# Il triangolo di area massima

**Livello scolare**: 2° biennio

| Abilità interessate | Conoscenze | Nuclei coinvolti | Collegamenti esterni |
|---|---|---|---|
| Utilizzare in modo appropriato le funzioni di misura fornite dai software.<br><br>Risolvere problemi in cui sono coinvolte le misure.<br><br>Confrontare variazioni di grandezza.<br><br>Costruire modelli matematici da dati di misure di grandezze. | Aree dei poligoni.<br><br>Equazioni di secondo grado.<br><br>Esempi di funzioni e dei loro grafici. | <u>Misurare</u><br><br>Spazio e figure<br><br>Relazioni e funzioni<br><br>Argomentare, congetturare, dimostrare<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | |

**Contesto**
Figure geometriche.

Il contesto di riferimento è quello delle figure geometriche; l'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi di questo contesto e contribuire a consolidare alcune conoscenze di geometria che gli studenti hanno già conseguito.

**Descrizione dell'attività**
L'attività si struttura in tre fasi. Nella prima si propone agli studenti una situazione in cui viene assegnato un insieme di triangoli isosceli di dato lato e si richiede di osservare con attenzione, anche se a livello qualitativo, quali sono le costanti e le variabili della situazione problematica. Nella seconda fase si chiede agli studenti, che lavorano in un ambiente di geometria dinamica, di determinare il triangolo di area massima fra quelli assegnati. Nella terza fase, l'insegnante, in una discussione di bilancio, presenta, commenta e confronta le varie soluzioni proposte, soffermandosi su considerazioni legate anche alla potenzialità e ai limiti delle soluzioni degli studenti e di quelle suggerite dall'insegnante stesso.

È possibile iniziare l'attività con una lettura che metta in evidenza sia l'aspetto sociale della misurazione sia l'operatività come insieme di assunti condivisi.
"*Spesso sentiamo dire che la scienza è una forza rivoluzionaria che impone nuove e radicali idee alla storia dell'umanità. Ma essa emerge anche dall'interno della storia umana, dando nuova forma ad azioni consuete, alcune delle quali sono così abituali che difficilmente ci accorgiamo di compierle. La misurazione è una delle nostre azioni più consuete. Noi parliamo la stessa lingua ogni volta che, con precisione, scambiamo informazioni o commerciamo oggetti. Questa sua vera e propria onnipresenza rende invisibile la misurazione. Per essere operative, le unità di misura devono agire come un insieme di assunti condivisi, l'inesplorato substrato di conoscenze nei confronti del quale possiamo trovare accordi e fare distinzioni. Perciò non stupisce il fatto che noi diamo per scontata e consideriamo banale la misurazione. Inoltre, proprio nell'uso che una società*

*fa delle unità di misura trova espressione il suo senso di onestà. Per questa ragione la bilancia è un diffuso simbolo di giustizia*" (tratto da *La misura di tutte le cose* di Ken Alder).

Prima fase
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:

Situazione
E' dato un segmento di lunghezza 5 unità.

Proposta di lavoro
Costruite un triangolo isoscele che abbia i due lati uguali della stessa lunghezza del segmento dato. Effettuate una costruzione che rappresenti tale triangolo in un ambiente di geometria dinamica. Osservate quindi come si modifica il triangolo, trascinando i punti della costruzione che si possono muovere.
L'ambiente di geometria dinamica, infatti, consente di osservare le grandezze che si modificano e quelle che rimangono costanti quando si trascinano dei vertici liberi (per esempio la lunghezza dei due lati assegnati rimane costante, analogamente alla somma degli angoli interni del triangolo, mentre variano, in generale, le altre grandezze geometriche). Alcuni studenti fanno uso anche in questa prima fase dello strumento misura eventualmente fornito dal software. Questo comportamento, che può apparire a prima vista ingenuo, in quanto assolutamente non necessario, consente, però, agli studenti di entrare nella logica del problema e di prepararsi alla seconda fase.

