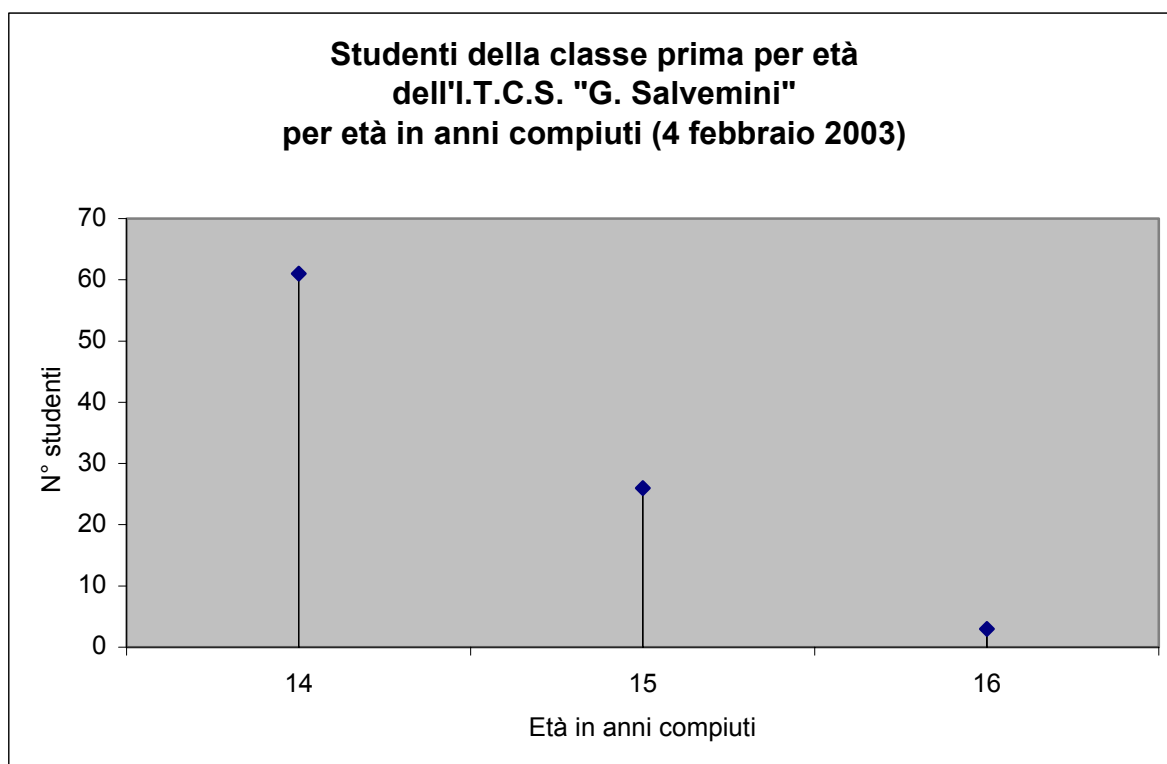


Figura 1

Dovendo costruire la rappresentazione grafica quale tipo di grafico è più opportuno? L'insegnante apre la discussione cercando di condurre gli studenti ad osservare che, essendo il carattere quantitativo discreto, la coppia ordinata (modalità, frequenza) individua un punto del piano cartesiano, con ciò consentendo la costruzione di un diagramma ad aste.

Ogni asta è proporzionale alla frequenza della corrispondente modalità del carattere.

Rispetto al tempo abituale di percorrenza casa scuola:

Studenti della classe prima dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"  
per tempo abituale di percorrenza casa-scuola  
(7 febbraio 2003)

Tempo di percorrenza (min.)	N° studenti
fino a 15 min.	30
da 16 a 30 min.	24
da 31 a 45 min.	30
da 46 a 60 min.	5
oltre i 60 min.	1
Totale	90

Tabella 4

Nella tabella che classifica gli studenti rispetto ai tempi di percorrenza si può effettuare una rappresentazione grafica ad aste? Sì? No? Perché?

Si ritrovano le stesse condizioni della tabella precedente? In effetti ora si ha a disposizione la coppia ordinata (intervallo, frequenza), non è quindi più possibile costruire un grafico ad aste.

Occorre fare una nuova ipotesi di lavoro: la frequenza viene rappresentata mediante un rettangolo in cui la base rappresenta l'intervallo e l'altezza la densità di frequenza (tale concetto potrà essere opportunamente approfondito ed utilizzato in seguito).

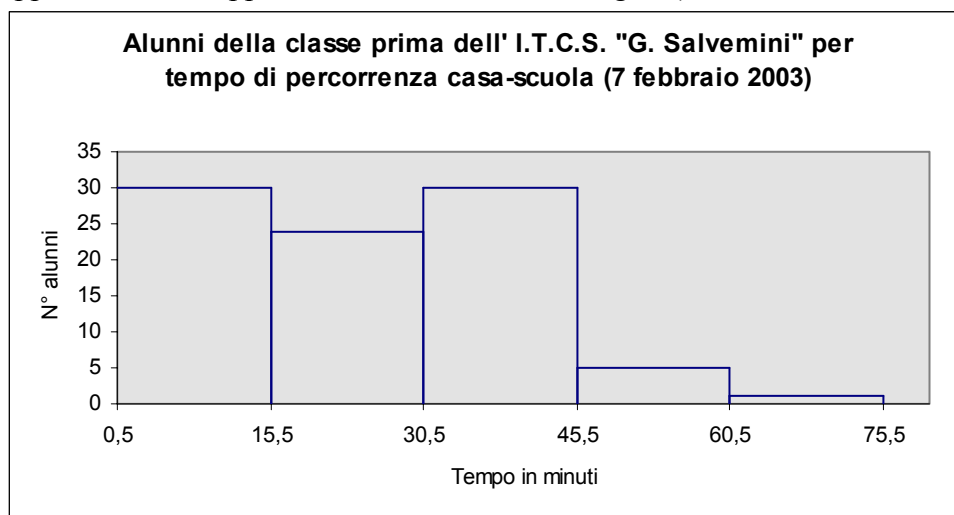


Figura 2

Inoltre occorre procedere ad una modifica degli estremi di ogni intervallo; ciò è possibile considerando l'approssimazione delle misure sicché gli intervalli modificati sono: 0,5 - 15,5; 15,5 - 30,5; 30,5 - 45,5; 45,5 - 60,5; 60,5 - 75,5. Si è in questo modo risolto anche il problema del primo e dell'ultimo intervallo che in origine erano aperti e che sono stati chiusi rispettivamente a sinistra con 0,5 e a destra con 75,5. Gli estremi di sinistra e di destra sono stati scelti in modo da mantenere invariata l'ampiezza degli intervalli. A questo punto l'insegnante, dopo aver osservato che le aree di due rettangoli di uguale base sono proporzionali alle rispettive altezze, porta gli studenti a costruire l'**istogramma** di frequenze di Figura 2.

Contemporaneamente rispetto al sesso e alla puntualità:

Studenti della classe prima  
dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"  
per sesso e puntualità  
(7 febbraio 2003)

Sesso	Puntualità		
	Sì	No	
Femmine	55	6	61
Maschi	29	0	29
Totale	84	6	90

Tabella 5a

Studenti della classe prima  
dell'I.T.C.S. "G. Salvemini"  
per sesso e puntualità (dati in percentuale)  
(7 febbraio 2003)

Sesso	Puntualità		
	Sì	No	
Femmine	90,2	9,8	100
Maschi	100	0	100
Totale	93,3	6,7	100

Tabella 5b

Lo scopo dell'indagine è volta anche a capire come gli studenti rispettano l'orario d'ingresso a scuola. Può essere che il sesso abbia influenza sul comportamento di questi studenti?

Guardando la tabella c'è differenza fra il comportamento dei maschi e quello delle femmine? Può essere utile calcolare le frequenze percentuali di riga?

I dati nel loro complesso possono meravigliare per l'alta percentuale di studenti che dichiara di arrivare abitualmente in orario. Gli studenti hanno "barato"? Ci sono stati errori di rilevazione o di spoglio? C'è qualche motivo per questo comportamento "virtuoso"? Un docente della scuola richiesto di giustificare questi dati informa che la scuola effettua un rigido controllo sui ritardi.

### Possibili sviluppi

In modo analogo si possono costruire le distribuzioni degli altri caratteri facendo attenzione a che le rappresentazioni grafiche siano adeguate per ogni tipo di carattere. Grafici a settori circolari grafici, a colonne e grafici a nastro sono adatti per caratteri qualitativi; istogrammi a basi uguali sono adatti per caratteri qualitativi ordinati. Sarà poi cura dell'insegnante condurre gli studenti ad interpretare i dati elaborati.

### Elementi di prove di verifica

*Individua la risposta corretta fra quelle proposte, barrando la relativa lettera.*

#### 1. Qual è la definizione corretta di **carattere statistico**?

- a) Un aspetto di una determinata entità, che può essere misurato o classificato
- b) Un gruppo di unità omogenee per qualità
- c) La misura dell'altezza di un individuo espressa in centimetri
- d) La manifestazione di un giudizio su una unità statistica

#### 2. Quale tra le seguenti è la definizione corretta di **unità statistica**?

- a) Sono le entità che formano un collettivo
- b) Il sesso degli individui che formano un collettivo
- c) Un collettivo di unità statistiche a cui rivolgere l'indagine
- d) Una popolazione che può essere classificata o misurata sotto vari aspetti

#### 3. Fra i seguenti distingui quali sono **caratteri statistici**:

- |  |    |    |
|--|----|----|
| a) Sesso di un individuo               | Sì | No |
| b) Reddito di una persona              | Sì | No |
| c) Campione                            | Sì | No |
| d) Famiglia                            | Sì | No |
| e) Azienda                             | Sì | No |
| f) Numero di dipendenti di una azienda | Sì | No |
| g) Valutazione di un esame             | Sì | No |
| h) Perimetro toracico                  | Sì | No |
| i) Colore dei capelli                  | Sì | No |
| l) Regioni di uno Stato                | Sì | No |
| m) L'insieme delle città italiane      | Sì | No |

#### 4. Tra quelli che hai individuato come caratteri, indica quali sono **qualitativi** e quali **quantitativi**

Caratteri qualitativi	Caratteri quantitativi

5. Per ciascuno fra i seguenti caratteri statistici, indica di quale tipo si tratta, scegliendo fra: **qualitativo sconnesso**, **qualitativo ordinato**, **quantitativo discreto**, **quantitativo continuo**. Spiega la tua risposta.

a) Età

---

b) Numero degli elettori alle elezioni politiche

---

c) Sesso

---

d) Statura

---

e) Reddito annuo di una persona

---

f) Temperatura rilevata in una certa ora della giornata

---

g) Professione di un individuo

---

**Griglia di correzione**

1. a
2. d
3. a, b, f, g, h, i

## Grafico ... è bello

**Livello scolastico:** 1° biennio

<b>Abilità interessate</b>	<b>Conoscenze</b>	<b>Nuclei coinvolti</b>	<b>Collegamenti esterni</b>
Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche.	Frequenze assolute, relative, percentuali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. Serie storiche e loro rappresentazioni.	<u>Dati e previsioni</u>  Spazio e figure  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Lingua italiana, storia ed educazione civica

### Contesto

Distribuzioni semplici, grafici.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito statistico (distribuzione semplice e rappresentazioni grafiche) con aspetti extramatematici in quanto si basa su un'attività interdisciplinare con la storia e l'educazione civica, nella quale gli studenti si trovano di fronte a problemi di rappresentazione di dati che riguardano il "Processo di industrializzazione nella seconda metà dell'Ottocento".

### Descrizione dell'attività

In accordo con il gruppo interdisciplinare che tratta questo modulo, relativamente alla parte di matematica, l'insegnante fa precedere all'esame delle tabelle che riguardano l'argomento di storia, alcune riflessioni su una tabella riguardante l'andamento degli iscritti alla classe prima in un istituto tecnico. In particolare propone la Tabella 1.

Andamento degli iscritti alla classe prima in un istituto superiore

anno	Iscritti
1993	216
1994	171
1995	204
1996	260
1997	247
1998	273
1999	281
2000	307
2001	324

*Tabella 1*

Successivamente si presentano la Tabella 2 e la Tabella 3 che riguardano l'attività interdisciplinare.

## Percentuale della popolazione agricola sulla popolazione attiva

Anni	Gran Bretagna	Francia	Stati tedeschi	U.S.A.
1850	22	64	65	65
1870	15	49	49	50
1910	6	42	18	33

Tabella 2

## Scambi internazionali nel 1914

Tra paesi europei	40
Da paesi non europei a paesi europei	21,5
Da paesi europei a paesi non europei	15,5
Tra paesi non europei	23
Totale	100

Tabella 3

La lettura dei dati delle tre tabelle comporta difficoltà crescenti, particolarmente per quelli di Tabella 3. Perché i dati non sono facilmente leggibili? Cosa manca nella Tabella 3? L'insegnante chiede agli studenti l'individuazione di un modo efficace per la loro lettura ed interpretazione e li conduce a rendersi conto che un grafico, non meno della parola, di uno scritto, consente una comunicazione efficace dei risultati di un'indagine, di uno studio su un problema sociale, ecc. I grafici consentono infatti di comunicare, comprendere, analizzare, riassumere, confrontare e visualizzare subito tutto! Tuttavia occorre imparare ad usare e non ad abusare dei grafici. I prerequisiti minimi per la costruzione dei grafici sono: piano cartesiano, proporzioni, percentuali.

Prima fase

L'insegnante induce gli studenti ad osservare che i dati della Tabella 1 riguardano la serie storica delle iscrizioni nella classe iniziale di una scuola mentre quelli della Tabella 2 riguardano serie storiche riferite a più paesi. Si tratta di distribuzioni? Sì, no, perché?

La tabella 3 è o non è una distribuzione? Sì, no e perché? Ha un titolo completo?

I dati contenuti nelle tabelle sono dati direttamente osservati o derivano da un'elaborazione?

L'insegnante guida gli studenti a scrivere il rapporto che dà origine a ciascuno dei dati della Tabella 2 e confronta tale procedimento con quello che dà origine ai dati di Tabella 3.

