

Il nonio decimale

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze.</p> <p>Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura.</p> <p>Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze.</p>	<p>I numeri decimali e il calcolo approssimato.</p> <p>Rappresentazione dei numeri sulla retta.</p>	<p><u>Misurare</u></p> <p>Numeri e algoritmi</p>	<p>Fisica</p> <p>Chimica</p> <p>Laboratorio tecnologico-professionale</p>

Contesto

Strumenti di misura.

Il contesto cui ci si riferisce è quello della costruzione di uno strumento di misura al fine di comprenderne il principio di funzionamento.

Descrizione dell'attività

Con questa attività vogliamo far riflettere gli studenti su aspetti operativi come la costruzione di uno strumento di misura, su aspetti applicativi, come l'utilizzo di uno strumento di misura e su aspetti di significato, come la misura di una grandezza e la sua incertezza. Quindi si guidano gli studenti alla costruzione di un nonio decimale, con materiale povero e facilmente reperibile come il cartoncino.

Successivamente si riflette sullo strumento in sé, prima di passare al suo utilizzo.

È consigliabile iniziare l'attività con una lettura che contestualizzi storicamente la scelta di una unità di misura condivisibile a livello universale: il metro.

“Nel giugno del 1792, durante gli ultimi giorni della monarchia francese, mentre la rivoluzione elettrizzava il mondo con le sue promesse di eguaglianza, due astronomi partirono verso due direzioni opposte per una missione straordinaria. Jean-Baptiste-Joseph Delambre, erudito cosmopolita, partì da Parigi dirigendosi verso Nord, mentre Pierre-François-André Méchain, accorto e scrupoloso, si diresse verso sud. Entrambi lasciarono la capitale su una carrozza appositamente costruita e fornita degli strumenti scientifici più sofisticati allora disponibili, accompagnati da un assistente esperto. La loro missione consisteva nel misurare il mondo, o almeno quella parte dell'arco meridiano compresa tra Dunkerque e Barcellona. Il loro obiettivo era fissare la nuova unità di misura -il metro- in un diecimillesimo della distanza tra il Polo Nord e l'Equatore.

Il metro sarebbe stato eterno perché tratto dalla Terra, che a sua volta è eterna. Allo stesso modo, il metro sarebbe stato patrimonio di tutti gli esseri umani, proprio come la terra appartiene a tutti. Stando alle parole del loro rivoluzionario collega Condorcet -fondatore della “matematica sociale” e fautore di una visione ottimistica della storia- il sistema metrico-decimale era destinato a tutti gli uomini e a tutti i tempi” (tratto da La misura di tutte le cose di Ken Alder).

Prima fase

Occorrono due cartoncini rivestiti di carta millimetrata, uno di circa $3 \times 10 \text{ cm}^2$, l'altro di $3 \times 20 \text{ cm}^2$. Con il cartoncino più lungo si costruisce un regolo graduato in millimetri (di scala 10:1); con il secondo, della stessa scala, si traccia il nonio decimale (vedi figura).

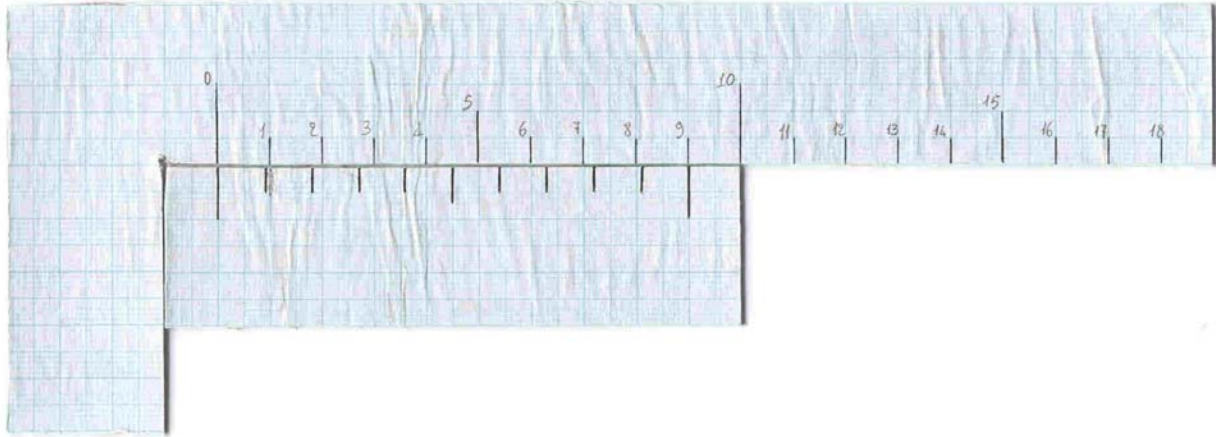


Figura 1

Seconda fase

L'insegnante pone agli studenti una serie di domande guidate al fine di far loro comprendere il funzionamento dello strumento costruito.

Proposta di lavoro

- Di quanto sono più piccole le divisioni del nonio rispetto a quelle del regolo?
- Si accosti ora il nonio al regolo in modo che lo zero del nonio coincida con un tratto del regolo.
- Di quanto è arretrata la seconda tacca del nonio rispetto a quella del regolo? E la terza? E la quarta?
- Di quanto deve avanzare lo zero del nonio perché il primo tratto del nonio stesso venga a coincidere con un tratto della scala principale? E il secondo? E il terzo?
- Sai spiegare il funzionamento del nonio?
- Qual è l'errore massimo che si può commettere nella lettura del nonio decimale?

Terza fase

Gli studenti verificano la conoscenza dello strumento in esperimenti di misurazione in laboratorio con l'aiuto anche degli insegnanti di fisica e chimica.

Situazione

Avete a disposizione tre gruppi di oggetti: uno di viti, uno di chiodi e uno di bulloni. Ciascun gruppo è composto di oggetti dello stesso tipo.

Proposta di lavoro

- Misurate con il nonio che avete costruito la lunghezza di ciascun oggetto di ogni gruppo.
- Rappresentate sulla retta dei numeri le misure che avete trovato, dopo aver scelto opportunamente l'unità di misura sulla retta stessa.
- Determinate la media aritmetica delle misure di ciascun gruppo, trovando anche l'intervallo di variazione (la differenza tra la misura più grande e la misura più piccola), e l'incertezza assoluta di misura (come la metà dell'intervallo di variazione).
- Calcolate l'incertezza relativa della misura di lunghezza in ciascun gruppo (come rapporto tra l'incertezza assoluta di misura e la media aritmetica).
- Quale unità di misura usate per: la media aritmetica, l'incertezza assoluta e l'incertezza relativa?

Possibili sviluppi

- Si utilizza il nonio decimale o il nonio ventesimale da laboratorio, per effettuare misure di lunghezze.
- Oppure si utilizza un calibro per misure di diametri di cavità.
- Dal punto di vista dei significati matematici, si può effettuare un'attività volta a misurare più volte la stessa grandezza (anziché molte grandezze), per vedere come si possono ottenere diverse misure della stessa grandezza, onde elaborare poi una misura più probabile tramite il calcolo della media.
- Un ampliamento possibile è quello di coinvolgere gli studenti in aspetti di progettazione, dando loro compiti di costruzione di oggetti servendosi di questi strumenti di misura, dopo aver ricercato sul territorio quale uso ne venga fatto da parte del mondo artigianale.

Camminiamo e corriamo

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura.</p> <p>Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze.</p> <p>Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software.</p> <p>Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineare, quadratica).</p>	<p>Numeri decimali e calcolo approssimato.</p> <p>Il piano cartesiano.</p> <p>Distanza tra due punti.</p> <p>Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti.</p> <p>Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.</p>	<p><u>Misurare</u></p> <p>Numeri e algoritmi</p> <p>Spazio e figure</p> <p>Relazioni e funzioni</p> <p>Argomentare, congetturare, dimostrare</p> <p>Risolvere e porsi problemi</p> <p>Laboratorio di matematica</p>	<p>Fisica</p>

Contesto

Moti.