Seconda fase
L'insegnante invita gli studenti a individuare le caratteristiche del triangolo di area massima fra quelli della famiglia considerata. Si può richiedere che tale quesito venga affrontato in piccoli gruppi collaborativi.
In questa fase l'insegnante dovrebbe limitarsi a osservare con attenzione il lavoro svolto nei gruppi; in particolare può essere importante osservare l'eventuale uso della misura, di approcci analitici, piuttosto che sintetici o viceversa; la preferenza per un approccio di tipo numerico (tabelle dei valori, tabelle delle differenze), oppure geometrico-grafico o, infine, formale (determinazione della formula che rappresenta la variazione dell'area rispetto a una determinata grandezza scelta come variabile indipendente).
Una prima risposta che in genere viene fornita da molti studenti è che il triangolo di area massima sia quello equilatero. All'origine di questa risposta ci sono probabilmente ragioni di simmetria, di apparente analogia con i problemi di area massima dei poligoni isoperimetrici, di vaga fiducia nella soluzione più semplice, motivi che si potrebbero anche definire estetici. Ciò che interessa, però, è che il problema porta gli studenti a effettuare una previsione, una congettura che può essere validata nell'ambiente di geometria dinamica, attraverso la funzione di trascinamento e l'osservazione di ciò che accade in seguito al trascinamento. L'ambiente non è inerte, perché, grazie alla funzione misura, in genere disponibile in un ambiente di geometria dinamica, dà una risposta inattesa: una volta ottenuto il triangolo equilatero, l'area continua a crescere e cresce per un bel po', prima di tornare a decrescere. Ciò genera sorpresa e stupore negli studenti e spinge loro a chiedersi *perché*. Polya sosteneva che è proprio la nascita di domande del tipo *perché?* che spinge alla ricerca di giustificazioni e quindi motiva alla dimostrazione (e questo anche quando si è convinti della correttezza di una congettura, non solo quando si ottengono, come in questo caso, risposte sorprendenti).

Terza fase
L'insegnante avvia una discussione di bilancio coinvolgendo l'intera classe, presentando e commentando le varie strategie risolutive seguite dai diversi gruppi di studenti e proponendo egli stesso, eventualmente, altre risoluzioni.

Si descrivono di seguito alcune possibili risoluzioni del problema, che differiscono notevolmente per i mezzi messi in gioco.

Approccio sintetico

Questo tipo di soluzione fa capire che il problema potrebbe essere anche proposto a studenti del primo biennio. Può essere suggerito da particolari modalità di esplorazione nell'ambiente di geometria dinamica che gli studenti hanno a disposizione: infatti, trascinando il vertice B, come suggerisce la figura 1, gli studenti si rendono conto che, poiché AC è costante, l'area massima si ha per il massimo di BH, ossia con H coincidente con A, quindi il triangolo di area massima è il triangolo rettangolo isoscele.