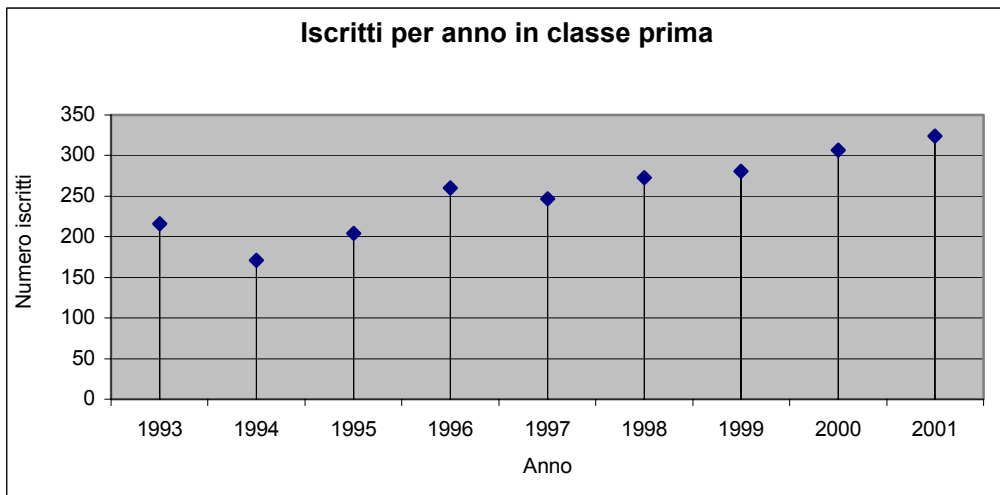
L'insegnante illustra agli studenti le caratteristiche dei principali strumenti di rappresentazione grafica utilizzabili in questo contesto ed il ruolo che in essi ha l'asse orizzontale. Dipende dal tipo di modalità osservate? E' solo una base di appoggio o deve avere una scala? In particolare, analizza le caratteristiche del grafico a settori circolari e dei grafici a colonne.

Seconda fase

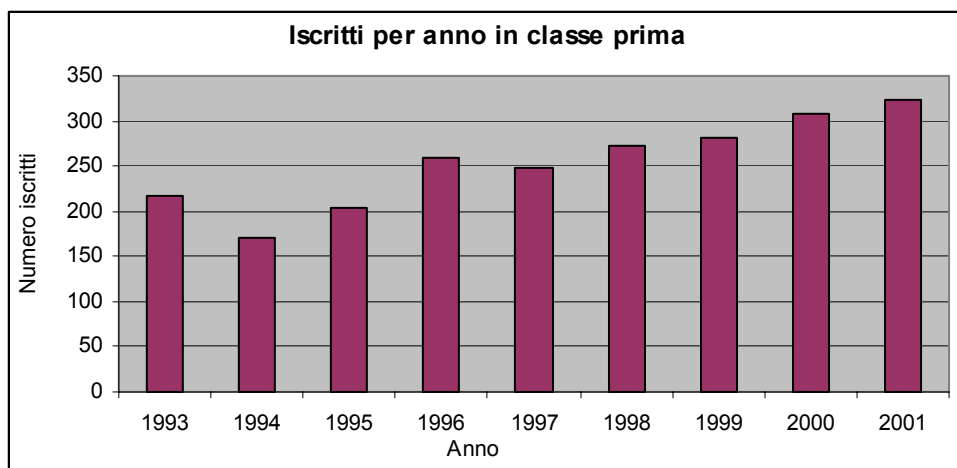
Ogni studente partendo dalle tabelle iniziali produce il grafico che ritiene più opportuno, utilizzando i mezzi che ha a propria disposizione (carta, compasso e matita, calcolatore).

Terza fase

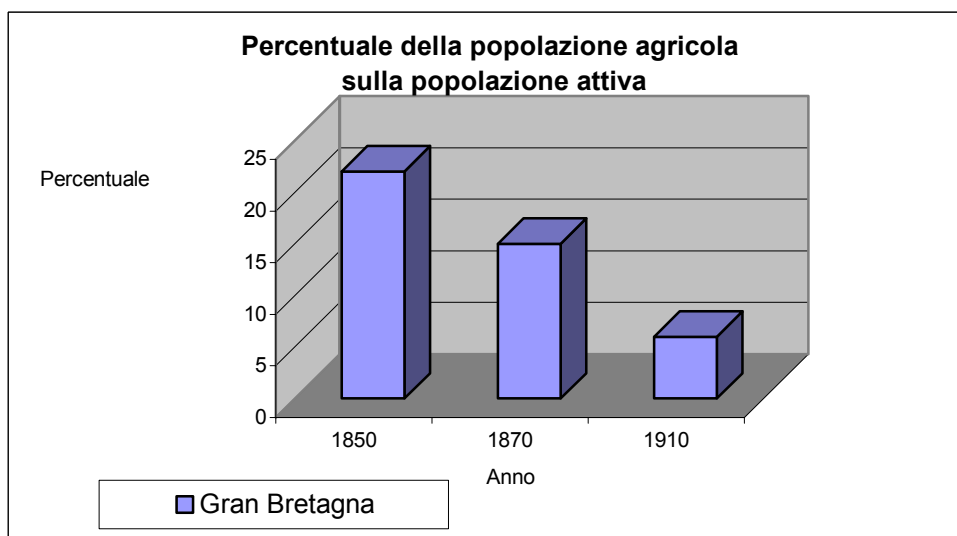
L'insegnante discute con gli studenti i grafici che hanno elaborato. Nel prosieguo dell'unità vengono riportati i lavori prodotti da studenti di una prima classe di un istituto superiore. In particolare, disponendo di un Foglio elettronico Excel, vi sono stati studenti che hanno scelto grafici, alcuni dei quali sono particolarmente suggestivi, anche se non privi di errori.



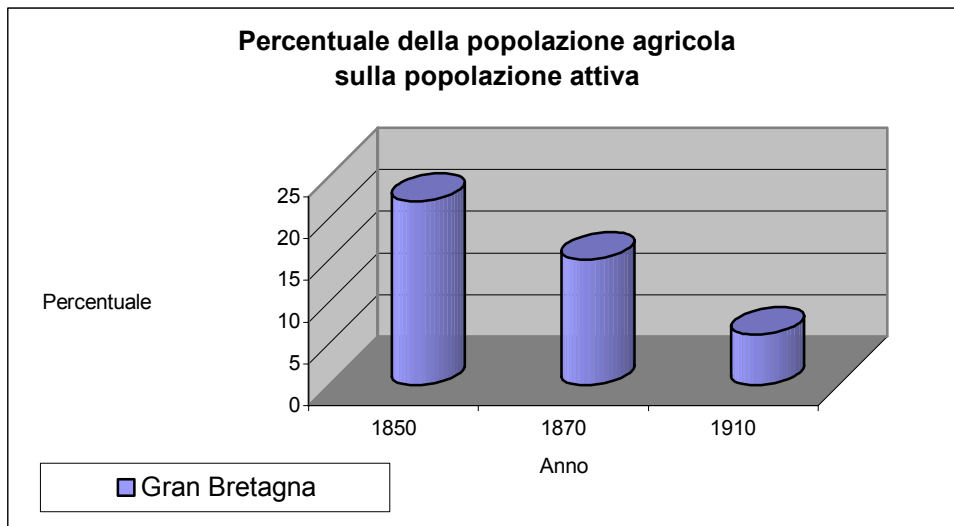
*Figura 1*



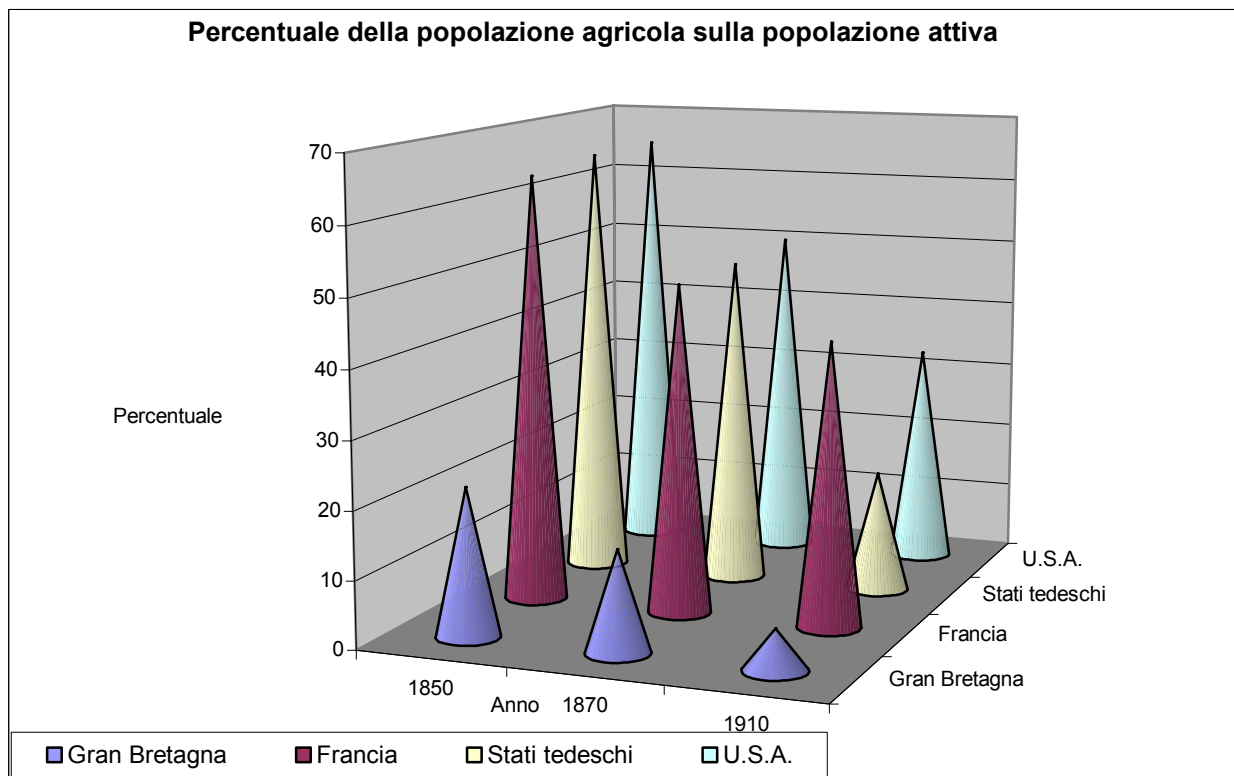
*Figura 2*



*Figura 3*



*Figura 4*



*Figura 5*

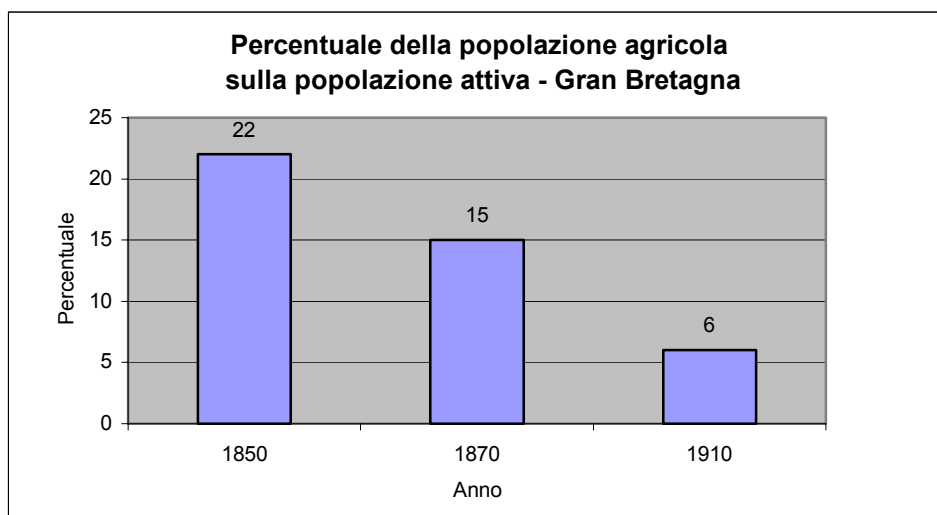


Figura 6a

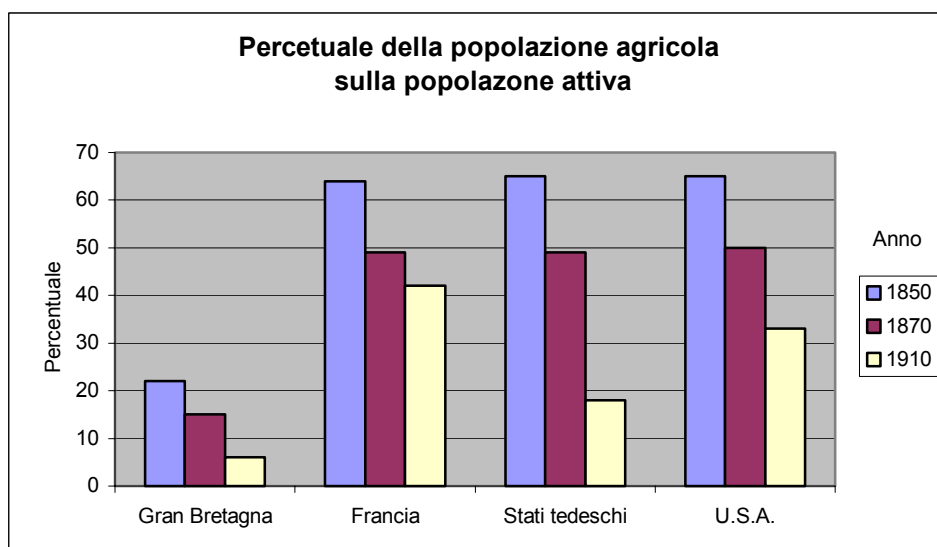


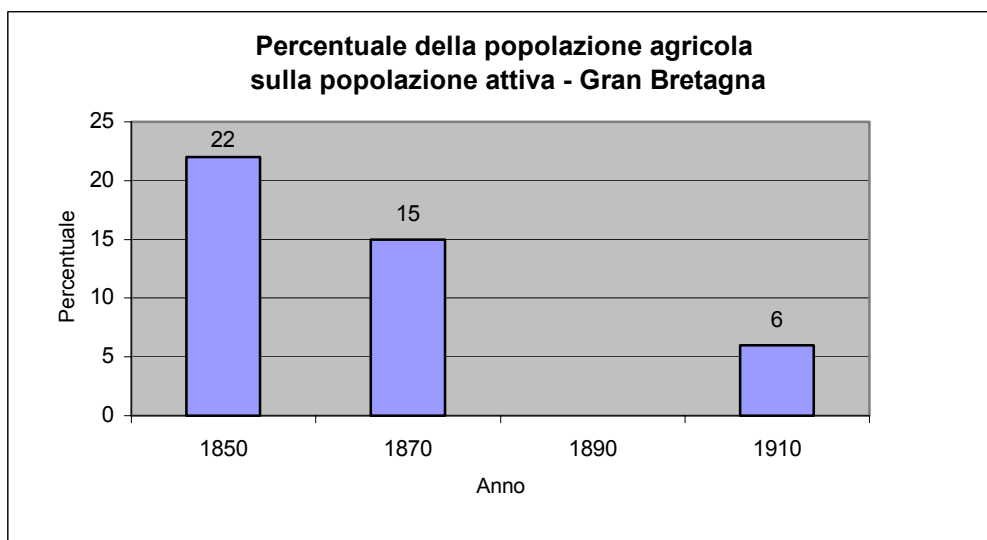
Figura 6b

Per la rappresentazione grafica dei dati della Tabella 1 sono stati usati due grafici che esprimono in maniera corretta, (perché?) l'informazione che la tabella offre. L'insegnante fa emergere con la discussione che un buon grafico è quello che riesce a combinare l'esigenza della completezza e della correttezza con la facilità e l'immediatezza della lettura.