Il contesto è quello dei moti, con particolare attenzione a: aspetti del grafico (p. es. crescita e decrescita, concavità), andamenti (p.es. lineare, costante, quadratico), modelli funzionali.

Descrizione dell'attività

Si presenta una serie di attività, in ognuna delle quali gli studenti prima congetturano su una situazione di moto, compilando singolarmente una scheda di lavoro, quindi realizzano l'esperienza raccogliendo i dati con sensore e calcolatrice, lavorando come gruppo-classe coordinato dall'insegnante.

Il lavoro consiste nella realizzazione di un tipo di moto, da parte di uno o più studenti, mentre il sensore è collegato alla calcolatrice e questa a un view-screen, in modo che tutta la classe possa seguire su uno schermo il generarsi del grafico del moto realizzato e confrontarlo con quello congetturato in precedenza.

All'esperienza segue una discussione matematica con tutta la classe, coordinata dall'insegnante, volta a confrontare le varie posizioni degli studenti e a convergere verso un significato comune e condiviso per l'esperienza e per il grafico. Se necessario, l'insegnante istituzionalizza il sapere costruito socialmente, introducendo terminologia o concetti unificanti.

L'attenzione è focalizzata sui modi in cui gli studenti costruiscono il significato del grafico, in termini di ordinata (posizione rispetto al sensore) in funzione dell'ascissa (tempo).

I contenuti sviluppati sono: il moto e le sue caratteristiche (stato di quiete e di moto, necessità di un sistema di riferimento), le rappresentazioni grafiche di moti nel piano cartesiano, attraverso l'uso di nuove tecnologie per la rilevazione dei dati spazio/tempo relativi al moto.

I nodi concettuali messi in gioco in queste attività sono: l'aspetto variazionale di una funzione, ossia la dipendenza dell'ordinata in funzione dell'ascissa, analizzata non solo attraverso i valori assunti dall'ordinata, ma anche in termini di variazione e variazione della variazione (pendenza e suo tasso

di cambiamento).

È opportuno iniziare con una breve lettura tratta da *I sistemi di misura* di M. Fontana e G. Ghiandoni per far riflettere gli alunni sul fatto che l'unità di misura del tempo non è basata sul sistema decimale come per altre grandezze.

“Il nostro cuore batte una volta al secondo circa. Un secondo è un sessagesimo di minuto (che è per esempio il tempo che impieghiamo a lavarci i denti) che è a sua volta un sessagesimo dell'ora (il tempo di un pranzo al ristorante). Perché i sessagesimi invece delle potenze di 10 cui ci siamo abituati? La responsabilità sembra essere dei Sumeri (antico popolo che abitava la zona del Medio Oriente attualmente occupata dalla Siria e dall'Iraq), che scelsero il numero 60 come riferimento perché divisibile per il massimo numero di interi compresi fra 1 e 9 : 2, 3, 5, 6”.

Prima fase

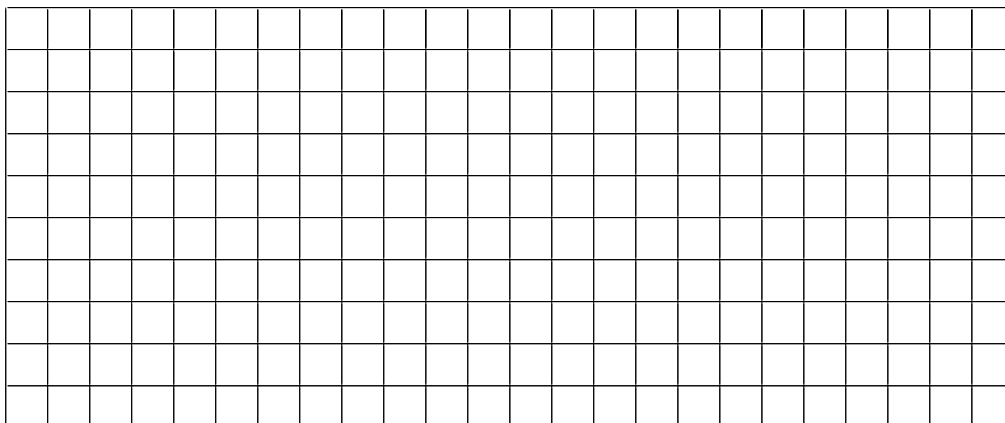
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di costruire individualmente un grafico prima di effettuare un'esperienza, di descriverlo a parole e di argomentare sulla ragione delle scelte fatte. Questo per farli riflettere sulle grandezze in gioco, sulle unità di misura, sulla forma del grafico, sugli aspetti quantitativi e variazionali del grafico, ecc.

Situazione

Supponiamo di camminare in linea retta a passo costante percorrendo 4 metri in 3 secondi e poi di fermarci per altri 3 secondi.

Proposta di lavoro

- Dopo aver tracciato il sistema di assi cartesiani nello spazio qui sotto e aver scelto opportune unità di misura, costruisci il grafico che rappresenti questa camminata.
- Descrivi il grafico che hai costruito.
- Spiega perché lo hai fatto in quel modo.



Seconda fase

La seconda fase mira alla costruzione e all'interpretazione di grafici a partire da moti realizzati dagli studenti. Si tratta di una fase sperimentale, in cui si collega un sensore di moto a una calcolatrice. Si effettua il moto descritto nella proposta di lavoro, mentre la calcolatrice visualizza sullo schermo il grafico della legge oraria.

L'insegnante quindi guida una discussione, ponendo domande-stimolo e raccogliendo gli interventi degli studenti. Per esempio, essi possono giungere alla conclusione che il tratto orizzontale corrisponda a una fermata, in quanto lo spazio non cambia mentre il tempo avanza, il tratto obliquo “in su” corrisponda a un allontanamento dal sensore, “in giù” a un avvicinamento al sensore, ecc.

Gli interventi dell'insegnante, in questa fase di discussione, non sono mai di carattere informativo,

teorico o autoritario, ma di stimolo alla riflessione, per esempio: “Quali sono le unità di misura? Che cosa sono quella x e quella y che compaiono sul display? Perché il grafico è venuto così? E se Sabrina si fosse fermata a 3 metri dal sonar che cosa sarebbe cambiato nel grafico? Si potrebbe ottenere una linea sotto l’asse delle x ? Si potrebbe pensare che la linea del grafico parta a sinistra dell’asse y ?”

Altre attività dello stesso tipo di quella vista sopra, che si possono eseguire in modo analogo, ossia passando attraverso una prima fase di congettura e una seconda fase di sperimentazione diretta del moto, sono le seguenti:

Proposta di lavoro

- Riproduci un moto uniforme camminando davanti al sensore per alcuni secondi; fermati per 4 secondi e poi torna indietro con la stessa andatura.
- Riproduci un moto accelerato correndo davanti al sensore.

Terza fase

L'esperienza può proseguire con un'attività di approfondimento, volta a costruire uno strumento matematico interpretativo di un grafico di moto, ossia la pendenza della retta tangente, ottenuta in modo approssimato dalla pendenza di una retta secante per due punti vicini.

Viene effettuata in modo guidato dall'insegnante, con calcolatrice, sensore e view-screen, quindi gli studenti si dividono a gruppi e lavorano alla seguente consegna:

Proposta di lavoro

Misura

A rotazione camminate o correte nel corridoio in modo da riprodurre i seguenti moti (per il punto 3 usate la pallina di gomma da noi fornita):

1. moto uniforme (avanti e indietro)
2. moto accelerato
3. moto di una palla che rimbalza
4. moto periodico

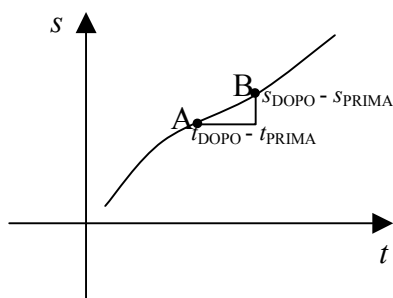
Dati: tabella e grafico

Per ogni moto di cui ricevete i dati, avete un grafico e una tabella con i valori del tempo (in s) e della distanza (in m) - ogni volta dovete costruirvi la tabella e darle un nome (moto1, moto2, moto3, moto4).