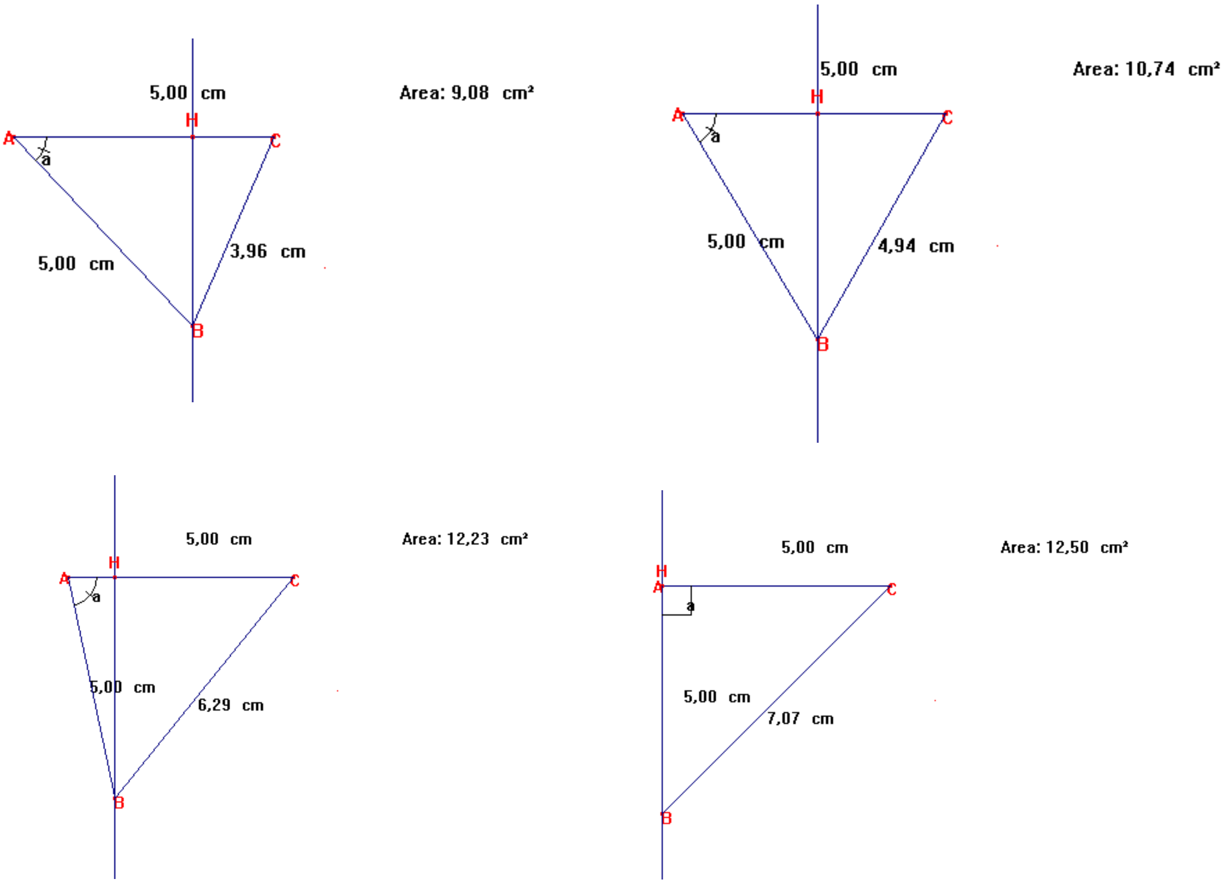



*Figura* 1

Approccio numerico

Gli studenti si limitano a fornire una stima numerica delle misure dei lati e degli angoli del triangolo di area massima utilizzando la funzione misura fornita dal software, senza riuscire, però, a capire bene il perché quella trovata è la soluzione del problema.

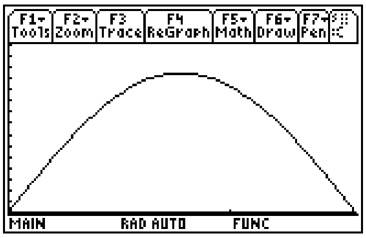
Approccio analitico-funzionale

Gli studenti determinano una funzione che rappresenta la variazione dell'area del triangolo rispetto a una grandezza scelta come variabile indipendente. In questo caso l'insegnante dovrebbe far notare che la scelta della grandezza da considerare come variabile indipendente può risultare strategica e che, in ogni caso, è necessario specificarne l'insieme di variabilità.

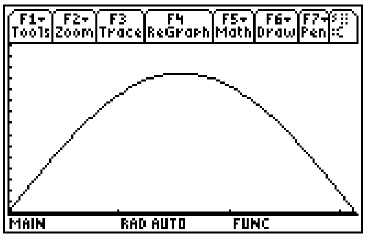
Qui di seguito vengono riportate alcune delle funzioni che è possibile considerare ($y$ rappresenta l'area del triangolo e per la notazione degli angoli e dei lati si fa riferimento ai triangoli della figura 1):

- in funzione dell'angolo ACB = $x$, si ha $y = 25\dfrac{\sin(2x)}{2}$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$;
- in funzione dell'angolo BAC = $x$, si ha $y = 12{,}5 \sin x$ con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;
- in funzione della proiezione KC = $x$ di uno dei lati uguali sulla base si ha $y = x\sqrt{25-x^2}$ con $0 \le x \le 5$;
- in funzione della proiezione HC della base BC su uno dei lati uguali si ha $y = \dfrac{5\sqrt{25-x^2}}{2}$ con $0 \le x \le 5$;
- in funzione dell'altezza relativa a uno dei lati uguali, BH = $x$ si ha $y = \dfrac{5}{2}x$ con $0 \le x \le 5$.

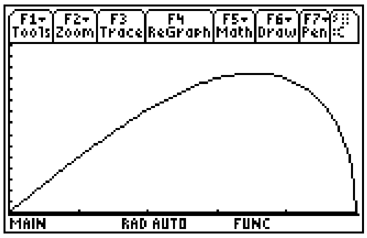
Con un software di manipolazione grafico-simbolica è anche possibile rappresentare il grafico delle varie funzioni, cercare di comprenderne le caratteristiche, in particolare capire la ragione dell'assenza o della presenza di eventuali simmetrie (vedere la figura 2).



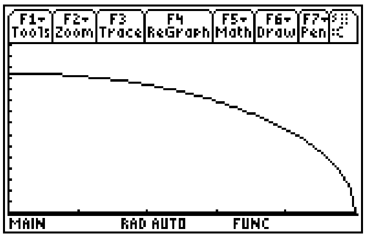

$y = 25\dfrac{\sin(2x)}{2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$



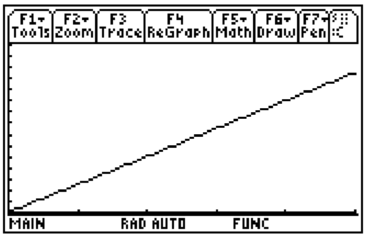

$y = 12{,}5\sin x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$




$y = x\sqrt{25-x^2}, \quad 0 \le x \le 5$




$y = \dfrac{5\sqrt{25-x^2}}{2}, \quad 0 \le x \le 5$




$y = \dfrac{5}{2}x, \quad 0 \le x \le 5$

*Figura* 2

L'insegnante può anche far vedere come i grafici possono essere determinati direttamente nell'ambiente di geometria dinamica, inserendo gli assi cartesiani e definendo opportunamente le relazioni tra l'area e la variabile scelta come indipendente. Nella figura 3 vengono rappresentate in un ambiente di geometria dinamica le funzioni area in funzione di BH, BC e BAC.