Per la Tabella 2 sono stati scelti, in generale, grafici che introducono una terza dimensione non esistente nelle tabelle, producendo prismi (Figura 3) o cilindri (Figura 4) nei quali viene affidato all'altezza il ruolo di rappresentare la percentuale. Si è anche prodotto un grafico molto particolare che ha utilizzato dei coni in uno spazio tridimensionale dove vengono rappresentati contemporaneamente gli anni, le percentuali, i paesi (Figura 5). La lettura di questo grafico risulta indubbiamente meno facile rispetto ai precedenti, anche se l'immagine che si ricava è sufficientemente fedele rispetto ai dati da rappresentare.

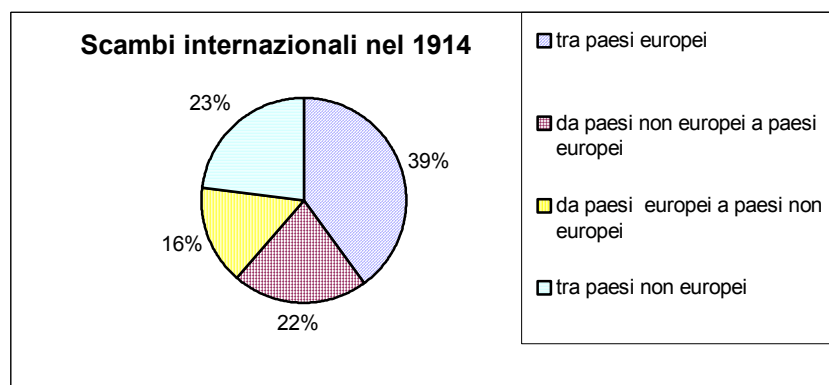
L'insegnante chiede agli studenti se, rispetto ai tre periodi considerati, gli intervalli temporali sono costanti. Ciò induce gli studenti a riflettere che tutti i grafici presentano un errore al riguardo perché non si è tenuto conto che gli intervalli fra un anno e il successivo sono diversi.

Dovendo convergere verso una sola rappresentazione si scelgono le Figure 6a e 6b, apportando, però, la correzione necessaria per tener conto dell'osservazione precedente. Dopo l'opportuna correzione, il grafico della Figura 6a dà luogo al grafico di Figura 7, che consente di illustrare correttamente i dati di un singolo paese. In maniera analoga l'insegnante conduce gli studenti a modificare il grafico di Figura 6b per effettuare in modo corretto il confronto simultaneo fra paesi diversi.

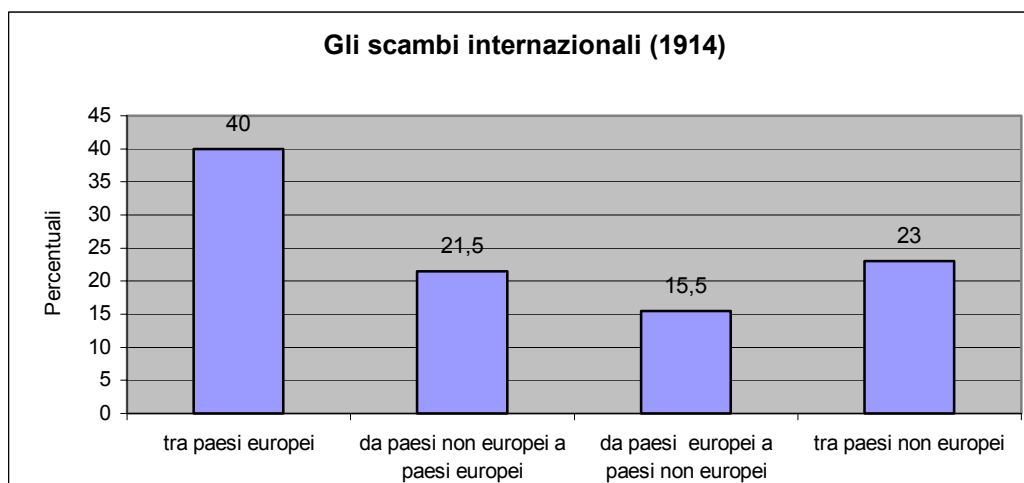


*Figura 7*

Rispetto alla distribuzione degli scambi internazionali nel 1914 (Tabella 3), i grafici delle Figure 8a e 8b risultano corretti. In particolare nel grafico a settori circolari si è evitato di introdurre una dimensione inesistente. L'insegnante guida gli studenti al confronto tra due grafici. Quale dei due consente la rappresentazione del totale? E' corretto usare il grafico a settori per i dati della prima colonna della Tabella 2? Perché?



*Figura 8a*



*Figura 8b*

In questa fase di studio l'insegnante indica i nomi tecnici dei grafici, fa osservare come sono stati costruiti e, soprattutto, che essi richiedono, per essere leggibili, la presenza di alcuni elementi fondamentali: titolo, legenda, indicazione delle unità di misura.

In seguito mostra uno schema simile al seguente, dove, per ciascuna tipologia di dati, viene suggerito il tipo di grafico più appropriato. L'insegnante termina l'attività, invitando gli studenti a completare l'ultima colonna con un esempio di distribuzione.

Tipologia di dati	Tipo di grafico	Esempio di distribuzione
Una distribuzione secondo un carattere <i>qualitativo</i> (con poche modalità)	Il diagramma a settori circolari (detto diagramma a torta)	
Una distribuzione secondo un carattere <i>qualitativo</i> (con molte modalità)	Il diagramma a colonne o nastri	
Una distribuzione secondo un carattere <i>quantitativo discreto</i>	Il diagramma cartesiano per punti o con diagramma ad aste	
Una serie storica	Il diagramma cartesiano o a nastri	
Una distribuzione secondo un carattere <i>quantitativo in classi</i> (prestando attenzione alla loro ampiezza)	L'istogramma di frequenza	
Una serie territoriale	Il cartogramma	

## Di media non ce n'è una sola!

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolare i principali valori medi per caratteri quantitativi.	Proprietà dei principali valori medi.	<u>Dati e previsioni</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	Viaggi Commercio Vita sociale

### Contesto.

Vita quotidiana.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito statistico e l'ambito probabilistico. Partendo da situazioni problematiche legate all'esperienza degli studenti (vedi anche l'attività "Arrivare a scuola") si possono introdurre alcune attività che motivino l'introduzione di diversi valori medi. L'unità è rivolta a studenti del primo biennio con l'obiettivo di "fugare" la credenza, ampiamente diffusa nell'opinione pubblica, che esista soltanto la media aritmetica (la cosiddetta "media matematica"!)

utile per giustificare o risolvere qualunque problema in cui occorra individuare un indice sintetico.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

L'insegnante presenta le seguenti situazioni problematiche:

- Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h. Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?
- Una agenzia che effettua indagini di mercato ha rilevato per una rete televisiva i seguenti dati medi giornalieri di ascolto, nel periodo invernale e nella fascia oraria dalle 20 alle 21:

Giorno della settimana	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Numero medio spettatori (in migliaia)	1.200	1.800	2.000	1.600	1.200	800	900

Una agenzia di pubblicità in quale giorno potrebbe consigliare a un proprio cliente di inserire uno spot pubblicitario di un prodotto per la neve, volendo usare la fascia oraria 20 – 21?

- In un ciclo di lavorazione tre apparecchiature lavorano in serie: la prima macchina ha un rendimento del 90 % , la seconda dell'80% , la terza del 30%. Qual è il rendimento medio complessivo?

d) Uno studente nella pagella del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti:

Italiano	7
Storia	8
Geografia	7
Lingua inglese	6
Scienze	5
Matematica	4
Educazione Fisica	9

Il padre gli ha promesso un regalo se la media dei suoi voti fosse stata superiore al 7.  
Otterrà lo studente il regalo?

e) Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami<sup>1</sup> riportando le seguenti votazioni:

Esame	Punteggio in trentesimi	Crediti
Laboratorio di Matematica	25	9
Analisi Matematica	24	12
Geometria	21	6
Algebra	27	6
Calcolo delle probabilità	23	9
Fisica generale	24	9
Lingua inglese	30	3
Fondamenti di Informatica	28	3
Abilità relazionali	30	3

Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30.  
Otterrà il nostro studente la borsa di studio?

f) In una prova multidisciplinare di Storia, Inglese, Matematica, Diritto, gli studenti vengono valutati con un punteggio da 0 a 15 per ogni materia. Il voto finale è dato dalla media dei quattro punteggi parziali. La prova non si considera superata se uno studente prende 0 punti in una delle materie. Quale valore medio consente di rappresentare adeguatamente questo modo di valutare?

### Seconda fase

Si invitano gli studenti, preferibilmente in attività di gruppo, a riflettere sul modo di risolvere i problemi proposti.

Gli errori ricorrenti potrebbero essere, relativamente ad ogni esercizio, i seguenti:

a) la prima idea risolutiva per tale problema è frequentemente quella di utilizzare la media aritmetica, ovvero di calcolare

$$v_m = \frac{932 + 856}{2} = 894 \text{ Km/h}$$

In tale situazione non è sempre semplice riuscire a spiegare allo studente dove è l'errore commesso. Può essere opportuno "esasperare" il problema assegnando valore 0 alla velocità

<sup>1</sup> Secondo il nuovo ordinamento universitario ad ogni esame è associato un numero di crediti: ciascun credito corrisponde a circa 25 ore di lezione-tutoraggio-impegno individuale dello studente. Ogni anno lo studente è tenuto ad accumulare 60 crediti.

media del ritorno, il che significa ammettere implicitamente di non ritornare; in tal caso appare evidente che la media aritmetica, conservando i totali dei valori da sintetizzare, non risolve il problema. L'insegnante condurrà allora gli studenti ponendo loro la domanda: nell'andata quanti Km si sono percorsi? E quanti nel ritorno? Come si può allora esprimere la velocità del "sistema" andata ritorno? E' ragionevole ammettere che il numero dei Km percorsi nell'andata e nel ritorno sia identico? Se sì, qual è la formulazione teorica che risolve il problema? Se no, il problema ha soluzione? L'insegnante può utilmente avvalersi del calcolo letterale, guidando gli studenti alla soluzione corretta che consiste nell'utilizzo della media **armonica**. Tale media può essere formalizzata in collegamento con il nucleo Numeri e algoritmi. Si avrà pertanto, ammettendo uguali i Km percorsi nell'andata e nel ritorno:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B}}$$

- b) Una lettura non sufficientemente attenta della distribuzione statistica potrebbe indurre gli studenti a calcolare la media aritmetica delle frequenze. L'insegnante ricorda il significato rispettivamente delle modalità e delle frequenze e conduce gli studenti ad individuare, come risposta al problema proposto, la moda. Essa in questo caso è il mercoledì, il giorno della settimana con la massima frequenza di ascolto.
- c) A questo punto del percorso, gli studenti dovrebbero avere chiaro che la media aritmetica risponde al problema della equidistribuzione di un totale che viene conservato. L'insegnante invita gli studenti a cogliere il senso del problema. La prima macchina in origine quanto deve rendere? Se la risposta è 100 pezzi, effettuata la lavorazione, quanto ha reso? Se si danno 90 pezzi alla seconda macchina quanti pezzi si ottengono? Se si immettono 72 pezzi nella terza ed ultima macchina quanti pezzi si hanno? Dunque da 100 pezzi teorici si ottengono in realtà, con l'intervento in serie delle 3 macchine, 21,6 pezzi. Il problema è allora di trovare tre macchine tutte con la stessa resa che diano alla fine dei tre passaggi 21,6 pezzi. Il percorso logico può essere coadiuvato da una semplice schematizzazione formale che porta a concludere che quando è necessario mantenere il risultato di un prodotto la media idonea è quella **geometrica**.
- d) Poiché in questo caso va rispettata la somma dei punteggi ottenuti, la sintesi corretta è la media aritmetica. E' da far notare un errore che gli studenti potrebbero commettere: calcolare le medie parziali dell'area umanistica (Italiano, Storia, Geografia, Lingua Inglese), scientifica (Scienze, Matematica) e di Educazione Fisica e poi fare la media semplice delle medie. Riflettere su ciò può essere didatticamente efficace perché dà l'opportunità di offrire un esempio di operazione non associativa. Infatti nel fare una media di medie parziali occorre tener conto di quante sono le unità statistiche che ciascuna media parziale sintetizza (collegamento con Numeri e algoritmi).
- e) Questo problema non dovrebbe creare eccessive difficoltà per convincere gli studenti ad utilizzare la media aritmetica ponderata. Nel caso in cui qualcuno commettesse l'errore di trascurare il credito si potrebbe proporre al solito un esempio "estremo": una valutazione di 30/30 in un esame con 3 crediti e una valutazione di 30/30 in un esame con 10 crediti può contare allo stesso modo? Evidentemente no!  
Una situazione simile potrebbe essere il calcolo della media **aritmetica** con valori ripetuti (per esempio i voti conseguiti da una classe di studenti in un compito di matematica).
- f) Quale dei valori medi utilizzati nei casi precedenti potrebbe andar bene in questo esempio?

Dalla discussione dovrebbe emergere che ciò che si vuole è che, quando si presenta uno zero, la sintesi si annulli. Dunque occorre utilizzare un valore medio fondato sul prodotto. E' forse la media geometrica la soluzione del problema posto? Essa in effetti è l'unica media che, assumendo in tal caso il valore 0, consente di escludere uno studente che abbia riportato un punteggio nullo in almeno una delle quattro materie.