- a) Descrivete “a parole” il tipo di moto che avete fatto nel corridoio.
- b) Utilizzando il grafico e/o la tabella, provate a descrivere “a parole” come varia lo spazio rispetto al tempo (i dati dello spazio crescono, non crescono, crescono in modo regolare, crescono di quantità diverse...)
- c) Analizzate il grafico.
 - Assomiglia a una retta?
 - Assomiglia a una curva?
 - Curva che cresce? Decresce? ...

Modello

- d) Osservate attentamente le due figure seguenti.
 - Nella figura 1 è rappresentato un moto qualunque di un oggetto: la curva fornisce la legge oraria del moto, cioè fornisce ad ogni istante la posizione dell’oggetto.
 - Nella figura 2 è invece rappresentata una tabella simile a quelle che voi avete costruito. t_{DOPO} ed s_{DOPO} sono due valori che compaiono sia sul grafico che sulla tabella.



$A(t_{PRIMA}, s_{PRIMA})$
 $B(t_{DOPO}, s_{DOPO})$

Tempo (t)	Spazio (s)
c1	c2
...	...
...	...
t_{PRIMA}	s_{PRIMA}
t_{DOPO}	s_{DOPO}
...	...
...	...

Figura 1

Tabella 1

Considerate il numero m dato da:

$$m = \frac{(s_{DOPO} - s_{PRIMA})}{(t_{DOPO} - t_{PRIMA})}$$

Tale numero ci dice come varia (cresce, decresce, ...) lo spazio in funzione del tempo, quindi è un indicatore significativo dell'andamento del grafico.

Provate a studiarlo per i vari moti che avete riprodotto, servendovi del grafico e/o della tabella sulla vostra calcolatrice.

Quarta fase

La quarta fase mira alla progettazione e realizzazione di moti corrispondenti a grafici dati dall'insegnante.

Situazione-problema

Riproduci davanti al sensore i moti che abbiano grafici il più possibile simili a quelli disegnati qui sotto.

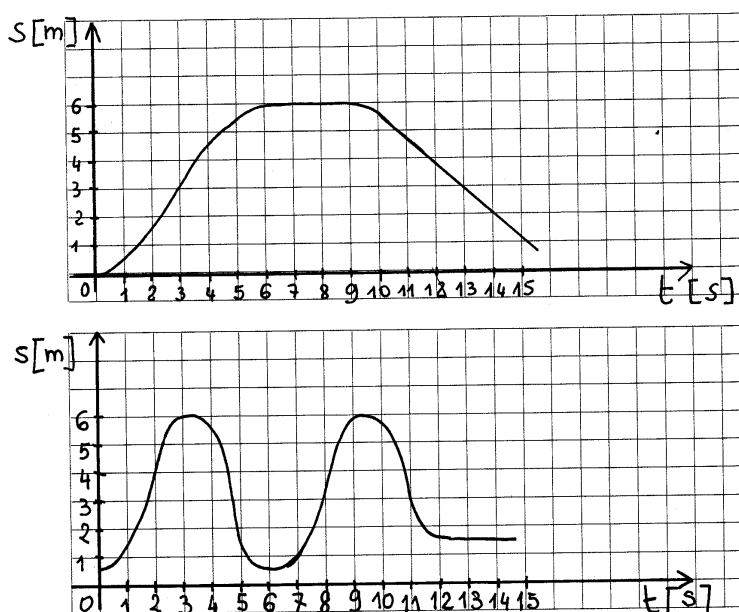


Figura 2

Possibili sviluppi

Questa serie di attività si può sviluppare in due direzioni: da una parte, la continuazione degli esperimenti di moto, utilizzando camminate varie, giocattoli come per esempio automobiline, palloni ecc., con attenzione alle caratteristiche del grafico che si ottiene, dall'altra la modellizzazione in termini simbolici, ossia la determinazione di famiglie di funzioni come quelle lineari, legate a moti uniformi, quelle quadratiche, legate a moti con accelerazione costante, e così via.

Inoltre, è possibile utilizzare altri sensori oltre a quello di moto, per modellizzare fenomeni come riscaldamento o raffreddamento di corpi (sensore di temperatura), variazione di pressione (sensore di pressione). L'attenzione in queste attività è posta più sul grafico e sulla funzione che modella che non sul fenomeno fisico in sé e sulle grandezze coinvolte.

Elementi di prove di verifica

1. Come cammino?

Supponiamo che io cammini nel corridoio e che il sensore rilevi i dati dello spazio e del tempo del mio movimento. La legge oraria del moto è la legge che esprime come varia la mia posizione s al variare del tempo t . Supponiamo che all'istante 0 io sia davanti al sensore, quindi posso dire che, quando $t = 0$, $s = 0$. Quando comincio a muovermi, in 1 secondo percorro 0,5 metri, in 2 secondi 2 metri e in 3 secondi 4,5 metri.

- Supponendo di muovermi con questa modalità, quanti m avrò percorso dopo 5 s?
- Quanti m avrò percorso dopo 8 s? Riportate i dati che avete in una tabella e in un grafico.
- Provate a spiegare “a parole” cosa si deve fare per trovare quanti m vengono percorsi in un numero qualsiasi k di secondi.
- Scrivete una legge generale che spieghi come varia la posizione s al variare del tempo t :
 $s = \dots\dots$

2. Quale aumento?

Considerate i seguenti grafici e rispondete alle domande.

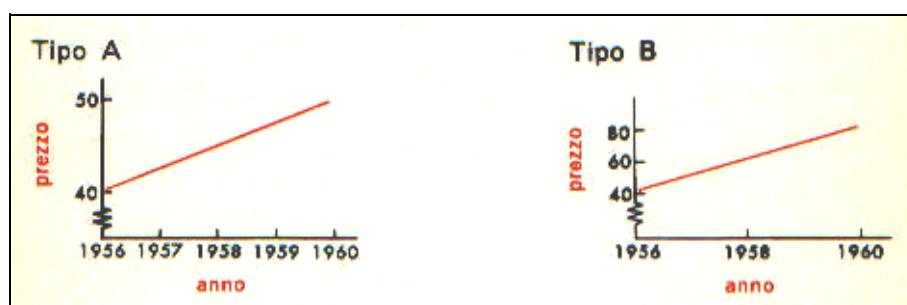


Figura 3

I grafici rappresentano l'aumento di prezzo (in lire) che due prodotti (prodotto di tipo A e prodotto di tipo B) hanno subito negli anni dal 1956 al 1960.

- Quale prodotto ha avuto il maggiore aumento annuo di prezzo?
- Quale è aumentato maggiormente nel biennio 1958-1960?

I tre punti sono allineati?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software. Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure con particolare attenzione alle cifre significative.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. Rappresentazione dei numeri sulla retta. Lunghezze. Il piano cartesiano: il metodo delle coordinate. Distanza fra due punti. Relazioni d'ordine.	<u>Misurare</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	Disegno tecnico

Contesto

Piano cartesiano.

Il contesto è quello del piano cartesiano, con particolare attenzione al calcolo delle lunghezze dei segmenti. È importante che gli studenti che utilizzano le calcolatrici grafiche affrontino le questioni riguardanti il problema delle approssimazioni.

Descrizione dell'attività

Questa attività mette in evidenza le difficoltà che possono incontrare gli studenti che usano uno strumento tecnologico che consente loro di lavorare sia in modalità esatta sia in modalità approssimata. Si lavora sul piano cartesiano e si utilizza unicamente una funzione distanza costruita insieme agli studenti sfruttando le potenzialità di programmazione della calcolatrice.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti di rappresentare tre punti sul piano cartesiano utilizzando il foglio a quadretti del quaderno: $A(-4, -2)$, $B(2, 3)$, $C(4, 5)$ e pone la seguente domanda: i tre punti sono allineati?