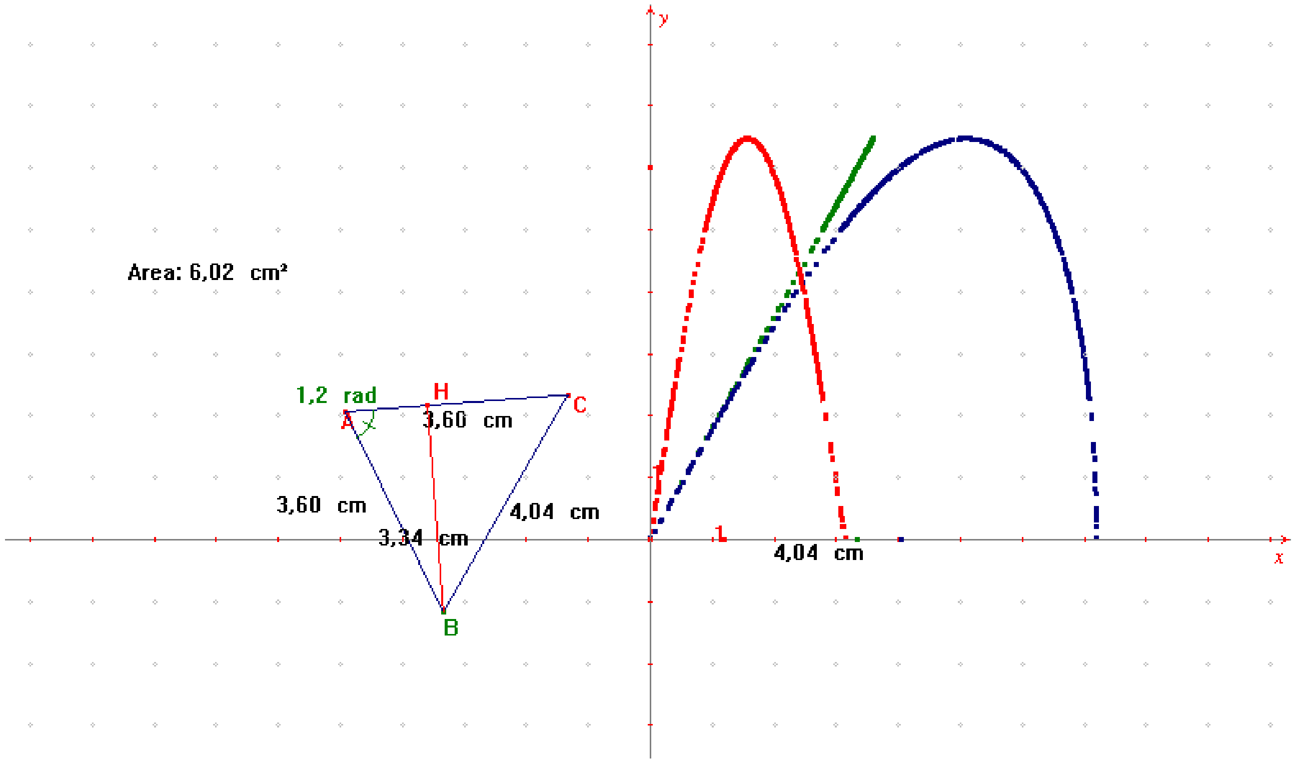



*Figura* 3

**Possibili sviluppi**

- Generalizzare il problema a un triangolo qualunque di cui è assegnato un lato.
- Problemi di massimo e minimo.
- Dimostrazioni sintetiche di alcune proprietà determinate per via analitica.

## Elementi di prove di verifica

**1.** Triangoli inscritti in una semicirconferenza
Tra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza determinare quello di area massima.

**2.** Rettangoli equiestesi
Tra tutti i rettangoli di ugual area, determinare quello di perimetro minimo.

# Gli aghi di pino

**Livello scolare**: 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Conoscere e usare il sistema internazionale delle unità di misura.<br>Scegliere, utilizzare, costruire strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze.<br>Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze.<br>Riconoscere la curva a campana nella distribuzione empirica di misure ripetute della stessa grandezza | Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere.<br><br>Frequenze assolute, relative, percentuali e cumulate.<br><br>Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni di frequenze. | <u>Misurare</u><br><br>Dati e previsioni<br><br>Laboratorio di matematica | Fisica |

**Contesto**
Raccolta di dati.

Il contesto cui ci si riferisce è quello della raccolta di dati, ad esempio le lunghezze degli aghi di pino, con particolare attenzione a:

- organizzazione dei dati in una tabella e conseguente suddivisione degli stessi in intervalli di misura;
- rappresentazione dei risultati ottenuti in un grafico misura-frequenza;
- calcolo di medie e scarti;
- analisi finale del diagramma ottenuto con commenti e riflessioni anche su forme analoghe derivanti da esperimenti successivi.