### Terza fase

L'insegnante a questo punto sistematizza le conoscenze sui diversi tipi di medie, fornendo in ogni caso la formula e chiarendo le relative proprietà.

### Quarta fase

Verifica.

Si allegano elementi di prove di verifica sui valori medi.

### **Elementi di prove di verifica**

1. Il "colore dei capelli" viene osservato su tre individui, ottenendo:

A  
Capelli BIONDI

B  
Capelli ROSSI

C  
Capelli NERI

La mediana di questa distribuzione è:

- a) Capelli BIONDI
- b) Capelli ROSSI
- c) E' B
- d) Non si può calcolare
- e) Capelli NERI

La moda di questa distribuzione è:

- a) E' A
- b) Capelli NERI
- c) Non esiste
- d) Capelli ROSSI
- e) Capelli BIONDI

2. In una prova nove studenti vengono valutati, assegnando loro uno dei tre livelli: O = ottimo, B = Buono, S = Sufficiente, ottenendo:

Alberto	Gino	Raffaella	Maria	Anna	Mario	Giuseppe	Carla	Roberto
O	O	B	S	S	O	B	B	S

La mediana della distribuzione è:

- a) Anna
- b) O
- c) 4,5
- d) 5
- e) B

3. Il reddito medio mensile di cinque famiglie italiane nel mese di giugno nel 2002 è stato di € 1.705. Il reddito complessivo di queste famiglie è di:

- a) circa € 10.000
- b) minore di € 7.000
- c) non si può calcolare
- d) € 8.525
- e) maggiore di € 10.000

4. Ad una certa data, l'età media in anni compiuti dei componenti di una famiglia di quattro persone è pari ad anni 32. Se tre dei componenti hanno rispettivamente 15, 50 e 47 anni, l'età del quarto componente è:

- a) 16 anni
- b) 11 anni
- c) Minore di 10 anni
- d) Non si può calcolare
- e) 18 anni

5. I voti in matematica di 8 studenti di una scuola secondaria sono:

Studente	1	2	3	4	5	6	7	8
Voto	8	3	6	8	7	8	4	7

Per la metà degli studenti più bravi il voto minimo è stato almeno:

- a) 7,1
- b) 7
- c) 5
- d) 8
- e) 6

#### Griglia di correzione

- 1. d, c
- 2. e
- 3. d
- 4. a
- 5. b

## Pivot è bello

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Predisporre la struttura della matrice dei dati grezzi con riguardo a una rilevazione pianificata e inserire i dati rilevati anche in un foglio elettronico. Passare dai dati grezzi alle distribuzioni statistiche di frequenze ed alle corrispondenti rappresentazioni grafiche. Calcolare i principali valori medi e le misure di variabilità.	Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere. Frequenze assolute, relative, percentuali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. Proprietà dei principali valori medi e delle misure di variabilità.	<u>Dati e previsioni</u>  <u>Laboratorio di matematica</u>  Argomentare, congetturare, dimostrare  Risolvere e porsi problemi	Vita sociale  Organizzazione di attività

### Contesto

Numeri, grafici.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'uso di dati numerici e delle loro rappresentazioni grafiche.

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una classe del primo biennio quando gli studenti hanno acquisito abilità di base sull'utilizzo del foglio elettronico (selezionare, copiare, incollare, indirizzamenti assoluti e relativi, creazione guidata dei grafici, ...).

Dopo che gli studenti hanno imparato ad effettuare lo spoglio di tipo manuale di un numero limitato di semplici questionari, l'attività proposta diventa molto utile quando lo spoglio riguarda molti questionari. Trasferire i dati in una tabella di un foglio elettronico rende comodo e agevole la manipolazione flessibile di distribuzioni univariate tratte dall'intera base di dati o da un suo sottoinsieme.

### Descrizione dell'attività

Per lo sviluppo di questa attività si è utilizzato il foglio elettronico Excel.

Nell'esempio si presenta una parte di una tabella, tratta dall'unità "Arrivare a scuola" (Tabella 1) e la si descrive nelle sue parti principali al fine di chiarire i diversi concetti in essa contenuti.

Ogni riga rappresenta una unità statistica e ogni informazione da essa ricavata è disposta nelle rispettive colonne, una per la modalità di ciascun carattere.

Perché nelle colonne C e D, che contengono caratteri qualitativi sconnessi, si trovano dei numeri?

Perché proprio quei numeri?

Per poter utilizzare in modo semplice lo strumento delle tabelle pivot è importante che nelle singole celle ci siano dei valori numerici. Pertanto anche le modalità qualitative sono state codificate in forma numerica. In questo caso la scelta è stata la seguente: carattere "Sesso": modalità "Femmina" → 1, modalità "Maschio" → 2. Anche per il carattere "Comune di residenza" è stata effettuata una scelta analoga.

Tenuto conto che il questionario è stato somministrato in una scuola superiore, come è possibile trovare le età riportate in tabella? Evidentemente è stata fatta, a livello di codifica, una scelta analoga alla precedente, anche se il carattere quantitativo non lo richiedeva espressamente. È stato infatti attribuito codice 1 all'età "Meno di 14" che corrisponde alla prima risposta data alla

domanda 1 del questionario reperibile all'unità "Arrivare a scuola", codice 2 ad una età "14", e così via. In questo modo è stata legata direttamente la modalità al numero di risposta del questionario stesso.

	A	B	C	D	E
1	codice	età	sexso	comune	classe
2	1	7	2	3	4
3	2	6	1	4	4
4	3	5	1	16	4
5	4	5	1	4	4
6	5	6	1	2	4
7	6	5	2	2	4
8	7	5	1	2	4

*Tabella 1*

Nella colonna A sono riportati i codici attribuiti ai singoli questionari in fase di spoglio. Ciò permette di individuare ogni record e di effettuare il controllo della correttezza dell'inserimento dei dati di ciascun questionario

Nella colonna B sono riportati i codici assegnati alle diverse età, secondo quanto indicato sopra: 7 corrisponde ad uno studente la cui età è di 19 anni, che è la settima risposta alla domanda 1 del questionario.

#### Prima fase

Una prima proposta riguarda il modo di ottenere informazioni circa la distribuzione univariata delle frequenze del carattere "Età" del collettivo considerato.

Si utilizza la procedura guidata per "interrogare" l'insieme dei dati oggetto di interesse (database).

La prima cosa da fare è selezionare una cella qualsiasi del database. Successivamente si sceglie dal menu dati la voce "Report della tabella pivot e del grafico pivot ...".

Si ottiene così la seguente figura:



*Figura 1*

La scelta del pulsante “Avanti” apre una finestra che indica la zona nella quale sono residenti i dati oggetto di interesse; dopo aver confermato nuovamente con il pulsante “Avanti”, si ottiene la seguente finestra:

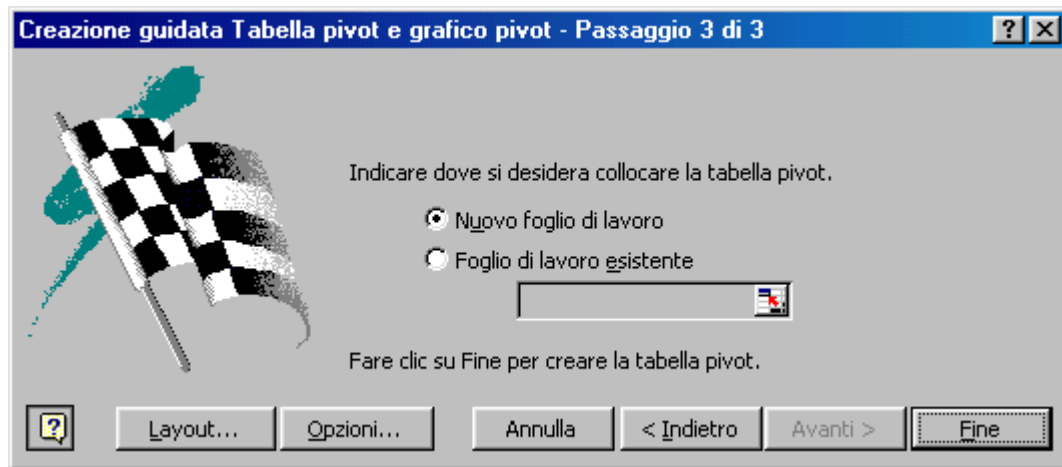


Figura 2

In questa finestra si deve scegliere dove posizionare i risultati dell’interrogazione (Tabella pivot) del database; è consigliabile, per maggior chiarezza, collocare la tabella pivot in un nuovo foglio di lavoro (come indicato in Figura 2).

Scegliendo il pulsante “Layout” si giunge alla finestra successiva che permette la costruzione della tabella pivot.



Figura 3

Nella finestra sono visibili i campi del database (i caratteri) e un riquadro dove, posizionando i singoli campi, è possibile ottenere la tabella desiderata. Per semplice trascinamento del campo sesso sulla zona contrassegnata dal nome Riga si inserisce il carattere “Sesso”. Trascinando il pulsante

nesso nella zona Dati si ottiene il conteggio delle unità che posseggono tali modalità. A questo riguardo è importante scegliere la modalità “Conta( )” effettuando un doppio clic sul pulsante attivo nella zona Dati dopo il trascinamento.

Per poter effettuare una interrogazione per sottoinsiemi del database, ad esempio per classe, si deve trascinare il pulsante del carattere discriminatore prescelto sul campo Pagina.

Il risultato delle scelte proposte è visibile nella figura seguente:

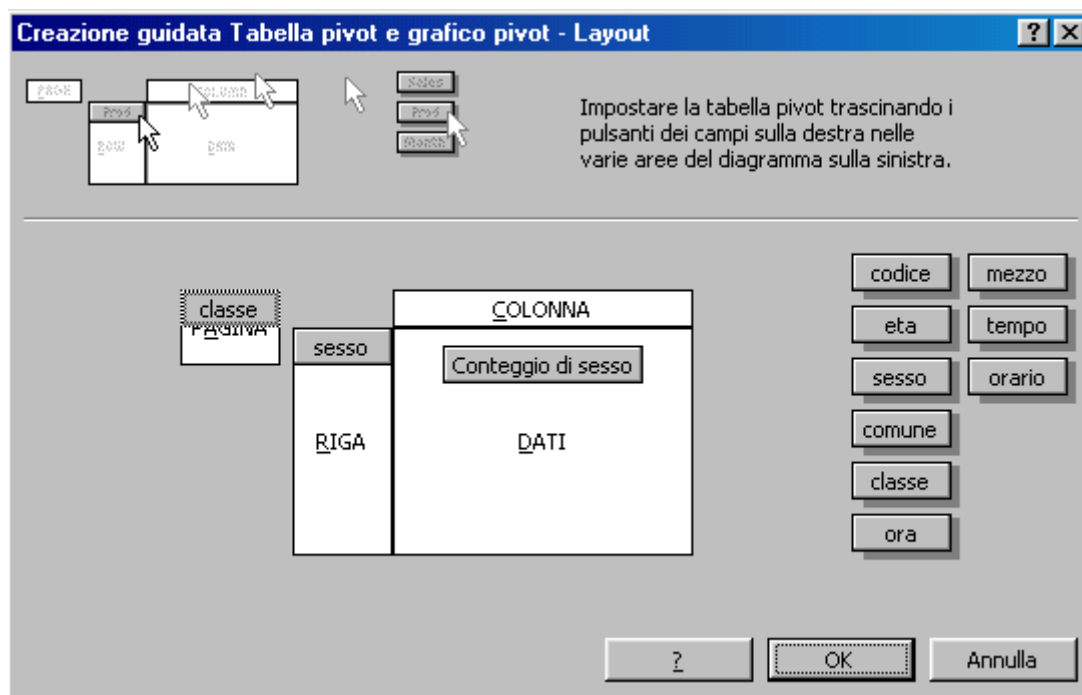


Figura 4

### Seconda fase

Il risultato della procedura illustrata nella fase precedente permette di ottenere la tabella mostrata nella figura di seguito riportata:

	A	B	C
1	classe	(Tutto)	
2			
3	Conteggio di sesso		
4	sesso	Totale	
5		1	237
6		2	109
7	Totale complessivo		346
8			
9			

Figura 5

La tabella pivot così ottenuta, fornisce, rispetto a tutte le classi, le informazioni richieste.

Il pulsante contenuto nella cella B1 (*nome in Excel*) permette poi di ottenere lo stesso tipo di distribuzione riferita alla modalità prescelta tra quelle proposte dal carattere “Classe”.

Bisogna tuttavia osservare che per poter lavorare sui dati ottenuti è opportuno ricopiare il contenuto della tabella e incollare i valori in un altro foglio con la procedura: “Incolla speciale”, selezionando l’opzione “Valori”. A tal fine conviene effettuare la selezione partendo da una cella in basso a destra rispetto all’area di interesse.

In questo modo si ottiene una tabella indipendente da quella pivot e soprattutto dalle modifiche determinate su di essa da ulteriori interrogazioni.

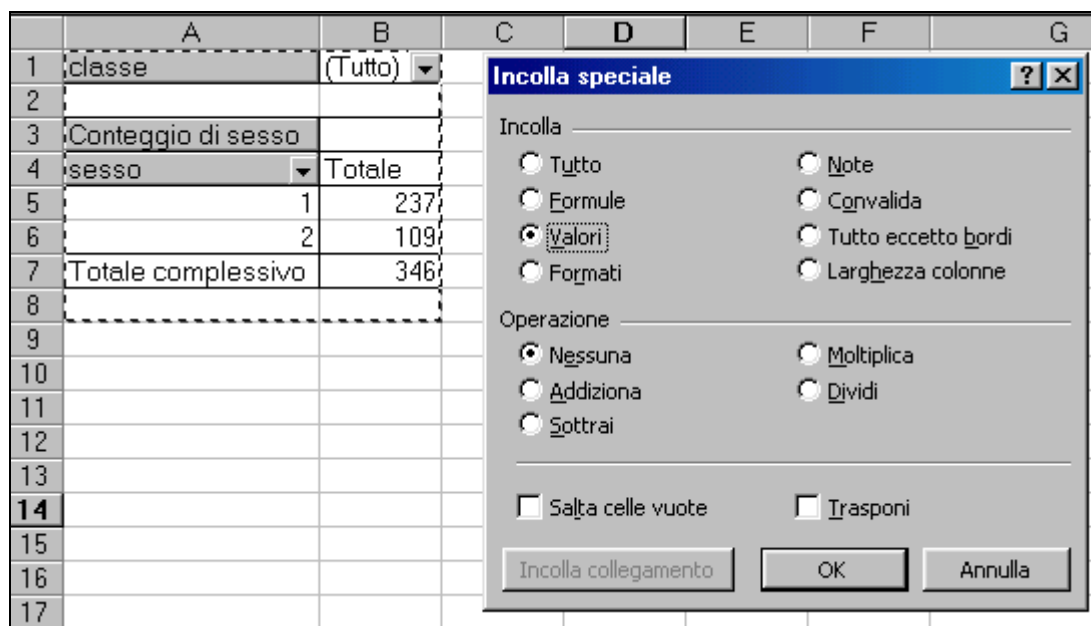


Figura 6

### Terza fase

E’ possibile rappresentare graficamente le informazioni contenute nella Figura 5? Quale tipo di grafico rappresenta in maniera più appropriata la distribuzione di frequenze esaminata?