Ricorda loro che tre punti A , B , C sono allineati (e B è compreso tra A e C) se

$$\text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, C) = \text{dist}(A, C) \quad (*)$$

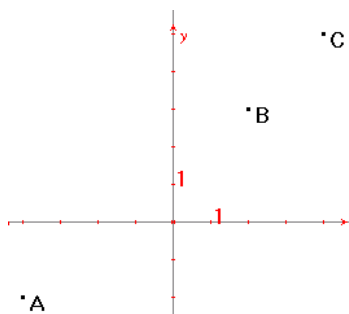


Figura 1

Per $\text{dist}(A, B)$ si intende la distanza tra i punti A e B calcolata con il Teorema di Pitagora nel piano cartesiano, facilmente implementabile su una calcolatrice grafico-simbolica.

Gli studenti, che hanno a disposizione una calcolatrice grafico-simbolica, vengono divisi in due gruppi: al primo gruppo viene data la consegna di eseguire i calcoli in modalità esatta, il secondo gruppo dovrà invece approssimare ciascun risultato alla prima cifra decimale. A quel punto l'insegnante chiede ai due gruppi la risposta al quesito.

I Gruppo

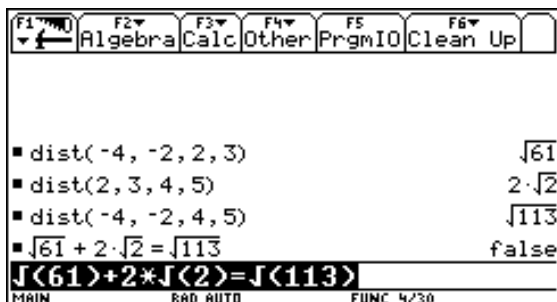


Figura 2

II Gruppo

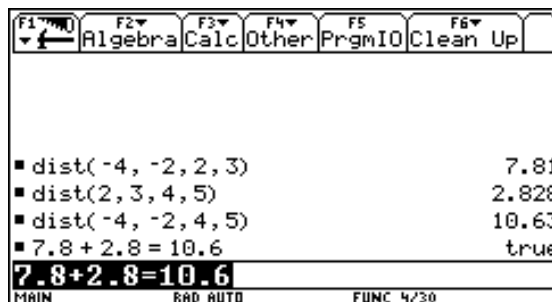


Figura 3

I risultati sono chiaramente in contrasto e quindi è necessario approfondire la questione dell'allineamento, solo in apparenza semplice.

Seconda fase

- A questo punto l'insegnante interviene presentando le due seguenti figure, che sfruttano le diverse possibilità di rappresentazione dello strumento.

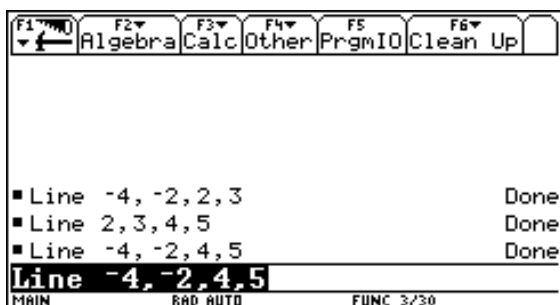


Figura 4

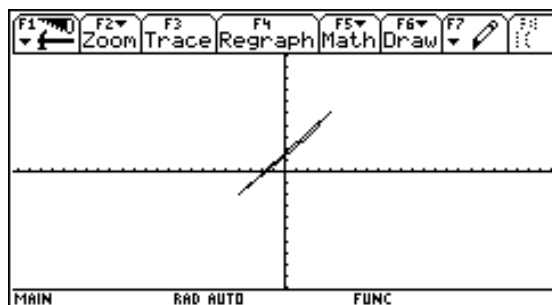


Figura 5

Osservando la figura 5 gli studenti si convincono facilmente che i tre punti sono i vertici di un triangolo molto "schiacciato". Quindi ha giocato un ruolo negativo l'approssimazione introdotta.

- L'insegnante propone allora la stessa questione con un'altra terna di punti sicuramente allineati: $A(-1, -1)$, $B(2, 2)$, $C(15, 15)$, precisando agli studenti che, quando lavorano in modalità approssimata, possono scegliere il numero di cifre decimali da utilizzare. A questo punto i risultati che si ottengono sono ancora differenti.

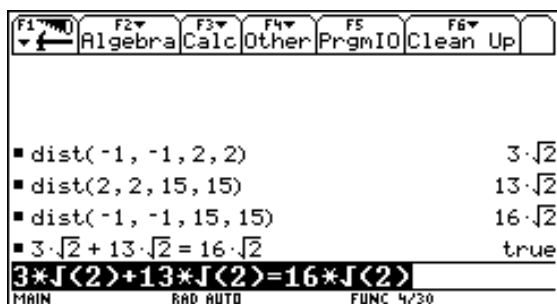


Figura 6

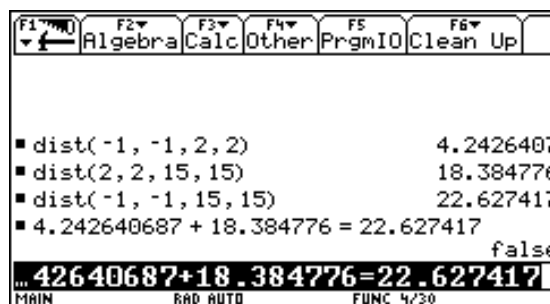


Figura 7

Si invitano quindi gli studenti a riflettere sulla domanda “Quante sono le cifre decimali significative?”. Dopo aver dato spazio ai ragazzi, che dopo la prima fase si erano convinti che l’errore era dovuto al fatto che si era considerata una sola cifra decimale e che adesso, invece, hanno rivisto le loro convinzioni alla luce dell’ultimo risultato, l’insegnante potrà affermare in modo categorico che l’unica risposta veramente corretta è: “Dipende!”.

Certamente questa proposta di lavoro non ha come obiettivo quella di confondere le idee agli studenti o di lasciare aperta la questione dell’allineamento di tre punti. Vuol essere, invece, il punto di partenza per due tipi di riflessione: una di carattere più prettamente matematico ed una di carattere più applicativo. In primo luogo occorre che gli studenti facciano riferimento al significato dell’allineamento, in quanto tre punti distinti sono allineati se uno di essi appartiene alla retta per gli altri due. Per verificare questo fatto si può scegliere come strumento matematico quello della distanza, secondo la relazione (*). In secondo luogo, volendo verificare questa relazione facendo uso di uno strumento di calcolo automatico, occorre prestare attenzione all’ambiente e alle modalità di lavoro in cui si opera. Come si è visto nella prima terna di punti (opportunamente scelta), in modalità esatta la relazione (*) non è soddisfatta, mentre lo è in modalità approssimata, invece nella seconda terna di punti la situazione è ribaltata. Queste attività dovrebbero indurre gli studenti a far sempre riferimento alla teoria che soggiace all’ambiente scelto e alla modalità di calcolo utilizzata, per poter essere sicuri dell’attendibilità dei risultati.

Possibili sviluppi

- Preparazione di un programma che permetta di lavorare sia nella modalità esatta sia nella modalità approssimata in modo da confrontare i risultati nelle diverse situazioni.
- Affrontare la stessa situazione problematica nel piano cartesiano risolvendola con lo strumento teorico della pendenza di una retta per due punti.
- Affrontare la stessa situazione problematica nel piano euclideo senza riferimento cartesiano e senza metrica.
- Analisi di situazioni analoghe nello spazio.

In che modo si cresce?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure.</p> <p>Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software.</p> <p>Costruire modelli a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni.</p>	<p>Rappresentazioni scientifica ed esponenziali dei numeri razionali.</p> <p>Rappresentazione dei numeri sulla retta.</p> <p>Lunghezze e aree relative ai poligoni.</p> <p>Funzioni elementari.</p>	<p><u>Misurare</u></p> <p>Numeri e algoritmi</p> <p>Spazio e figure</p> <p>Relazioni e funzioni</p> <p>Argomentare, congetturare, dimostrare</p> <p>Risolvere e porsi problemi</p>	

Contesto

Figure geometriche.

Il contesto è quello delle figure geometriche, con particolare attenzione ai problemi relativi al calcolo delle aree.