**Descrizione dell'attività**
Si presenta una serie di attività, nelle quali gli studenti conducono un'esperienza di misura di lunghezze di aghi di pino, analizzano e rappresentano i dati, elaborano indici statistici, simulano fenomeni come il lancio di dadi, rappresentano graficamente i risultati per poi trovare delle analogie tra gli andamenti grafici di fenomeni diversi.
L'insegnante, infatti, deve far in modo che gli studenti riescano a familiarizzare con una curva teorica, quale la gaussiana, riconoscendola come elemento unificante di fenomeni diversi.
All'esperimento di misura, relativo agli aghi di pino, segue una discussione matematica con tutta la classe, coordinata dall'insegnante, volta sia ad analizzare i dati ottenuti che ad organizzare la loro rappresentazione.
Successivamente, simulando il lancio di dadi, l'insegnante dà luogo ad un'ulteriore discussione in classe, con l'intento di far analizzare agli studenti i grafici ottenuti, spingendoli così a determinare le possibili analogie o differenze, evidenziando infine gli andamenti comuni.

<u>Prima fase</u>
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di misurare le lunghezze di aghi di pino (di uno stesso albero) con l'utilizzo di un righello tarato al millimetro. Dopo aver raccolto qualche centinaio di aghi di pino, si passa alla fase della misura: gli studenti devono quindi riportare su un foglio

elettronico i dati raccolti, raggruppati per classi di uguale ampiezza, indicandone la frequenza assoluta. Questa fase può essere realizzata anche a livello di primo biennio, con lo scopo di familiarizzare gli studenti alla misura e alla raccolta e organizzazione dei dati relativi alla misura di una o più grandezze.

Seconda fase
La seconda fase mira alla costruzione e all'interpretazione di grafici, a partire dalle tabelle precedentemente realizzate. L'insegnante guida gli studenti alla costruzione di un istogramma delle frequenze assolute, al calcolo della media aritmetica $m$ e dello scarto quadratico medio $s$.
L'intervento successivo, da parte dell'insegnante, deve costituire uno stimolo alla riflessione attraverso alcuni quesiti quali, ad esempio: "Quale forma assume la figura così ottenuta?"; "Quanti valori in percentuale sono compresi rispettivamente negli intervalli $(m - s, m + s)$, $(m - 2s, m + 2s)$, $(m - 3s, m + 3s)$?". Si ottengono dati molto vicini a quelli teorici della distribuzione normale, che danno indicazioni agli studenti delle percentuali di riferimento contenute nei suddetti intervalli.
Le risposte a tali interrogativi gettano le basi per lo studio della distribuzione normale.

Terza fase
La terza fase mira alla realizzazione di altre esperienze, la cui elaborazione porta gli studenti alla constatazione di come esperimenti diversi possano avere rappresentazioni grafiche analoghe. Tali attività sono stimolanti per i risultati che offrono.
Ad esempio, si potrebbe considerare il lancio di due, tre, quattro o più dadi e determinare le frequenze di uscita della somma dei punteggi delle facce. Questa attività può essere effettuata con il lancio manuale, oppure con la simulazione al calcolatore. Per effettuare tale simulazione, si può utilizzare un software simbolico con le funzioni statistiche, che abbia la funzione di generazione di numeri casuali, oppure un linguaggio di programmazione del calcolatore o di una calcolatrice. Ma un ambiente particolarmente favorevole per la simulazione del lancio di dadi può essere il foglio elettronico, in quanto consente la visualizzazione del numero in una cella, il calcolo numerico, la rappresentazione grafica dei dati.
Il lavoro può essere condotto con un duplice obiettivo: da una parte, il calcolo delle frequenze di uscita della somma dei punteggi delle facce dei dadi, su un numero di lanci sufficientemente alto, dell'ordine di qualche centinaio, dall'altra, la determinazione delle probabilità di uscita dei valori della variabile somma dei punteggi delle facce. Questi due insiemi di dati possono essere utilizzati separatamente per osservare il grafico che si ottiene considerando sull'asse delle ascisse il valore della somma dei punteggi delle facce e sull'asse delle ordinate le relative frequenze o probabilità, oppure insieme, in modo da sovrapporre i due grafici e confrontarli. Inoltre, si osserva che la distribuzione di tale somma, mentre per un dado solo è uniforme, per la somma dei punteggi delle facce nel lancio di più dadi cambia forma, passando, man mano che aumentano i dadi, da quella "triangolare" a quella "a campana", come si può osservare nelle figure seguenti (in 300 lanci di uno, due, tre dadi rispettivamente) e le probabilità dell'evento somma dei punteggi delle facce.