L’insegnante sollecita la discussione e guida l’attenzione degli studenti sul significato statistico delle coppie (“Modalità del carattere Sesso”, “Frequenza”) e sulla loro rappresentazione grafica.

Una soluzione possibile può essere ottenuta mediante i seguenti passaggi.

In primo luogo occorre decodificare le modalità del carattere sesso. E’ sufficiente sovrascrivere nelle celle corrispondenti la modalità “Femmina” e la modalità “Maschio”.

Con la selezione di una cella qualsiasi all’interno della tabella pivot si può utilizzare la procedura guidata per la composizione del grafico che è in grado di rappresentare in modo corretto la distribuzione in esame.

L’insegnante, per far emergere la scelta del grafico più opportuno per rappresentare la distribuzione di frequenze, guida gli studenti a riflettere sulla natura del supporto orizzontale sul quale si trovano le modalità del sesso e sulla scelta di un grafico adeguato tra quelli proposti dal foglio elettronico per rappresentare la distribuzione considerata.

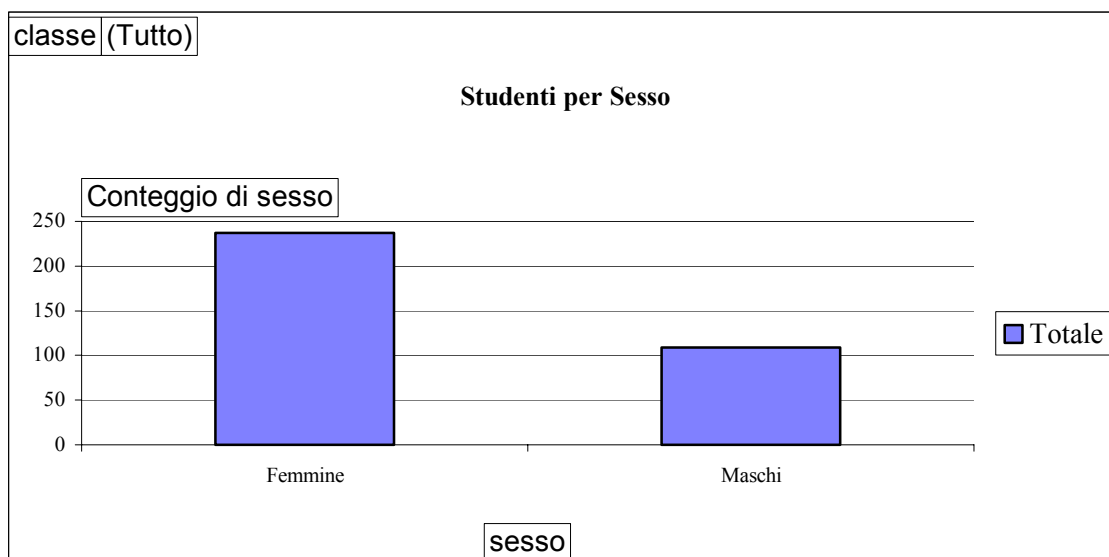


Figura 7

Che tipo di grafico propone in modo automatico il foglio elettronico? E' corretto? Perché?

Quarta fase

Sono di più i maschi in prima o in seconda? La tabella pivot può aiutare a rispondere a questa domanda? Si può rispondere alla prima domanda con un grafico ad aste?

L'insegnante guida gli studenti ad utilizzare la tabella pivot per trovare la risposta mediante l'interrogazione secondo la voce classe. I risultati sono riportati nelle tabelle seguenti:

classe	1	classe	2
secco		secco	
Femmine	61	Femmine	36
Maschi	29	Maschi	27
Totale	90	Totale	63

Tabella 2

Tabella 3

Spontaneamente ci si attende che gli studenti rispondano che sono di più i maschi in prima. E' compito dell'insegnante guidarli al confronto fra due collettivi di diversa numerosità, pervenendo al concetto di frequenza relativa e al calcolo della Tabella 4 e della Tabella 5.

classe	1	classe	2
secco		secco	
Femmine	67,78	Femmine	57,14
Maschi	32,22	Maschi	42,86
Totale	100,00	Totale	100,00

Tabella 4

Tabella 5

Quinta fase

Ci sono strumenti che consentono di sintetizzare una distribuzione semplice?

L'insegnante stimola l'attenzione degli studenti sull'individuazione della moda per una distribuzione di un carattere qualitativo e il calcolo della media aritmetica per un carattere quantitativo discreto.

Con l'utilizzo della tabella pivot si ottengono rapidamente le seguenti distribuzioni:

Classe	n. studenti
Prima	90
Seconda	63
Terza	117
Quarta	47
Quinta	29
Totale	346

Tabella 6

La Tabella 6 riporta i dati degli iscritti nelle varie classi della scuola in esame. La moda è "Terza" in quanto è la modalità che presenta la frequenza maggiore.

Se si prende in considerazione un carattere quantitativo discreto è possibile determinare la media aritmetica e ad essa associare due indici di variabilità: la varianza e lo scarto quadratico medio.

L'insegnante suggerisce agli studenti di estrarre la tabella che contiene le informazioni relative all'età degli studenti.

Età	Totale
14	61
15	69
16	107
17	61
18	40
19	5
> 19	3
Totale	346

Tabella 7

Qual è l'età media? La colonna dei totali contribuisce a rispondere alla domanda precedente? Come può essere trattata l'ultima modalità?

Il calcolo della media aritmetica può essere fatto anche senza l'ausilio dello strumento informatico che, tuttavia, permette di far convergere l'attenzione dello studente principalmente sugli aspetti concettuali piuttosto che su quelli calcolatori. E' fondamentale che l'insegnante induca lo studente a riflettere sul valore interpretativo degli indici trovati senza indulgere eccessivamente sulle tecniche utilizzate per la loro determinazione. A tal riguardo è importante che l'insegnante apra una discussione con gli studenti circa le soluzioni (arbitrarie) per "chiudere" l'ultima modalità.

Una soluzione possibile al problema suddetto può essere ottenuta predisponendo un'elaborazione come quella proposta nella Tabella 8.

xi	ni	xi*ni	xi - m	(xi - m) <sup>2</sup>	(xi - m) <sup>2</sup> *ni
14	61	854	-1,93	3,7385	228,0499
15	69	1035	-0,93	0,8715	60,1315
16	107	1712	0,07	0,0044	0,4728
17	61	1037	1,07	1,1374	69,3794
18	40	720	2,07	4,2703	170,8126
19	5	95	3,07	9,4033	47,0163
20	3	60	4,07	16,5362	49,6086
Totale	346	5513			625,4711
Media aritmetica (m)		15,93			
Varianza		1,81			
Scarto quad. med.		1,34			

Tabella 8

Il problema dell'ultima classe è stato risolto utilizzando informazioni aggiuntive disponibili in segreteria sull'età degli studenti di più di 19 anni.

Le prime due colonne sono state estratte dalla tabella pivot mentre le altre colonne sono state calcolate usando le formule e le funzioni di Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	xi	ni	xi*ni	xi - m	(xi - m) <sup>2</sup>	(xi - m) <sup>2</sup> *ni
2	14	61	=A2*B2	=A2-\$C\$10	=D2*D2	=E2*B2
3	15	69	=A3*B3	=A3-\$C\$10	=D3*D3	=E3*B3
4	16	107	=A4*B4	=A4-\$C\$10	=D4*D4	=E4*B4
5	17	61	=A5*B5	=A5-\$C\$10	=D5*D5	=E5*B5
6	18	40	=A6*B6	=A6-\$C\$10	=D6*D6	=E6*B6
7	19	5	=A7*B7	=A7-\$C\$10	=D7*D7	=E7*B7
8	20	3	=A8*B8	=A8-\$C\$10	=D8*D8	=E8*B8
9	Totale	=SOMMA(B2:B8)	=SOMMA(C2:C8)			=SOMMA(F2:F8)
10	Media	aritmetica (m)	=C9/B9			
11	Varianza		=F9/B9			
12	Scarto quad. med.		=RADQ(C11)			
13						

Tabella 9

In Tabella 9 sono riportate le formule e le funzioni usate per il calcolo degli indici. L'insegnante fa notare l'uso dei riferimenti relativi e dei riferimenti assoluti nelle formule e l'impiego della funzione "Somma()" per calcolare la somma dei valori in colonna e della funzione "Radq()" per il calcolo della radice quadrata.

La terza colonna contiene il prodotto tra le singole modalità e le rispettive frequenze assolute. A tal riguardo l'insegnante può stimolare l'attenzione degli studenti sul fatto che tale operazione consente di "pesare" in modo diverso le singole modalità del carattere "Età".

Il rapporto tra la somma della terza colonna e la somma della seconda permette di calcolare la media aritmetica.

La quinta e la sesta colonna consentono di calcolare la varianza, ottenuta come rapporto tra la somma della sesta colonna con la somma delle seconda.

Quali informazioni si possono trarre dalla varianza? Cosa si può dire sulla sua unità di misura? E' la stessa del fenomeno del quale si vuol indagare la variabilità?

La radice quadrata della varianza fornisce lo scarto quadratico medio che è anch'esso una misura della variabilità.

Quali vantaggi ha lo scarto quadratico medio rispetto alla varianza? Quanto dista l'età 14 dalla media? E l'età 19? Possiamo esprimere queste due distanze prendendo come unità di misura lo scarto quadratico medio? Immaginiamo di avere un'altra distribuzione sempre con la stessa media 15,93 anni, e con scarto quadratico medio 3,2 anni, se uno studente ha 19 anni la sua distanza dalla media ha la stessa importanza di prima? In quale distribuzione lo studente è più vicino alla media? So lo scarto quadratico medio fosse pari a 0, cosa significherebbe?

La varianza e lo scarto quadratico medio sono misure idonee a confrontare la variabilità di due distribuzioni riferite a caratteri diversi? Perché?

#### Sesta fase

C'è la possibilità di calcolare indici sintetici di una distribuzione semplice rispetto ad un carattere continuo avente modalità suddivise in classi? C'è la possibilità di calcolare la media e lo scostamento quadratico medio, analogamente a quanto si è visto nella quinta fase?

Con l'utilizzo della tabella pivot applicata sul database si ottiene rapidamente la seguente distribuzione che fa riferimento ai tempi che gli studenti impiegano per arrivare a scuola.

Tempo di percorrenza (min.)	N° studenti
fino a 15 min.	145
da 16 a 30 min.	103
da 31 a 45 min.	65
da 46 a 60 min.	24
oltre i 60 min.	9
Totale	346

*Tabella 10*

L'insegnante stimola l'attenzione degli studenti sul calcolo della media aritmetica e degli indici di variabilità in questa nuova situazione.

ei	es	ni	xic	xic*ni	xic - m	$(xic - m)^2$	$(xic - m)^2 * ni$
0,5	15,5	145	8	1160	-14,84	220,08	31912,31669
15,5	30,5	103	23	2369	0,16	0,03	2,79534064
30,5	45,5	65	38	2470	15,16	229,97	14948,00682
45,5	60,5	24	53	1272	30,16	909,91	21837,87678
60,5	70	9	70	630	47,16	2224,51	20020,6142
Totale		346	7901		88721,60983		
media aritmetica (m)		22,84	legenda:		ei	estremo inferiore	
varianza		256,42			es	estremo superiore	
scarto quad. medio		16,01			xic	valore centrale	

Tabella 11

Il caso in esame pone allo studente problemi aggiuntivi rispetto al caso precedente? Dove deve porre l'attenzione lo studente? Nell'algoritmo di calcolo o altrove?

L'insegnante guida lo studente a riflettere sulla necessità di individuare con attenzione gli estremi della prima classe e la modalità di "chiusura" dell'ultima. Nell'esempio di Tabella 5 il valore rappresentativo dell'ultima classe è stato individuato in base alle informazioni aggiuntive a disposizione (i 9 studenti appartenenti all'intervallo in esame, risiedendo tutti nello stesso comune, impiegano 70 minuti per raggiungere la scuola).

E' possibile costruire l'istogramma di frequenze? L'insegnante guida gli studenti a costruire la Figura 8, usando il grafico dispersione (XY) di Excel e dando una tabella di punti xy che rappresentano i vertici di ogni rettangolo. Dovendo rappresentare sul grafico la media, dove la si posizionerà? Sull'asse delle ascisse o delle ordinate? Perché?