È possibile affrontare situazioni problematiche che coinvolgono funzioni complesse già nel biennio della scuola superiore. Infatti uno strumento tecnologico integrato come una calcolatrice grafico-simbolica consente diversi tipi di rappresentazione (numerica, algebrica, grafica), creando collegamenti significativi all'interno dello stesso concetto matematico. Ulteriori vantaggi dello strumento utilizzato sono da ritrovare nella possibilità di amplificare e riorganizzare gli aspetti tradizionali del processo di insegnamento-apprendimento e nel permettere agli studenti di sperimentare una nuova "realtà matematica".

Descrizione dell'attività

In questa attività si mettono in evidenza i due modi in cui gli studenti collegano tra loro le rappresentazioni consentite dallo strumento utilizzato: un modo meccanico-algebrico in cui gli studenti combinano velocemente le due rappresentazioni senza che ci sia sotto un pensiero del tutto organizzato; un metodo in cui si recuperano pienamente i significati: nel caso specifico il misurare. Gli studenti devono già aver fatto pratica dell'uso delle calcolatrici grafiche. Inoltre l'insegnante deve essere consapevole della necessità di mantenere l'inter-relazione tra la rappresentazione grafica e il modello algebrico del fenomeno.

Prima fase

L'insegnante propone alla classe, precedentemente suddivisa in piccoli gruppi, la seguente situazione che riguarda i rettangoli che crescono.

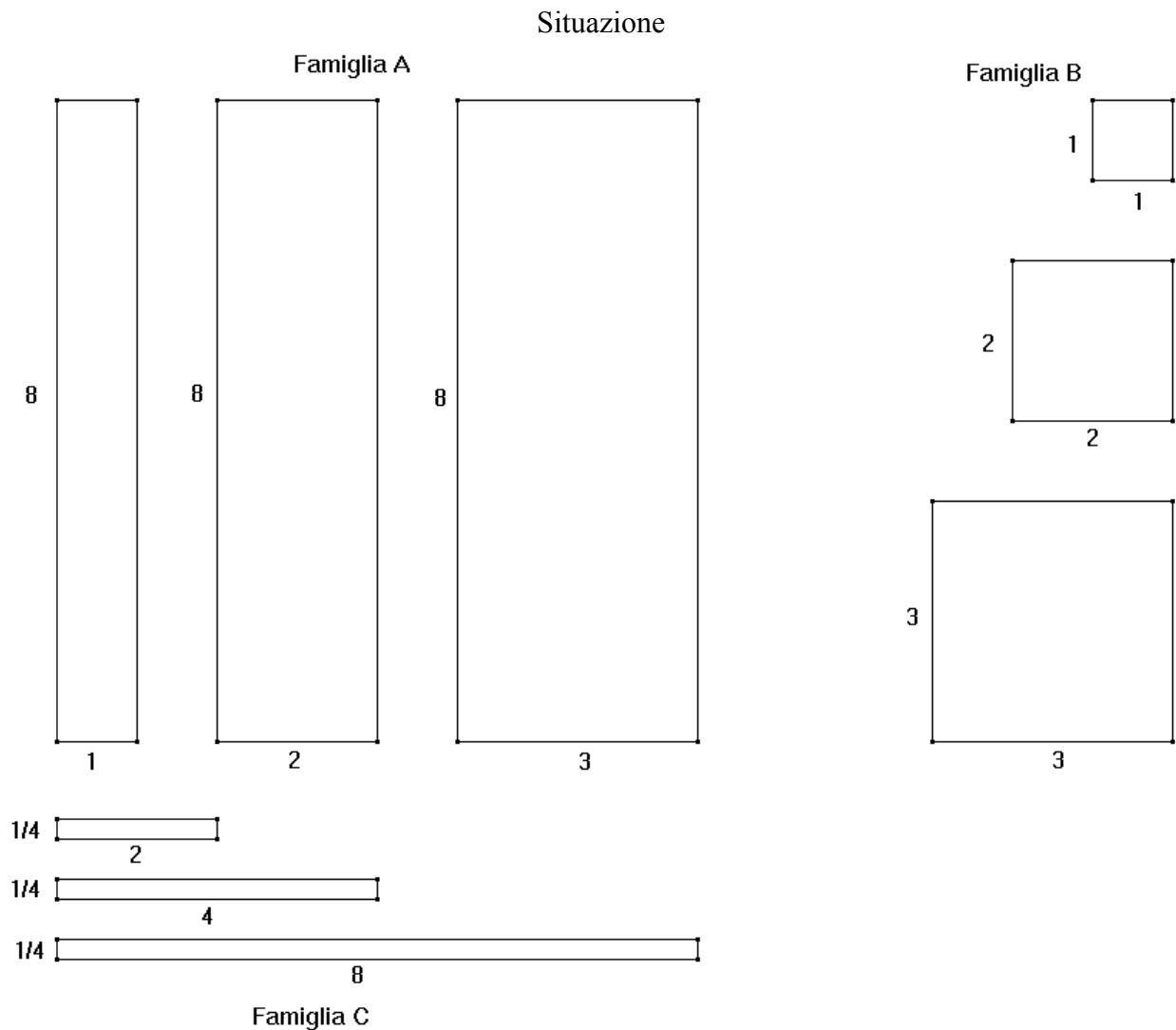


Figura 1

Nella famiglia A la larghezza dei rettangoli cresce di una unità ogni anno, mentre la lunghezza mantiene il valore costante di 8 unità. Nella famiglia B la larghezza e la lunghezza dei rettangoli crescono di una unità ogni anno. Nella famiglia C la lunghezza raddoppia ogni anno, mentre la larghezza resta sempre uguale a $\frac{1}{4}$.

Proposta di lavoro

Formulate varie ipotesi riguardanti le seguenti questioni:

- 1) Confrontate le aree delle tre famiglie di rettangoli negli anni. Quali sono le situazioni iniziali? Quale famiglia (o famiglie) “supera” le altre famiglie (o famiglia) e quando?
- 2) In quanti anni l’area dei rettangoli di ogni famiglia supererà le 1000 unità quadrate?

Adesso verificate le vostre ipotesi con le calcolatrici grafiche.

Seguite queste indicazioni:

- Cercate di essere più accurati possibile.
- Scrivete una relazione per ogni gruppo.
- Descrivete le vostre congetture esplicitando su cosa si sono basate e verbalizzate tutte le discussioni all’interno del gruppo.
- Discutete il modo in cui avete risolto il problema e l’uso che avete fatto della calcolatrice.

Seconda fase

L'insegnante discute con la classe le congetture formulate e le strategie adottate. Esperienze precedenti hanno evidenziato diverse situazioni tipiche. Gli studenti riportano, nelle loro relazioni, che nell'ottavo anno i tre rettangoli (uno per ogni famiglia) hanno la stessa area e che da quell'anno in poi la famiglia C si distacca dalla famiglia A, mentre la famiglia B rimane nel mezzo. La situazione ottenuta con l'uso ripetuto della calcolatrice per le rappresentazioni grafiche è in contrasto, però, con ciò che avevano supposto intuitivamente alla luce dei primi calcoli mentali, ossia che fosse la famiglia A o la famiglia B a crescere più velocemente.

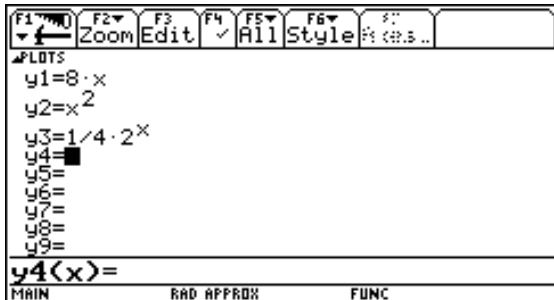


Figura 2

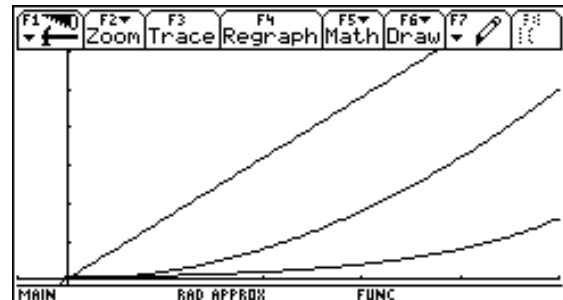


Figura 3

L'interazione con lo strumento informatico ha giocato un ruolo fondamentale nel convincere gli studenti della differenza sostanziale fra i tre modelli di crescita.