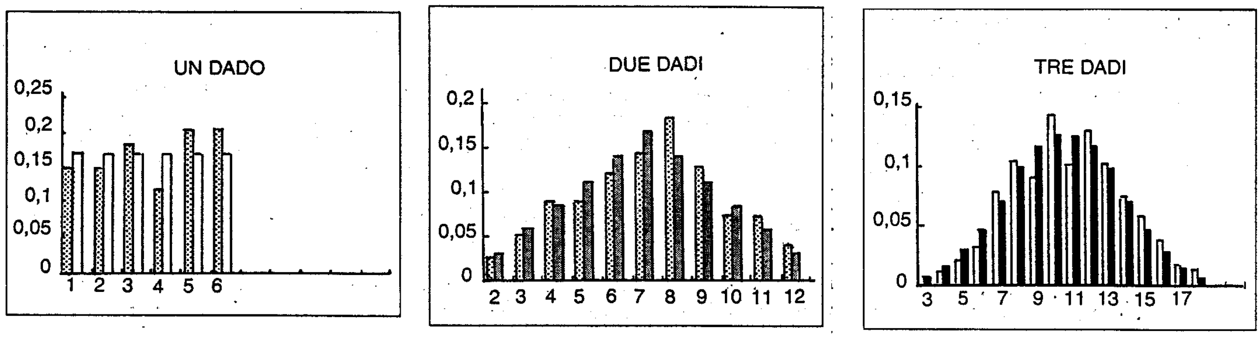



*Figura 1*

## Elementi di prove di verifica

**1.** I voti d'esame
Per sostenere un esame scritto gli studenti devono rispondere a 20 domande a risposta multipla.
I punteggi per i 213 studenti che sostengono l'esame sono riportati nella seguente tabella:

| Punteggi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° Studenti | 1 | 1 | 5 | 7 | 12 | 13 | 16 | 15 | 17 | 32 | 17 | 21 | 12 | 16 | 8 | 4 | 7 | 5 | 4 | 0 |

Calcolare la media e lo scarto quadratico medio. Fare una rappresentazione grafica dopo aver raggruppato le intensità in classi di ampiezza due. Quali considerazioni si possono fare sul grafico ottenuto?

# Gli incrementi finiti di una funzione

**Livello scolare**: 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre.<br><br>Confrontare variazioni di grandezze utilizzando i concetti di pendenza e di variazione di pendenza.<br><br>Stimare l'ordine di grandezza di una misura. | Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali.<br><br>Incrementi a passo costante, pendenza media. | Misurare<br><br>Relazioni e funzioni<br><br>Argomentare, congetturare, dimostrare<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | Fisica |

**Contesto**
Grandezze variabili.

Il contesto dell'attività è quello dello studio della variazione di grandezze.

**Descrizione dell'attività**
Mediante il calcolo degli incrementi finiti di funzioni che legano queste grandezze in semplici casi particolari, per cogliere nel fenomeno certe regolarità che preludono all'introduzione formale del concetto di derivata nell'ambito dell'analisi matematica. L'attività offre anche precisi riferimenti storici al problema della determinazione delle rette tangenti ad una curva assegnata in un suo punto, allo studio delle variazioni di una funzione attraverso la sua rappresentazione grafica ed alla determinazione della velocità istantanea del moto di un corpo a partire dalla sua legge oraria.
Prerequisiti: grafici di funzioni polinomiali di primo e secondo grado, calcolo letterale, frazioni algebriche, legge oraria del moto di un corpo.

Prima fase
Assegnato un grafico di una funzione sconosciuta (ad esempio, quello di una cubica con un punto di massimo relativo ed un punto di minimo relativo), tracciato su di un foglio, si propone agli studenti, come lavoro individuale oppure di gruppo, di descrivere qualitativamente per scritto le variazioni della variabile dipendente in relazione alle variazioni della variabile indipendente. Gli studenti hanno il compito di provare ad individuare le zone del grafico loro fornito in cui tali variazioni avvengono con maggiore o minore rapidità e di collegare questi fatti con le caratteristiche del grafico della funzione stessa.

Proposta di lavoro

Analizza il grafico riprodotto nel foglio che ti è stato dato.
Descrivi come cambiano i valori della variabile dipendente $y$ al variare dei valori della variabile indipendente $x$; controlla in particolare se le variazioni di $y$ si manifestano con una certa "uniformità" al variare dei valori di $x$ oppure no. Trova un collegamento tra l'andamento del grafico ed il modo in cui variano i valori della variabile $y$ e scrivi quali sono le tue opinioni a proposito.

Si mettono a confronto le osservazioni emerse nella prima fase durante una discussione collettiva in classe. Si propone quindi di continuare l'analisi con un approccio quantitativo al problema.