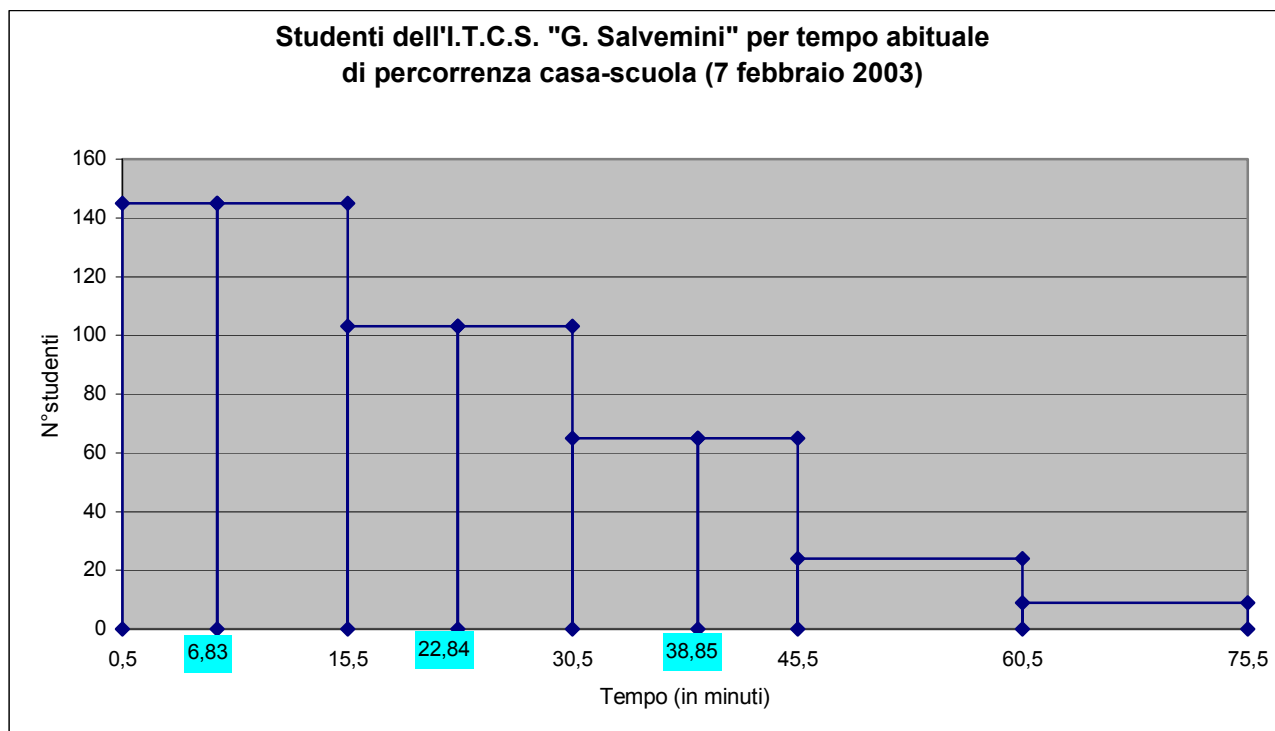


Figura 8

Dovendo rappresentare lo scarto quadratico medio come si farà? L'insegnante guida gli studenti a considerare che lo scarto dalla media non è altro che una distanza dalla media. Dunque lo scarto quadratico medio, come media quadratica di distanze, dal punto di vista geometrico è un segmento, che è possibile disegnare sull'asse delle ascisse, a sinistra e a destra della media aritmetica. Dunque come si sono ottenuti i punti di ascissa 6,83 e 38,85? Si può calcolare qual è il numero di studenti che impiegano fra 6,83 e 38,85 minuti? Quale percentuale rappresentano sul totale degli studenti?

## Un gioco con tre dadi

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi indipendenti e non.	Eventi e operazioni con gli eventi. Significato della probabilità e sue valutazioni.	<u>Dati e previsioni</u> Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Giochi

### Contesto

Giochi, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito probabilistico; ha anche aspetti collegati al contesto dei giochi.

Questa attività può essere introdotta anche al primo anno di biennio dopo aver trattato le distribuzioni di frequenze e aver introdotto le definizioni di probabilità. Non occorrono né i teoremi sulle probabilità né altri concetti. L'attività ha lo scopo di indurre ad una individuazione corretta dello spazio degli eventi, in modo che gli studenti sappiano distinguere tra evento (uscita di un certo risultato nei dadi) ed evento elementare. L'obiettivo è condurre gli studenti alla scoperta che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende dal modo in cui l'esperimento è definito.

Per la simulazione al computer sono necessari alcuni prerequisiti di conoscenza del foglio elettronico: come si inseriscono i dati, come si inserisce una formula, come si copia una formula, riferimenti relativi e assoluti alle celle, come si crea un grafico. Le funzioni "Casuale( )" e "Conta.Se( )" possono essere introdotte anche in questo contesto.

### Descrizione dell'attività

L'insegnante propone il seguente problema: lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado col punteggio maggiore annotando la somma dei due dadi rimasti (se quelli col punteggio maggiore sono due, eliminarne uno qualsiasi).

Per una migliore comprensione del problema l'insegnante suggerisce una lettura attenta del testo e chiede agli studenti di esemplificare qualche situazione che si può verificare. Pone alla fine la domanda:

I risultati sono gli stessi che nel lancio di due dadi?

#### Prima fase

Il problema si può affrontare dopo aver trattato preliminarmente il lancio di due dadi.

L'insegnante guida gli studenti a costruire il grafico di frequenze per il lancio di due dadi dopo aver effettuato l'esperimento manualmente o tramite la simulazione al computer ed aver calcolato la somma dei punteggi ottenuti.

#### [Lancio di due dadi.xls](#)

Il foglio elettronico, riportato in Figura 1, è stato costruito riportando nella colonna B le uscite del primo dado e nella colonna E le uscite del secondo dado (ottenuti tramite la funzione casuale); nella colonna G si è effettuata la somma. Per poter calcolare le frequenze assolute e relative (colonne J e K) si è usata la funzione "Conta.Se( )".

J10 = =CONTA.SE(\$G\$10:\$G\$410;2)


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>LANCIO DI DUE DADI</b>								<b>Premi F9 per esperimento</b>		
9		<b>PRIMO DADO</b>		<b>SECONDO DADO</b>		<b>SOMMA</b>		<b>SOMMA</b>		<b>FREQUENZE ASSOL.</b>	<b>FREQUENZE REL.</b>
10	2,061695	3	5,175182	6	9	2	7	0,02			
11	1,218886	2	1,945911	2	4	3	13	0,03			
12	4,968967	5	2,510941	3	8	4	46	0,11			
13	4,46233	5	1,81119	2	7	5	40	0,10			
14	3,804479	4	3,055004	4	8	6	59	0,15			
15	3,821183	4	5,105237	6	10	7	73	0,18			
16	2,444649	3	4,165009	5	8	8	60	0,15			
17	5,230644	6	5,41912	6	12	9	51	0,13			
18	3,811168	4	2,744116	3	7	10	27	0,07			
19	5,117183	6	1,124992	2	8	11	15	0,04			
20	3,171011	4	3,764367	4	8	12	10	0,02			
21	3,868213	4	4,985429	5	9						
22	0,302787	1	4,936015	5	6						
23	4,913538	5	5,126264	6	11						
24	3,139194	4	3,289649	4	8						

Figura 1

Nel caso si sia effettuata la simulazione al computer l'insegnante invita ad osservare le colonne in cui sono riportati i risultati relativi al primo ed al secondo dado e chiede se i dadi sono truccati. Come sono tra loro i punteggi dei due dadi? Come avvengono i lanci?

Dall'esame del grafico in Figura 2 gli studenti possono dedurre che i casi centrali sono i più frequenti. Da cosa dipende?

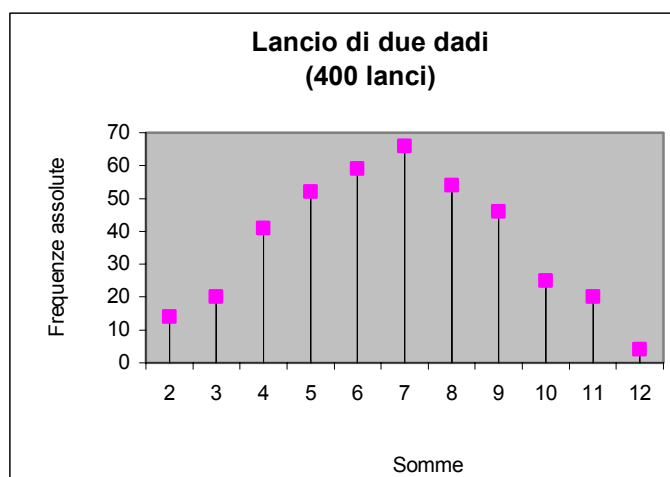


Figura 2

Si invitano gli studenti a valutare le probabilità dei diversi eventi possibili.

I casi possibili nel lancio di due dadi sono tutte le coppie che si possono ottenere associando una faccia del primo dado con una qualunque del secondo dado  $6 \cdot 6 = 36$ .

Non tutti i risultati, però, hanno la stessa probabilità: infatti, ad esempio, il numero 6 si può ottenere in più modi che non il numero 3.

Gli studenti saranno guidati a compilare la seguente tabella.

EVENTO	Modalità di presentazione	Numero casi possibili	Probabilità
uscita del 2	1+1	1	1/36
uscita del 3	1+2 2+1	2	2/36
uscita del 4	1+3 2+2 3+1	3	3/36
uscita del 5	1+4 2+3 3+2 4+1	4	4/36
uscita del 6	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	5	5/36
uscita del 7	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	6	6/36
uscita del 8	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	5	5/36
uscita del 9	3+6 4+5 5+4 6+3	4	4/36
uscita del 10	4+6 5+5 6+4	3	3/36
uscita del 11	5+6 6+5	2	2/36
uscita del 12	6+6	1	1/36
<b>Totale</b>		36	1

Si pongono agli studenti le seguenti domande: perché il grafico sperimentale non risulta perfettamente simmetrico come ci si aspetterebbe dalla valutazione di probabilità? Il grafico avrebbe avuto un andamento più vicino alle previsioni se il numero di lanci fosse stato maggiore?

Si può invitare gli studenti a ripetere la simulazione con un numero maggiore di lanci.

Il foglio elettronico permette agevolmente sia di ripetere più volte l'esperimento con lo stesso numero di lanci ( basta premere un tasto per vedere simultaneamente come si modifica il grafico) sia di variare il numero di lanci.

L'insegnante guida gli studenti ad osservare che il grafico muta anche se il numero di lanci è identico. Perché? Quante sono le simulazioni di lanci che si possono fare, fissato il numero di lanci? Allora l'insieme di  $n$  lanci studiato ed osservato è forse un "campione casuale"?

Appare, inoltre, chiaro che all'aumentare del numero dei lanci la frequenza si avvicina alla valutazione teorica di probabilità.

Si può concludere che su un gran numero di prove ci si può attendere di avere frequenze di uscita sempre più vicine alla valutazione di probabilità?

E' un primo approccio alla legge dei grandi numeri.

### Seconda fase

Nella fase successiva si propone il problema dei tre dadi .

Si invitano gli studenti ad eseguire l'esperimento lanciando i dadi ed effettuando un numero alto di prove. Si possono far lavorare gli studenti in gruppo e far loro costruire il grafico delle frequenze. E' opportuno comunque far ripetere l'esperimento con una simulazione al computer.

#### [Lancio di tre dadi.xls](#)

Il foglio elettronico, riportato in Figura 3, è stato costruito riportando nella colonna B le uscite del primo dado, nella colonna E le uscite del secondo e nella colonna H le uscite del terzo (ottenute tramite la funzione casuale); per calcolare la somma dei dadi rimasti (colonna J), dopo aver scartato il punteggio maggiore, si è utilizzata, per ogni terna di valori, la funzione "Max()", che restituisce il valore massimo.

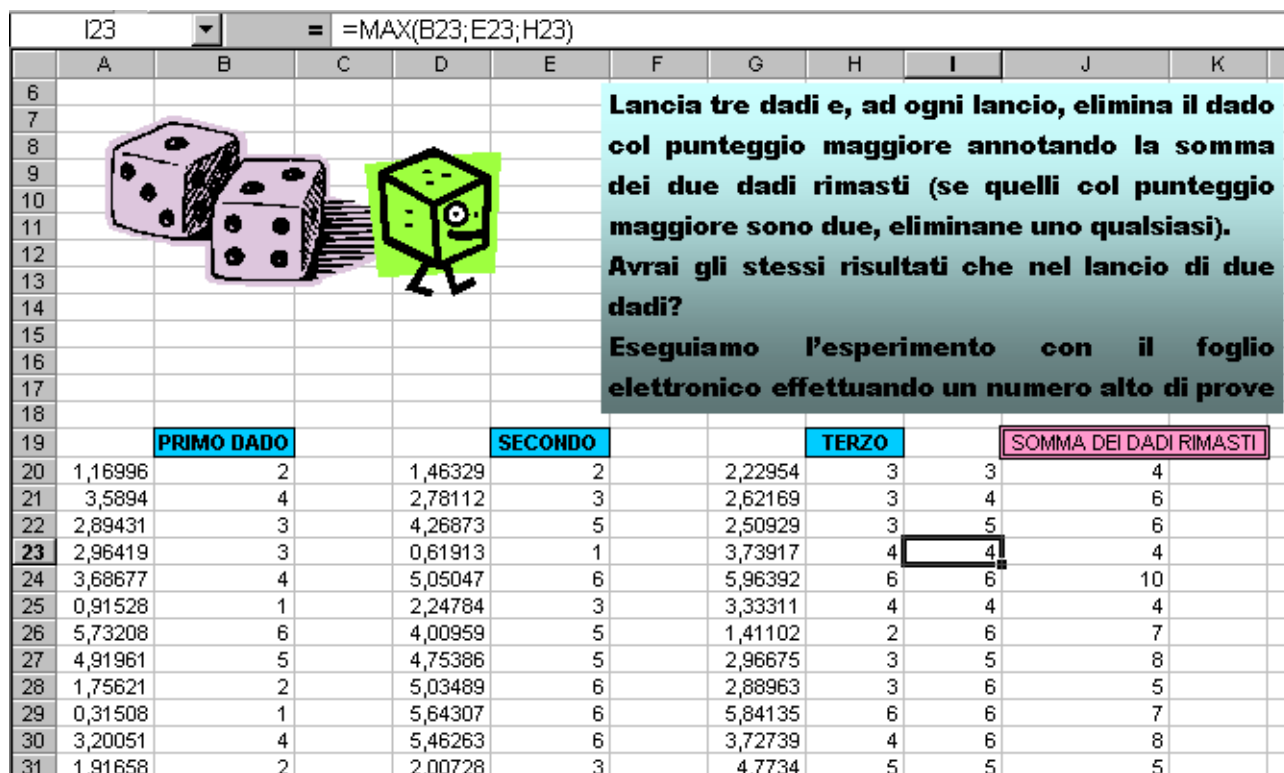


Figura 3

Dall'esame del grafico di Figura 4 gli allievi possono notare il diverso andamento ottenuto in questo esperimento rispetto a quello relativo al lancio di due dadi.