Le schermate che seguono sono alcune di quelle scelte nei gruppi come più significative del percorso di ricerca.

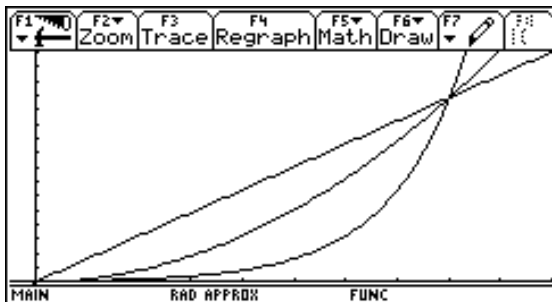


Figura 4

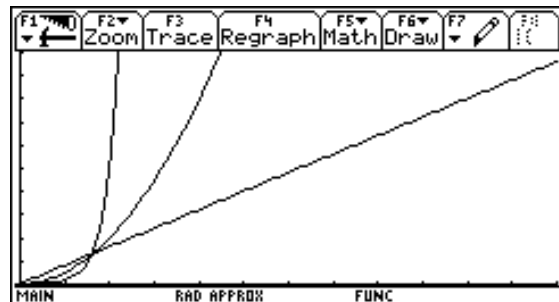


Figura 5

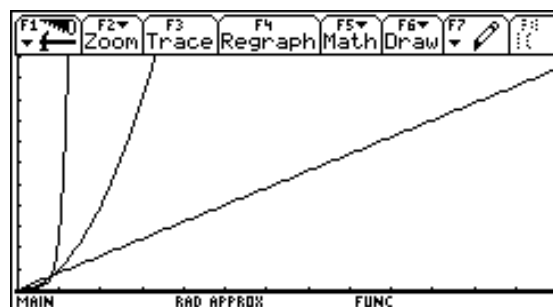


Figura 6

Le ultime due schermate sotto riportate sono prodotte dall'insegnante. La figura 8 è quella sulla quale le osservazioni degli studenti sull'ordine di grandezza della variabile trovano la conferma numerica dei risultati dedotti per via grafica.

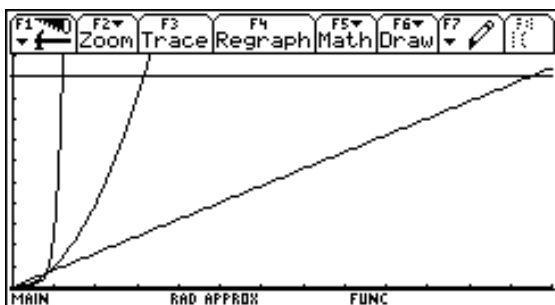


Figura 7

x	y1	y2	y3
12.	96.	144.	1024.
30.	240.	900.	2.6844E8
48.	384.	2304.	7.037E13
66.	528.	4356.	1.845E19
84.	672.	7056.	4.836E24
102.	816.	10404.	1.268E30
120.	960.	14400.	3.323E35
138.	1104.	19044.	8.711E40

x=12.

Figura 8

Possibili sviluppi

- Costruire modelli in ambito geometrico che mettano in relazione lunghezze (lati, perimetri, ...), aree (superfici laterali, superfici totali, somme di superfici, ...), volumi (somme di volumi, ...).
- Esplorazione di figure per determinare condizioni di massimo o di minimo. Un esempio può essere il seguente problema: è dato un segmento di lunghezza L . Costruisci due quadrati con i lati adiacenti sul segmento, e trova la configurazione che ha perimetro minimo. Studia come varia il perimetro della configurazione e rappresentalo con una formula.

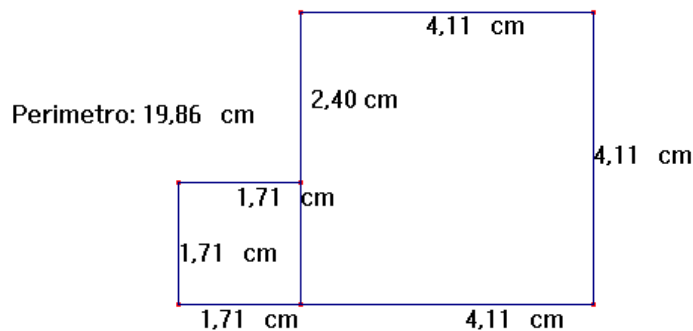


Figura 9

È utile in questo caso sfruttare le potenzialità di un software di geometria dinamica per l'esplorazione (con la funzione trascinalamento) della configurazione in esame. L'ambiente calcolatrice contenuto nel software viene utilizzato per effettuare calcoli sulle misure coinvolte. In tal modo gli studenti possono osservare le variazioni delle lunghezze dei lati e del perimetro e fare le loro congetture sulla configurazione che corrisponde al perimetro minimo.

Elementi di prove di verifica

1. Una famiglia numerosa

I batteri si riproducono per divisione cellulare. Supponiamo di avere una famiglia di batteri caratterizzata dal fatto che essi si dividono ad ogni secondo. Se all'inizio abbiamo un solo batterio, possiamo dire che all'istante iniziale $t = 0$, $n = 1$, dove t è il tempo ed n il numero di batteri.

- Supponendo che nessun batterio muoia, quanti batteri ci saranno nella nostra popolazione dopo 10 s?
- Quanti batteri ci saranno dopo 100 s? Riportate i dati che avete in una tabella e in un grafico.
- Spiegate a parole come fareste a calcolare il numero n dei batteri dopo un numero qualsiasi h di secondi.
- Scrivete una legge generale che spieghi come varia il numero di batteri al variare del tempo t :
 $n = \dots\dots$
- Confrontate ora le due leggi che avete ottenuto, sulla base delle tabelle, dei grafici e delle formule.
Hanno analogie? Differenze? Spiegate la vostra opinione.

Quante stelle possiamo vedere in cielo?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Conoscere ed usare il sistema internazionale delle unità di misura.</p> <p>Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze.</p> <p>Stimare l'ordine di grandezza di una misura</p>	<p>Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.</p> <p>Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.</p> <p>Proprietà dei principali indici statistici di posizione e di dispersione.</p>	<p><u>Misurare</u></p> <p>Numeri e algoritmi</p> <p>Spazio e figure</p> <p>Dati e previsioni</p> <p>Risolvere e porsi problemi</p> <p>Laboratorio di matematica</p>	<p>Astronomia</p> <p>Scienze</p> <p>Laboratorio di fisica-chimica</p>

Contesto

Il cielo.

Il contesto dell'attività è quello dell'osservazione del cielo. Si tratta in particolare di stimare in modo ragionevole il numero di stelle osservabili ad occhio nudo in un certo luogo, servendosi di uno strumento appositamente costruito.

Descrizione dell'attività

Questa attività può essere introdotta nell'ambito del primo biennio, dal momento che richiede conoscenze di aritmetica e di geometria del tutto elementari.

Prerequisiti: angoli e loro misura, angoli solidi, proporzionalità tra grandezze, frazioni algebriche.

Obiettivi: utilizzare semplici concetti aritmetici e geometrici in un contesto significativo, preso dalla realtà, coinvolgendo direttamente gli studenti in un'attività concreta di misurazione, al fine di ricavare un risultato non facilmente prevedibile a priori.

Prima fase

La sollecitazione del problema prevede una prima ricognizione delle convinzioni degli studenti, che vengono invitati a prevedere, magari dopo aver osservato in prima persona il cielo notturno, quale possa essere il numero approssimativo di stelle visibili in cielo durante una notte limpida. Si tratta di una richiesta estremamente semplice, che però può risultare molto complessa da soddisfare, poiché gli studenti si rendono subito conto di non avere punti di riferimento per rispondere in modo attendibile. In questa fase l'insegnante conduce una discussione collettiva che coinvolge tutta la classe, volta a focalizzare l'attenzione sia sulla stima del numero di stelle, sia sui metodi e sugli strumenti che possono essere adottati per ottenere questa stima. E' opportuno che, alla fine di tale discussione, l'insegnante archivi le proposte e le stime degli studenti, per poi confrontarle alla fine dell'attività con i risultati dell'esperimento.