Seconda fase

Si passa da un'analisi qualitativa ad un'analisi quantitativa, restringendo però il campo d'azione alla situazione più semplice che gli studenti conoscono: l'ambito delle funzioni polinomiali. L'indagine, che si può ben avvalere di un foglio elettronico, procede dallo studio di un caso particolare verso la descrizione di un caso qualsiasi, così da porre ancora una volta l'accento sul potere generalizzante del linguaggio dell'algebra letterale e da permettere di pari passo la rilettura di quanto scoperto mediante il calcolo algebrico nelle proprietà del grafico associato alla funzione considerata. Uno degli aspetti caratterizzanti l'intera proposta è quello di non limitarsi alla sola determinazione delle differenze finite tra i valori della variabile dipendente, in funzione degli incrementi della variabile indipendente: in effetti per la funzione di secondo grado si calcolano anche gli incrementi delle differenze stesse (dette "prime differenze"), per ottenere le "seconde differenze" e verificare che queste ultime si mantengono costanti, mentre per la funzione di terzo grado si giunge a calcolare le "terze differenze", che risultano ugualmente costanti.
Nasce subito un problema aperto da proporre agli studenti: il comportamento delle funzioni di secondo e terzo grado può essere generalizzato? Si può dimostrare qualcosa a questo proposito?

Proposta di lavoro 1

Considera la funzione $y = 2x + 1$ e rappresenta il suo grafico in un riferimento cartesiano ortogonale $xOy$. Dati i seguenti valori di $x$: 0, 1 , 2, 3, 4, 5, 6, organizza con un foglio elettronico una tabella che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di $y$. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di $y$. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di $x$ ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo. Prova a ritrovare le tue conclusioni nel grafico che hai rappresentato. Che cosa accade, secondo te, se si considera una funzione qualunque del tipo $y = m\,x + n$ , essendo $m$ ed $n$ parametri assegnati? Ripeti il precedente esperimento di calcolo, annotando quello che scopri.

Proposta di lavoro 2

Considera adesso una funzione generica di secondo grado, del tipo $y = x^2$. Dati i seguenti valori di $x$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, organizza una tabella con un foglio elettronico che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di $y$. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di $y$ e determina inoltre le differenze tra le differenze successive che hai appena calcolato. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di $x$ ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo.
Che cosa accade, secondo te, se si considera una funzione qualunque del tipo $y = ax^2$ , essendo $a$ un parametro assegnato? Ripeti il precedente esperimento di calcolo, annotando quello che scopri.

Proposta di lavoro 3

Considera adesso una funzione generica di terzo grado, del tipo $y = ax^3$. Dati i seguenti valori di $x$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, organizza con un foglio elettronico una tabella che riporti da un lato tali valori ed a fianco i corrispondenti valori di $y$. Calcola poi le differenze tra valori consecutivi di $y$, determina come prima le differenze tra le differenze successive che hai appena calcolato e stavolta determina anche i valori delle differenze tra queste ultime differenze consecutive ottenute. Che cosa ottieni? Ripeti lo stesso esperimento modificando la differenza tra un valore di $x$ ed il successivo. Che cosa ottieni? Scrivi tutto ciò che osservi e che ti sembra significativo.
Riesci ad immaginare che cosa accadrebbe se ripetessi il procedimento per una funzione di quarto grado del tipo $y = ax^4$? Puoi prevedere un comportamento generalizzabile per le funzioni del tipo $y = ax^n$ , con $n$ esponente intero positivo qualsiasi?

Osservazioni
Ciò che in conclusione deve emergere da queste prime fasi dell'attività è una specifica metodologia di analisi del comportamento di una funzione che trova immediata applicazione nella ricerca del coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione assegnata in un suo punto. Tale ricerca viene condotta in stretto collegamento con la determinazione della velocità istantanea del moto di un corpo secondo una certa legge oraria, come descritto nella fase successiva dell'attività.

<u>Terza fase</u>
Si passa ora all'applicazione del metodo degli incrementi finiti per la determinazione della velocità media di un corpo in movimento, a partire dall'espressione algebrica della legge oraria. In seguito si determina l'espressione della velocità istantanea al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente $t$ e si giunge a prevedere quella che è in fondo la legge generale della derivata della funzione $s(t) = at^n$.

Proposta di lavoro 1

Immagina di dover studiare il moto di un corpo che si muove secondo la seguente legge oraria: $s(t) = at + b$. Calcola la velocità media in relazione all'intervallo di tempo $[t_1 , t_2]$. Che cosa ottieni? E se il valore di $t_2$ si avvicina sempre di più a $t_1$, che cosa puoi dire del valore della velocità media che hai prima calcolato? Pensi che si possa dare un significato preciso alle tue osservazioni? Prova a ripetere adesso lo stesso calcolo, indicando per semplicità l'istante di tempo $t_2$ come $t_1 + h$, per la legge oraria $s(t) = at^2$ e per la legge oraria $s(t) = at^3$, immaginando che il valore di $h$ si avvicini sempre più a 0. C'è qualche regolarità in quello che hai trovato? Spiega le tue risposte.

Osservazioni
L'obiettivo della discussione da far seguire alla precedente consegna è evidentemente l'introduzione in modo intuitivo del concetto di velocità istantanea del moto di un corpo, senza però ricorrere alla formalizzazione del concetto di limite del rapporto incrementale.