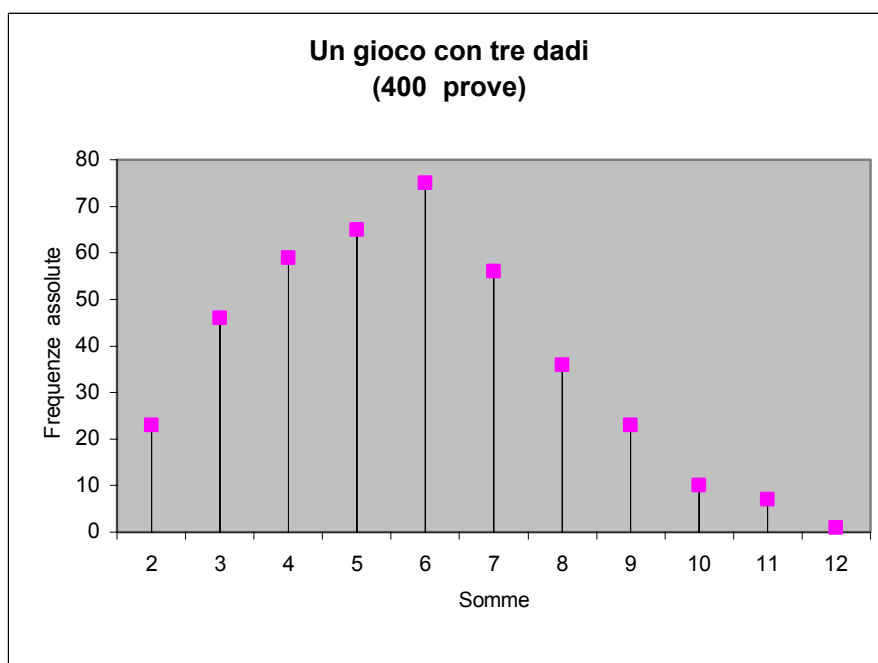
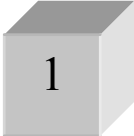
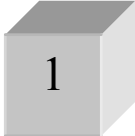
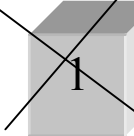
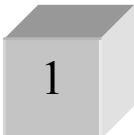
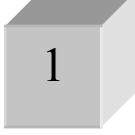
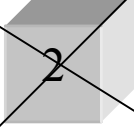
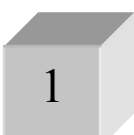
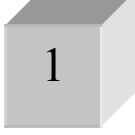
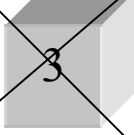
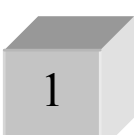
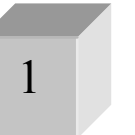
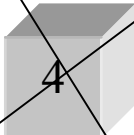
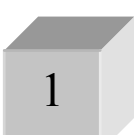

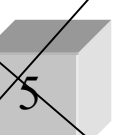
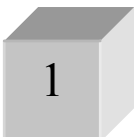
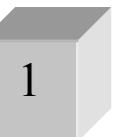
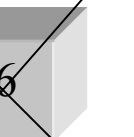


Figura 4

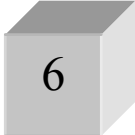
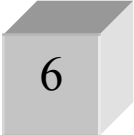
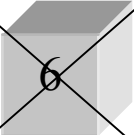
Si faranno riflettere gli allievi sul fatto che, anche se gli eventi sono sempre l'uscita dei numeri da 2 a 12, il fatto di aver eliminato l'esito del terzo dado, quello col punteggio maggiore, non può essere ignorato. Si invitano, poi, gli allievi a calcolare i diversi casi possibili per ogni evento.

Per esempio l'evento  $E_1$  : "uscita del 2" e l'evento  $E_2$  "uscita del 12" non hanno in questo caso la stessa probabilità .

Infatti, l' evento  $E_1$  si realizza in 16 modi:

		<del></del>	
		<del></del>	in tre modi
		<del></del>	in tre modi
		<del></del>	in tre modi
		<del></del>	in tre modi
		<del></del>	in tre modi

mentre l'evento  $E_2$  si realizza in un sol modo:

		<del></del>
---	---	---

In questo problema i casi possibili sono  $6^3 = 216$  .

A questo punto si invitano gli studenti a calcolare la probabilità dei diversi eventi, dividendoli in gruppi perché il calcolo seppure semplice è un po' laborioso, e si ottiene:

$$P(\text{uscita del 2}) = 16/6^3$$

$$P(\text{uscita del 5}) = 36/6^3$$

$$P(\text{uscita del 8}) = 19/6^3$$

$$P(\text{uscita del 11}) = 3/6^3$$

$$P(\text{uscita del 3}) = 27/6^3$$

$$P(\text{uscita del 6}) = 34/6^3$$

$$P(\text{uscita del 9}) = 12/6^3$$

$$P(\text{uscita del 12}) = 1/6^3$$

$$P(\text{uscita del 4}) = 34/6^3$$

$$P(\text{uscita del 7}) = 27/6^3$$

$$P(\text{uscita del 10}) = 7/6^3$$

Le valutazioni teoriche si accordano con i risultati ottenuti ?

## Il problema delle parti

**Livello scolastico:** 1° biennio.

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Valutare la probabilità in diversi contesti problematici.  Distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato di probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.	<u>Dati e previsioni</u>  Argomentare, congetturare, dimostrare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Storia

### Contesto

Giochi, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito probabilistico; ha anche aspetti collegati ai giochi.

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una prima o seconda classe del primo biennio; non è richiesto alcun prerequisito di calcolo delle probabilità. L'attività ha come obiettivo primario proprio quello di introdurre al pensiero probabilistico e va quindi svolta secondo i tempi della didattica lunga, tipici del contesto laboratoriale, dando agli studenti il tempo necessario per appropriarsi dei concetti e delle prime tecniche del calcolo delle probabilità. L'attività è suscettibile di ulteriori sviluppi nel secondo biennio, quando si voglia introdurre o applicare la distribuzione binomiale.

Il contesto è quello dei giochi, con la storia della matematica che dovrebbe favorire la costruzione di significati, presentando genesi ed evoluzione del concetto di probabilità. In questo caso la storia della matematica funge anche da elemento motivante, soprattutto quando evidenzia che le soluzioni non adeguate degli studenti al problema proposto sono state date, nel corso della storia, dai matematici che hanno affrontato lo stesso problema: questa considerazione dà dignità agli "errori" degli studenti e fa capire che, talvolta, una risoluzione adeguata e soddisfacente a un problema può essere determinata solo con un cambio di prospettiva reso possibile dallo sviluppo di nuovi concetti, come, in questo caso, quello di probabilità.

### Descrizione dell'attività

Il problema che viene proposto in questa attività è noto in letteratura come "problema della divisione della posta in gioco" o "problema delle parti". La prima versione che ci è nota è presente in un manoscritto di anonimo del 1400 circa, anche se il problema deve la sua fama a Luca Pacioli, che lo propose nel 1494 nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*.

Il problema riguarda la suddivisione della posta fra due giocatori di "uguale valore" (ossia che hanno la stessa probabilità di guadagnare un punto), che sono costretti a interrompere la partita prima che uno di essi abbia totalizzato il numero di punti necessario per vincere la partita.

L'attività viene strutturata in quattro fasi. Nella prima si propone di risolvere il problema in piccoli gruppi di lavoro (ovviamente) collaborativi; nella seconda, in una discussione matematica rivolta all'intera classe, si evidenziano i dati del problema e alcuni modi di rappresentarli e si discutono le

soluzioni proposte dai vari gruppi; nella terza fase si ricostruiscono i gruppi con la consegna di sistemare il procedimento risolutivo prima proposto, alla luce dei nuovi elementi emersi nella discussione collettiva. Nella quarta fase, infine, si passa alla discussione di bilancio, nella quale si costruiscono, gradualmente, le tecniche necessarie alla risoluzione del problema, eventualmente traendo spunto dalla storia della matematica e, in particolare, dalle soluzioni proposte da Pascal e da Fermat.

### Prima fase

L'insegnante propone la "situazione – problema" sotto riportata a gruppi collaborativi formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).

Situazione – problema:

In una taverna del piccolo paese di Matelandia, Ariele e Calibano giocano a testa e croce con una moneta a due facce non truccata. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l'esito. Vince tutta la posta di 24 denari (12 dei quali sono di Ariele e 12 di Calibano) chi per primo totalizza 6 punti.

I giochi d'azzardo sono però proibiti a Matelandia e il gendarme Prospero, venuto a conoscenza della partita che si sta giocando, si avvia verso la taverna per arrestare Ariele e Calibano. Informati del pericolo, i due giocatori interrompono la partita sul 5 a 3 per Ariele e fuggono, ciascuno con i 12 denari messi per formare la posta, concordando di ritrovarsi il giorno dopo senza finire la partita ma solo per dividere equamente la posta in gioco.

*Problema:*

Come dovrebbero, Ariele e Calibano, dividersi i 24 denari in modo tale che la suddivisione sia equa, ossia in modo tale da tenere conto del fatto che avevano contribuito alla posta con 12 denari ciascuno e che quando la partita è stata interrotta il punteggio era 5 a 3 per Ariele?

Tutte le volte che il problema è stato proposto a studenti del primo biennio che non avevano ancora affrontato sistematicamente il calcolo delle probabilità, la prima reazione è stata di stupore, perché il problema è ritenuto troppo facile, banale. Ci si può aspettare che, in breve tempo, i vari gruppi di studenti giungano a proporre la seguente risoluzione (o una equivalente): dividere la posta, ossia i 24 denari, per il numero totale di partite giocate, e moltiplicare il risultato prima per 5, per ottenere i denari spettanti ad Ariele, poi per 3, in modo da ottenere quelli di Calibano.

L'insegnante deve verificare, prima di passare alla seconda fase, che gli tutti studenti abbiano raggiunto un buon livello di fiducia nella risoluzione proposta.

### Seconda fase

L'insegnante avvia una discussione matematica alla presenza dell'intera classe, invitando i rappresentanti di alcuni gruppi a presentare la propria strategia risolutiva<sup>1</sup>. L'insegnante deve aver cura di predisporre la classe alla discussione collettiva, sia lodando il lavoro fino ad allora svolto, sia ricordando che tra gli elementi di valutazione della discussione vi è la capacità di analisi critica delle idee altrui.

In seguito l'insegnante fa notare che, in generale, i dati del problema sono il numero  $n$  di punti necessari per vincere la partita e i numeri  $a$  e  $b$  di punti che hanno totalizzato, rispettivamente, i due giocatori al momento dell'interruzione della partita. Tali dati possono essere rappresentati con la notazione  $[n: a; b]$  ove  $a$  e  $b$  sono numeri naturali minori di  $n$ , ma anche con la notazione  $[-p; -q]$ , dove  $p$  e  $q$  sono i punti che mancano, al momento dell'interruzione della partita, rispettivamente al primo e al secondo giocatore per vincere l'intera posta. In questo momento l'insegnante si limita a

---

<sup>1</sup> Non è necessario che tutti gli studenti presentino la soluzione proposta, soprattutto se le strategie risolutive sono fortemente simili, come avviene spesso in questo caso. L'insegnante invita un gruppo a presentare la propria strategia risolutiva e a chiedere agli altri gruppi di limitarsi a interventi che servano per precisare, aggiungere qualcosa o, eventualmente, per criticare e contestare le strategie risolutive proposte dal gruppo che ha iniziato le presentazioni.

presentare le due differenti modalità di rappresentazione dei dati a disposizione, senza evidenziare che la seconda modalità è enormemente più suggestiva della prima<sup>2</sup>.

A questo punto l'insegnante ha il compito di mettere in crisi la fiducia degli studenti nella soluzione proposta. Allo scopo può chiedere a qualche studente di giocare a testa e croce, contro di lui. Se il numero degli studenti è sufficientemente elevato, è abbastanza probabile che si verifichi la situazione che vede l'insegnante, dopo il primo lancio della moneta, vincere per 1 a 0 su uno studente. Si tratta di una situazione critica che consente all'insegnante di mettere in crisi la fiducia degli studenti nella soluzione proposta (quella di dividere la posta in parti direttamente proporzionali al punteggio dei due giocatori). Infatti, se la partita viene interrotta sull'1 a 0 per l'insegnante, con la strategia di suddividere la posta in parti direttamente proporzionali ai punteggi dei due giocatori, tutta la posta andrebbe all'insegnante e nulla allo studente. Ma quale studente è disposto ad accettare una suddivisione di questo tipo visto che sta perdendo solo per 1 a 0 e avrebbe ancora ottime possibilità di recuperare? La proposta di suddividere in parti proporzionali al punteggio appare, in questo caso, manifestamente non equa.

L'insegnante, per far capire agli studenti che la strategia risolutiva da loro proposta ha comunque una propria dignità e non è indice di ingenuità e superficialità da parte loro, può far presente che la stessa soluzione è stata proposta nel 1494 da Luca Pacioli, un grande matematico, secondo cui la suddivisione equa sarebbe stata di 15 denari per Ariele e di 9 per Calibano, ossia la stessa suddivisione proposta da alcuni degli studenti. Inoltre il problema, nonostante i tentativi di risoluzione di altri matematici, come Cardano, Tartaglia e di Pietro Cataneo, non fu risolto in modo soddisfacente fino alla metà del diciassettesimo secolo, quando fu data una risposta adeguata con Pascal e, indipendentemente, con Fermat.

L'insegnante, in questa fase, può approfittare dell'occasione per fissare l'attenzione su alcuni termini come suddivisione in parti direttamente proporzionali al punteggio e suddivisione equa, iniziando a precisarne il significato.

### Terza fase

Per trovare una strategia risolutiva alternativa, che possa soddisfare tutti i componenti della classe l'insegnante può ricostituire i gruppi di studenti invitandoli a ripensare alla strategia risolutiva, cercando di trovarne una che sia adeguata anche alla trattazione di casi limite come quello dell'1 a 0 per uno dei giocatori.

L'insegnante, in questa fase, deve intervenire sistematicamente nei gruppi di lavoro per evitare che si sclerotizzino posizioni semplificatrici del tipo "la partita può essere ripresa in seguito a partire dal punteggio sul quale è stata interrotta" oppure "si divide la posta a metà indipendentemente dal punteggio" o, ancora, "se il gioco d'azzardo è proibito, allora i giocatori devono essere multati e non spetta loro alcuna somma". Si dovrebbe far presente agli studenti che le risoluzioni proposte non devono far perdere senso al problema: la strategia di cambiare le richieste di un problema quando non lo si sa risolvere porta a non soddisfare la richiesta iniziale. Se Ariele e Calibano hanno chiesto aiuto per risolvere il loro problema, l'obiettivo dell'insegnante e quello degli studenti è cercare di risolverlo con i vincoli che loro hanno imposto e non quello di cambiare il problema posto.