Seconda fase

Dopo aver preso coscienza del problema, si passa alla fase operativa, che prevede di affrontare la questione mediante un'attività concreta di osservazione del cielo. Si propone a questo scopo la

costruzione di un tubo per osservazioni, di raggio interno R e di lunghezza L , aperto ad entrambe le estremità. Il tubo viene dipinto di nero opaco all'interno e l'estremità in corrispondenza della quale gli studenti devono collocare un occhio, viene chiusa con un piccolo coperchio che presenta un foro centrale di circa 10 mm di diametro. Per realizzare osservazioni accurate è opportuno che il tubo venga fissato ad un treppiede.

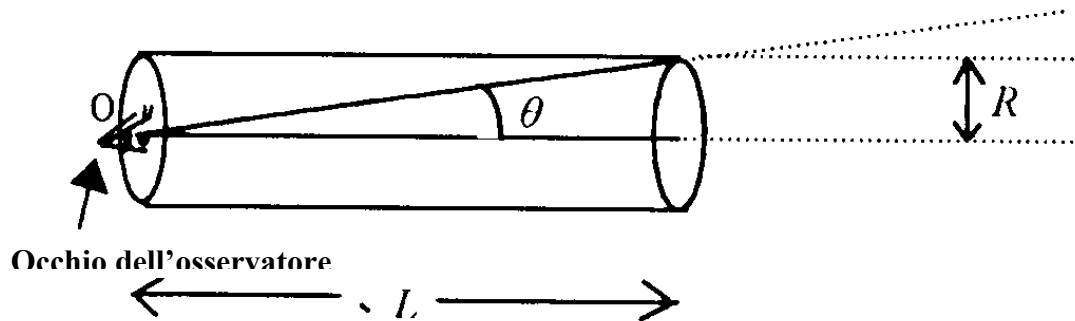


Figura 1

Si verifica subito che la misura del raggio del tubo viene vista sotto una dimensione apparente $\vartheta = \frac{R}{L}$ e che l'angolo solido sotto il quale gli studenti vedono l'estremità del tubo opposta a quella

in cui collocano il proprio occhio, è $\Omega = \frac{\pi R^2}{L^2}$. Questa formula indica di conseguenza la porzione di cielo osservabile, che corrisponde per l'appunto ad un opportuno angolo solido: tale grandezza geometrica trova in questo esempio, come del resto avviene in generale in astronomia, una applicazione significativa. Poiché l'angolo solido Ω_1 corrispondente alla totalità della sfera celeste è 4π steradiani (sr), si ricava subito una relazione di proporzionalità tra l'angolo solido delimitato dal tubo e l'angolo solido corrispondente alla totalità del cielo: $\frac{\Omega}{\Omega_1} = \frac{R^2}{4L^2}$.

Terza fase

Dal luogo di osservazione scelto si punta il tubo secondo una certa direzione e, senza muoverlo, si conta il numero n di stelle visibili ad occhio nudo entro l'apertura del tubo (in queste condizioni il numero di stelle è generalmente piccolo e facile da determinare). In seguito si punta il tubo in un'altra direzione e si ripete il conteggio. È consigliabile eseguire almeno 15 conteggi, in riferimento a diverse direzioni di osservazione.

Quarta fase

Si passa quindi all'elaborazione dei risultati, con il calcolo della media aritmetica dei valori raccolti nelle diverse operazioni di conteggio. Questo valore rappresenta il numero medio \bar{n} di stelle visibili entro l'angolo solido Ω precedentemente definito. Poiché si ragiona in base al numero medio di stelle osservabili entro il dato angolo solido, il numero di stelle osservabili è direttamente proporzionale all'angolo solido di osservazione. Si ricava quindi una stima del numero N di stelle visibili ad occhio nudo nella totalità della sfera celeste: $N = \frac{4L^2\bar{n}}{R^2}$.

(Per dare un'idea di quello che ci si può aspettare da un esperimento del genere, si segnala che, con un tubo di lunghezza $L = 40,0$ cm e raggio $R = 3,0$ cm, in presenza di buone condizioni di osservazione si può prevedere un valore per \bar{n} pari a circa 8,1, il che conduce ad una stima per N pari a circa 5800).

Quinta fase

Vale la pena soffermarsi a commentare ed analizzare i risultati ottenuti in base a varie considerazioni, per abituare gli studenti a sviluppare un certo senso critico nei confronti dei risultati numerici che un'attività di misurazione permette di ricavare. In primo luogo è evidente che, trovandosi sulla superficie terrestre, in un dato istante è visibile soltanto una metà della sfera celeste, pertanto in media ci sono $\frac{N}{2}$ stelle accessibili a un osservatore ad occhio nudo, essendo N il dato sperimentale ottenuto.

Possibili sviluppi

In collegamento con l'insegnamento di Scienze o di Laboratorio di Fisica-Chimica, si può ampliare il discorso ed affrontare la questione dell'influenza dell'atmosfera terrestre sull'assorbimento della luce stellare, il che riduce l'effettivo numero di stelle visibili ad occhio nudo, considerando inoltre gli effetti dovuti alle condizioni atmosferiche, all'eventuale inquinamento dell'aria ed alla specifica collocazione del sito di osservazione.

A tal scopo si riporta la seguente scheda di approfondimento.

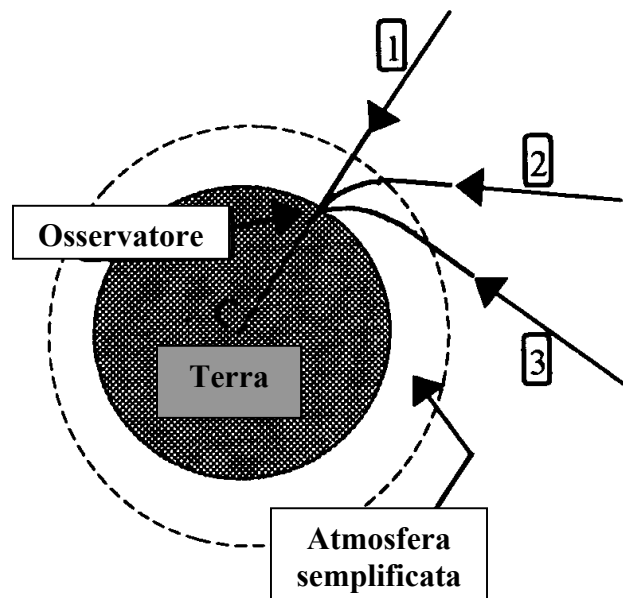


Figura 2

L'influenza dell'atmosfera terrestre.

Nella figura 2 sopra riprodotta si può vedere che, supponendo un modello di atmosfera semplificata (ovvero, con uno spessore perfettamente delimitato e con un indice di rifrazione decrescente con l'altezza), il percorso del raggio luminoso 1 attraverso l'atmosfera è molto più breve di quello del raggio 2, mentre quest'ultimo è, a sua volta, più breve di quello del raggio 3. In tali condizioni l'assorbimento della luce stellare da parte dell'atmosfera è minimo nelle vicinanze dello zenit (il caso del raggio 1) ed è massimo per gli astri che si trovano in corrispondenza di una piccola altezza,

vicino cioè all'orizzonte. Stando così le cose, si comprende come la luce delle stelle più vicine all'orizzonte sia maggiormente assorbita rispetto alla luce delle stelle che si trovano ad un'altezza maggiore. Si verifica inoltre che una data stella, poco dopo che è spuntata sull'orizzonte, ha apparentemente una minore brillantezza (a causa dell'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera) di quella che possiede più tardi, quando si trova ad un'altezza maggiore rispetto all'orizzonte. Ad esempio, una stella visibile con qualche difficoltà nelle vicinanze dello zenit (caso 1) è del tutto invisibile ad occhio nudo quando si trova ad un'altezza di circa 8° . Pertanto, la figura 2 spiega il motivo per cui, benché nelle condizioni precedentemente descritte fosse ammissibile che si vedessero ad occhio nudo 2900 stelle, in realtà il numero di stelle visibili è minore; in prossimità dell'orizzonte molte stelle che sarebbero individuabili se fossero più in alto, non sono più visibili a causa dell'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera. Considerando questo effetto, il numero di stelle osservabili ad occhio nudo, in un dato luogo ed in un certo momento, è soltanto il 70% del valore $\frac{N}{2}$ che ci si dovrebbe aspettare se non ci fosse

l'assorbimento atmosferico: in questo caso ci sarebbero soltanto circa 2000 stelle visibili ad occhio nudo. E' interessante ed istruttivo eseguire comunque l'esperienza descritta in qualsiasi luogo l'osservatore si trovi, sia che esso risulti un buon sito dal punto di vista astronomico, sia che risulti mediocre oppure, al contrario, eccezionale. Se il valore \bar{n} fosse, ad esempio, pari a 1,7 (si tratterebbe di un sito francamente di cattiva qualità), l'equazione ottenuta darebbe per N il valore $1,2 \cdot 10^3$, il che suggerirebbe un valore di circa 420 stelle visibili ad occhio nudo in un dato istante, senza l'ausilio di un qualsiasi strumento ottico di osservazione (avendo già considerato l'assorbimento della luce da parte dell'atmosfera). Persino in un luogo eccezionale (in assenza totale di inquinamento, in presenza di aria secca e ad una grande altitudine), nel caso di un osservatore allenato e con una vista eccellente, un valore per \bar{n} pari a 11,0 permette di ottenere $N = 7,8 \cdot 10^3$ stelle. In queste condizioni veramente particolari, un osservatore può scorgere pertanto, nella migliore delle ipotesi, circa 2700 stelle. In effetti, in un certo istante si può vedere un po' di più di metà della sfera celeste, dal momento che la rifrazione atmosferica aumenta l'altezza degli astri, un fenomeno evidenziato nella figura 3 in modo decisamente più marcato di quanto accada in realtà.

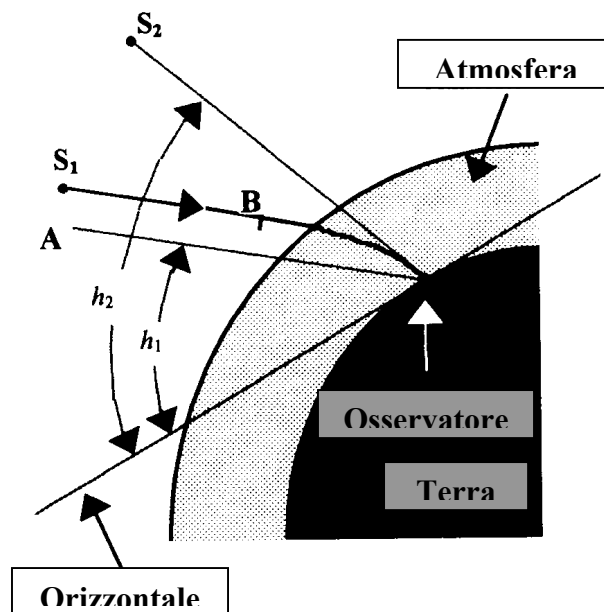


Figura 3

La figura 3 mostra, non in scala, il cammino di un raggio luminoso, emesso dalla stella S_1 , che raggiunge l'osservatore posto nel punto O. Se non esistesse l'atmosfera, la stella sarebbe vista in corrispondenza all'altezza h_1 (AO e S_1B sono direzioni parallele, come è ovvio). A causa della rifrazione atmosferica, per un certo osservatore tutto avviene come se l'astro si trovasse nella posizione S_2 ed esso viene visto in corrispondenza dell'altezza $h_2 > h_1$. L'innalzamento apparente dell'astro (Δh) è dato dalla differenza $h_2 - h_1$ ed è tanto minore quanto maggiore è la sua altezza. Per questo motivo un astro sembra essere più alto di quanto sarebbe se venisse osservato in assenza dell'atmosfera terrestre. Tale effetto è massimo nelle vicinanze dell'orizzonte e diminuisce gradualmente con l'altezza, fino ad annullarsi allo zenit. D'altro canto, è bene ricordare che l'innalzamento apparente degli astri può raggiungere un valore massimo di soli $(0,57)^\circ$ circa. Di conseguenza è facile concludere che il piccolo aumento dell'estensione della sfera celeste osservabile, provocato dal fenomeno della rifrazione, dà un contributo del tutto trascurabile alla determinazione del numero di stelle visibili ad occhio nudo.

Elementi di prove di verifica

Livello scolastico: 1° biennio

1. Diamo un nome ai rapporti

In ognuno dei seguenti casi si fa il rapporto tra la prima grandezza e la seconda. In quali casi le due grandezze sono dello stesso tipo? Che cosa indica il loro rapporto?

- a) peso/altezza;
- b) n° pezzi prodotti in una fabbrica/n° ore di lavoro;
- c) lunghezza di un tavolo/larghezza dello stesso tavolo;
- d) km percorsi/litri di benzina consumati;
- e) km percorsi in un viaggio/km da percorrere;
- f) litri di vino venduti/n° di abitanti;
- g) spazio percorso/tempo impiegato a percorrerlo;
- h) peso di un oggetto/volume occupato;
- i) distanza su una carta tra due paesi/distanza reale.

2. Un cambio poco conveniente

Supponete di avere ancora su un deposito bancario 15.000.000 di vecchie lire e vi danno la possibilità di cambiarle in euro, ma a condizione che accettiate un arrotondamento del valore dell'euro a 2000 lire. Senza fare calcoli, valutate l'ordine di grandezza della vostra perdita in lire? Provate a verificare la vostra ipotesi calcolando esattamente la differenza tra la cifra in euro che effettivamente vi spetta e quella che vorrebbero darvi.

3. Impariamo a viaggiare

Una carta geografica ha scala 1:100.000. Sulla carta rilevo le seguenti distanze:

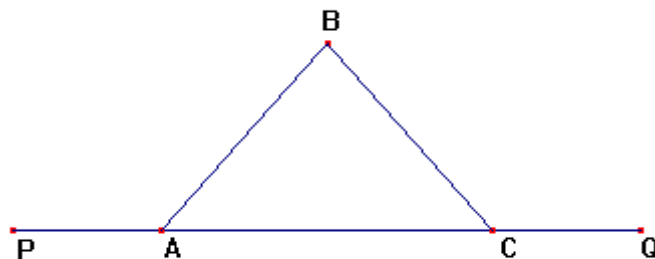
- tra A e B : 6 cm;
- tra C e D : 3,5 cm;
- tra E ed F : 0,5 cm.

Quali sono le distanze reali?

4. Le pecore

Un allevatore di pecore delle Highlands possiede due pezzi di steccato della stessa lunghezza con i quali racchiudere le sue pecore. Fortunatamente nelle vicinanze c'è un muro di mattoni diritto.

Essendo allenato a fare matematica egli sa che, con questo materiale, può costruire un recinto triangolare mettendo gli steccati AB e BC contro il muro PQ nelle posizioni A e C , come in figura.



Ma quale tipo di triangolo deve essere ABC per formare un recinto di area massima?

(E' previsto qui l'uso di un software di geometria dinamica, ma con altri approcci la verifica è proponibile al secondo biennio)

5. Approssimiamo...

Le misure delle due dimensioni di un rettangolo, 200,03 cm e 100,04 cm vengono approssimate a meno di un decimo e viene calcolata l'area del rettangolo di $2 \times 10^4 \text{ cm}^2$. Qual è l'ordine di grandezza dell'incertezza dell'area?

6. La piramide Maya

Si vuole costruire una piramide ottenuta sovrapponendo ad una base composta da un quadrato di $2n \times 2n$ blocchi cubici di spigolo unitario uno strato di $2(n-2) \times 2(n-2)$ blocchi dello stesso tipo dei precedenti fino a raggiungere l'ultimo piano composto da un quadrato di 2×2 blocchi. Esprimere il numero totale dei blocchi e la superficie esterna in funzione di n .