In questa terza fase ci si aspetta che da qualche gruppo di lavoro emergano soluzioni che affermino che una suddivisione equa deve tenere conto non solo delle partite giocate, ma anche di quelle che rimangono da giocare per raggiungere i 6 punti necessari a vincere l'intera posta (è stato osservato, in alcuni gruppi di lavoro, l'attenzione esclusiva, con tipico pensiero probabilistico, alle sole partite che ancora rimangono da giocare).

---

<sup>2</sup> Con la seconda modalità, infatti, si fissa l'attenzione sul numero di punti che ancora servono per vincere e non sul punteggio ottenuto al momento dell'interruzione: è il cambio di orizzonte richiesto dal pensiero probabilistico (non guardare a quanto è già accaduto, ma prendere in considerazione ciò che deve ancora accadere o, meglio, il mondo degli eventi possibili, per effettuare previsioni).

Può essere interessante osservare se gli studenti, inconsapevolmente, ripropongano alcune strategie risolutive che i matematici che si sono occupati del problema hanno fatto pervenire attraverso testi a stampa<sup>3</sup>. Se questa situazione si verifica, è possibile utilizzare le fonti storiche in una specie di gioco “voci – eco”, nel quale le voci della storia, ossia le soluzioni proposte dai matematici, fanno eco alle voci della classe, ossia alle soluzioni proposte dagli studenti. In alcuni casi le voci della storia danno dignità agli errori commessi dagli studenti; altre volte contribuiscono a dar forza a idee espresse da alcuni studenti, consentendo che esse vengano riconosciute da tutta la classe diventando, a tutti gli effetti, oggetto di discussione. Ciò, oltre a consentire di creare un atteggiamento riflessivo nei confronti dei concetti messi in gioco nel problema, favorisce l’instaurarsi e lo svilupparsi della discussione matematica con inevitabili benefici per la socializzazione e la condivisione del sapere.

#### Quarta fase

L’insegnante si incarica di proporre una sistemazione delle varie soluzioni proposte e della loro evoluzione verso la soluzione ottenuta utilizzando il calcolo delle probabilità. Sottolinea il fatto che in questa soluzione la prospettiva, rispetto alla suddivisione in parti direttamente proporzionali al punteggio al momento dell’interruzione del gioco, è profondamente cambiata: per suddividere la posta l’attenzione è rivolta ai punti che mancano per vincere e non a quelli già ottenuti dai due giocatori (può essere utile a questo punto ritornare sulle due modalità di rappresentazione dei dati del problema proposto, commentando la maggiore utilità della notazione  $[-p; -q]$ ). L’idea è quindi quella di suddividere la posta in parti proporzionali alle possibilità che i due giocatori avrebbero di vincere l’intera posta al momento dell’interruzione, se il gioco potesse continuare. Il problema diventa quindi quello di misurare tale possibilità.

A questo punto l’insegnante può utilizzare le voci della storia, presentando in classe una sintesi dell’approccio di Pascal e di quello di Fermat alla risoluzione del problema, oppure può limitarsi a presentare alcuni elementi di calcolo delle probabilità, in particolare la legge delle probabilità totali e delle probabilità composte, magari con qualche cenno all’uso dei diagrammi ad albero come strumento di efficace rappresentazione di situazioni probabilistiche. Sia in un caso che nell’altro, la presentazione non può essere confinata in tempi e spazi angusti, per la delicatezza dei concetti coinvolti e quindi deve avere i ritmi e i tempi della didattica lunga.

Qui di seguito si dà un primissimo cenno dell’approccio alla risoluzione del problema da parte di Pascal e si propone poi una soluzione con il moderno linguaggio dei diagrammi ad albero.

Soluzione “alla Pascal”	tradotta in termini moderni
<p>Sul punteggio di 5 a 3 per Ariele, se si gioca un’altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l’intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 4. Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia 12 denari. Sul 5 a 4 per Ariele, se si gioca un’altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 5. Allora ad Ariele vanno, oltre ai 12 denari già stabiliti, almeno la metà dei 12 rimanenti, ossia <math>12+6=18</math>. Sul 5 a 5 si può giocare al più un’altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul 5 a 5</p>	<p>La speranza di vittoria di Ariele è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi:  <math>E_1; E_2E_1; E_2E_2E_1</math></p> <p>Ove:  <math>E_1</math> è l’evento “Ariele guadagna un punto”;  <math>E_2</math> è l’evento “Calibano guadagna un punto”.</p> <p>Poiché <math>E_1</math> ed <math>E_2</math> hanno probabilità <math>\frac{1}{2}</math>, per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, si ha che <math>E_1, E_2E_1, E_2E_2E_1</math> hanno, rispettivamente, probabilità uguali a <math>\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}</math>. Quindi la probabilità che Ariele ha di vincere è, per la regola sulla probabilità totale</p>

<sup>3</sup> A questo proposito si può far riferimento a uno dei lavori riportati nei riferimenti bibliografici.

<p>devono dividersi la posta rimanente, ossia 3 denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul 5 a 3 per Ariete, ad Ariete vanno <math>12+6+3=21</math> denari, mentre a Calibano ne spettano <math>24-21=3</math>.</p>	<p>per eventi incompatibili, <math>1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8</math>. Un'equa ripartizione dei 24 denari può essere effettuata suddividendo la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei due giocatori: 21 denari ad Ariete e 3 a Calibano.</p>
---	--

Risoluzione con l'aiuto dei diagrammi ad albero

Il seguente diagramma ad albero prende in considerazione tutte le possibili situazioni che potrebbero verificarsi se la partita continuasse, invece di essere interrotta sul 5 a 3 per Ariete (A indica la vittoria di Ariete e C quella di Calibano).

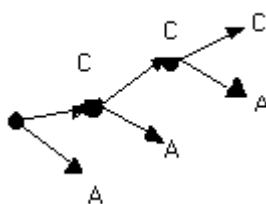


Figura 1

Il diagramma ad albero di Figura 1 consente di visualizzare lo spazio delle situazioni possibili: in questo caso è uno strumento particolarmente indicato, in quanto la partita è stata interrotta sul 5 a 3 e quindi lo spazio delle situazioni possibili non è eccessivamente complesso. Si fa notare agli studenti che Calibano, per arrivare a sei punti prima di Ariete, deve vincere tre partite consecutive senza che Ariete ne vinca alcuna. Ciò vuol dire che la probabilità di vincita di Calibano è  $\frac{1}{8}$ , mentre quella di Ariete è  $\frac{7}{8}$ . La suddivisione della posta in parti direttamente proporzionali alla probabilità che i due giocatori avrebbero di vincere il gioco al momento dell'interruzione, se questo fosse continuato è quindi 21 denari per Ariete e 3 per Calibano.

### Possibili sviluppi

- Introduzione del concetto di gioco equo e relative applicazioni.
- La generalizzazione del problema della parti al caso  $[n: a ; b]$  e la distribuzione binomiale.
- Lettura e analisi del carteggio Pascal – Fermat sul problema delle parti.
- Il problema dei compleanni.

### Elementi di prove di verifica

1. Un'urna contiene 6 palline nere e 5 bianche. Si eseguono due estrazioni successive, rimettendo, dopo la prima estrazione, la pallina estratta nell'urna. Qual è la probabilità di ottenere
  - a) due palline nere
  - b) una pallina bianca e una nera
  
2. Sia data un'urna contenente 5 palline, di cui 2 azzurre e 3 bianche. Effettuando due estrazioni successive in ciascuna delle quali si estrae una sola pallina che poi si inserisce nuovamente nell'urna, calcolare la probabilità di ottenere i seguenti eventi:
  - a) due palline azzurre
  - b) una pallina azzurra e una bianca
  
3. Un'urna contiene palline bianche, nere e rosse; sapendo che la probabilità di estrarre una pallina nera è  $1/2$ , che quella di estrarre una pallina nera o bianca è  $2/3$  e che vi sono 2 palline bianche, è possibile determinare il numero di palline rosse e quello di palline nere? In caso di risposta negativa spiega perché; in caso di risposta affermativa, determina tali numeri.
  
4. Qual è la probabilità che, lanciando due volte un dado cubico regolare, con facce numerate da 1 a 6, escano due numeri multipli di 3?
  
5. Sapendo che, al gioco del Lotto, sulla ruota di Napoli il 12 non è uscito per 80 settimane e che il 20 è stato estratto nelle due ultime settimane, possiamo dire che alla prossima estrazione è più probabile che esca il 12 rispetto al 20? Perché?
  
6. Una classe è composta da 9 maschi e 11 femmine. Per partecipare a una rappresentazione musicale studentesca vengono estratti tre nominativi. Qual è la probabilità che almeno uno di essi sia quello di una studentessa?
  
7. Un numero di 5 cifre viene scritto nel sistema binario con la seguente procedure:
  - a) si scrive il numero 1
  - b) si estraggono da un'urna (contenente cento cartellini con la cifra 0 e cento cartellini con la cifra 1) quattro cartellini in successione, rimettendo ogni volta i cartellini estratti nell'urna e scrivendo, a ogni estrazione, la cifra estratta di seguito a quelle già scritte.
 Qual è la probabilità che si ottenga, in questo modo, un numero minore del numero che, in base dieci, si rappresenta con la scrittura 30?
  
8. In un sacchetto vi sono palline indistinguibili fra loro al tatto, ma colorate in modo diverso. Alcune sono blu, altre rosse, altre verdi. Non ci sono palline di altri colori. La probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è  $1/2$ ; la probabilità di estrarre una pallina che non sia blu è  $4/5$ . Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Che cosa sai dire sul numero totale di palline contenute nel sacchetto? Secondo te, quale somma dovrebbero scommettere tre giocatori, ciascuno su un colore diverso, per incassare 350 Euro in caso di vincita? Giustifica la risposta.
  
9. L'estrazione di due carte da un mazzo di 40 carte può essere condotta in due modi differenti. Nel primo, si estrae a caso dal mazzo una carta e poi si estrae una seconda carta senza rimettere nel mazzo la prima. Nel secondo modo, dopo aver estratto la prima carta, questa viene rimessa

nel mazzo e quindi ne viene estratta una seconda. Per avere la maggior probabilità di estrarre due carte di cuori, quale modalità di estrazione sceglieresti? Giustifica la risposta.

10. Due sacchetti contengono cinque bussolotti ciascuno, all'interno dei quali è contenuta una lettera dell'alfabeto. Nel sacchetto A vi sono le cinque lettere della parola "pappa" e nel sacchetto B le cinque lettere della parola "posta". Viene estratta a caso una lettera dal sacchetto A e introdotta nel sacchetto B. In seguito viene estratta una lettera dal sacchetto B che viene introdotta in A. Qual è la probabilità che, effettuata l'esperienza a due prove descritte, la composizione dei due sacchetti sia uguale a quella originaria (ossia quella che essi possedevano prima che venisse effettuata l'esperienza a due prove)?

### Griglia di correzione

1.  $36/121$  e  $60/121$
2.  $4/25$  e  $12/25$
3. 2 bianche, 4 rosse, 6 nere
4.  $1/9$
5. No, le successive estrazioni settimanali al gioco del lotto sono eventi fra loro indipendenti.
6.  $1 - (9/20)(8/19)(7/18)$
7.  $7/8$
8.  $p(R) = 1/2$  ;  $P(V) = 3/10$ ;  $p(B) = 1/5$  . Possiamo però dire che le palline rosse sono il 50% del totale, che le blu sono il 20% e le verdi il 30%. Un giocatore che decidesse di puntare sull'evento "esce la pallina verde" dovrà quindi pagare un premio pari al 30% della somma che vincerebbe. Il 30% di 350 euro dà 105 euro. Il 50% di 350 euro dà 175 euro. Il 20% di 350 euro dà: 70 euro. Ovviamente  $70+105+175=350$ . Si può anche dire che le palline sono almeno 10.
9. È più conveniente la seconda modalità.
10.  $1/3$

## Elementi di prove di verifica

### Valutazione delle probabilità

#### Approccio frequentista

1. In una confezione sono contenute 50 lampadine di cui 5 difettose. Se ne prende una a caso: qual è la probabilità che sia difettosa? E se se ne prendono due, contemporaneamente, qual è la probabilità che siano entrambe difettose?
2. Da una indagine su una popolazione risulta che una persona su 20 è mancina. Qual è la probabilità che una persona, presa a caso in quella popolazione, non sia mancina?
3. Lancia 100 volte un dado a sei facce (puoi effettuare l'esperimento oppure fare una simulazione al computer). Qual è la frequenza relativa dell'evento *uscita del 6*? Qual è la probabilità dell'evento *uscita del 6* nel lancio di un dado? (Spiega le eventuali discordanze tra i due valori ottenuti).

#### Approccio classico

1. Un professore di matematica, in una classe composta da 25 alunni, per interrogare decide di lasciarsi guidare dal caso. Ha a disposizione un sacchetto che contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Decide di usarlo così come è ed estrae una pallina; se il numero non supera 25, interroga l'alunno che ha quel numero nell'elenco; altrimenti fa il prodotto delle cifre e interroga l'alunno che ha nell'elenco il numero corrispondente. Tutti gli alunni hanno la stessa probabilità di essere interrogati? Il professore interroga in ogni caso qualcuno? Qual è la probabilità che non interroghi nessuno?
2. Tre signori lasciano il loro cappello al guardaroba di un ristorante. Se, all'uscita, riprendono i loro cappelli a caso qual è la probabilità che nessuno riprenda il suo cappello? (Per rispondere considera che tale evento è quello contrario all'evento unione dei tre eventi: *il primo o il secondo o il terzo signore riprende il suo cappello*). Se i signori sono quattro la probabilità che nessuno riprenda il suo cappello aumenta o diminuisce? E se sono cinque ?

#### Approccio soggettivista

1. Considera gli eventi: *la squadra A vince la partita di calcio di domenica* e *la squadra A termina in vantaggio il primo tempo*. Tali eventi sono indipendenti o no? Se no, sono correlati positivamente o negativamente?
2. Supponi che in un *questionario* presentato alla tua classe si chieda di indicare l'anno di nascita di Dante Alighieri scegliendo tra 5 possibili risposte:
  - 753 a.C.
  - 825 d.C.
  - 1265 d.C.
  - 1321 d.C.
  - 1920 d.C.

Per ogni risposta indica qual è, secondo te, la probabilità che i tuoi compagni indichino quello come anno di nascita di Dante Alighieri. Giustifica le tue valutazioni secondo un tuo criterio relativo al livello medio di cultura dei tuoi compagni.

**Griglia di correzione**

1. 1/10; 4/490
2. 19/20
4. 1/30
5. 1/3 ; 3/8; 11/30