Proposta di lavoro 2

Prova adesso a generalizzare tutto quello che fino ad ora si è scoperto. Cerca di prevedere quale potrebbe essere una legge di carattere generale per la velocità associata alle leggi orarie del tipo $s(t) = at^n$, con $n$ esponente intero positivo qualsiasi. Cambiando un po' le cose, si potrebbe dire qualcosa per la velocità associata alla legge oraria di un moto uniformemente accelerato, come quello di caduta dei corpi nel vuoto? Ricorda che la legge oraria è in tal caso $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$. Scrivi quello che pensi a proposito.

**Possibili sviluppi**
A questo punto un naturale sviluppo dell'attività consiste nel collegare il problema della ricerca di un'espressione per la velocità istantanea di un corpo in moto secondo una legge oraria assegnata, almeno per il caso polinomiale, al problema della ricerca dell'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto. Ciò conduce ad interpretare il coefficiente angolare della retta tangente ad un grafico come il valore della velocità istantanea del corpo in moto secondo la legge oraria associata a tale grafico, senza arrivare per il momento ad una teoria compiuta della derivazione.

# Crescite veloci e crescite lente

**Livello scolare**: 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Costruire modelli, a partire da dati, utilizzando le principali famiglie di funzioni.<br><br>Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre.<br><br>Confrontare variazioni di grandezze. | Esempi di funzioni e dei loro grafici.<br><br>La funzione esponenziale;<br>la funzione logaritmica. | <u>Misurare</u><br><br>Relazioni e funzioni<br><br>Numeri e algoritmi<br><br>Argomentare, congetturare, dimostrare<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | Biologia<br><br>Chimica<br><br>Scienze della terra<br><br>Fisica |

**Contesto**
Modelli.

Il contesto è quello dei modelli. Un approccio laboratoriale alla funzione esponenziale e alla funzione logaritmica, che prenda spunto da situazioni legate al mondo reale, è qui articolata intorno a diversi fenomeni che si rappresentano con curve di crescita esponenziale o si misurano con scale logaritmiche.

**Descrizione dell'attività**
L'intento è di arrivare gradualmente ad alcune proprietà delle funzioni in questione, costruendone i significati; si propongono tabelle e grafici e si guidano le osservazioni dei ragazzi verso l'uso che si fa delle due funzioni in ambiti diversi.
Contemporaneamente, in collegamento con altri nuclei, si ha occasione di parlare di numeri irrazionali e dell'uso dei logaritmi nei calcoli (numeri e algoritmi) ma anche di scegliere alcune dimostrazioni delle proprietà dei logaritmi (argomentare, congetturare, dimostrare).
<u>Prima fase</u>

- L'insegnante propone una tabella che rappresenta alcuni dati di un fenomeno di crescita esponenziale, tratto dalla biologia, invitando gli studenti a completare qualche riga in più e, in particolare la *n*-esima riga.

"Una popolazione di 20 milioni di individui cresce del 2,5% al giorno".

| giorno | Popolazione in milioni |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 1 | 20+20*25/1000 = 20*(1+0,025) = 20*1,025 |
| 2 | 20*1,025+20*1,025*0,025=20*(1,025)*(1+0,025) = $20*(1,025)^2$ |
| 3 | ….= $20*(1,025)^3$ |
| | |
| | |
| *n* | $20*(1,025)^n$ |

*Tabella 1*

- Sarà cura dell'insegnante dare alcune indicazioni sui termini specifici che si utilizzano più comunemente in problemi che hanno un modello analogo.
- La consegna per gli studenti prevede ora che, con le indicazioni scelte in questo esempio, siano in grado di costruire i grafici relativi alle due situazioni, utilizzando un foglio elettronico.

Situazione

Una crescita esponenziale è spesso descritta in termini di percentuale, come nel precedente esempio dove il fattore di crescita è $a$ = 1+ 25/1000 = 1,025 e il tasso di crescita è $r$ = 0,025; considerato che 20 è costante e possiamo chiamarlo $K$, in generale una funzione di questo tipo che esprime una crescita si può scrivere $Y = Ka^x = K(1+r)^x$. In questo caso quindi $Y = 20*1,025^x = 20*(1+0,025)^x$, con $x$ variabile che rappresenta i giorni.
Analogamente per un fattore di decadimento $a$ = 1- 2/1000 quindi con tasso di decadimento $r$ = 0,002 la funzione che rappresenta il fenomeno di decadimento (dello 0,2% al minuto) è $Y = Ka^x = K(1-r)^x$ con $x$ variabile che rappresenta i minuti.

Proposta di lavoro

Costruisci i grafici che rappresentano le precedenti situazioni.
Costruisci un esempio di una crescita lineare, rappresentalo graficamente e confronta i due modelli di crescita.

- Si prosegue con la lettura di un breve brano che illustra il metodo di datazione del Carbonio-14 e si propone un esercizio applicativo.

Il metodo di datazione del Carbonio-14

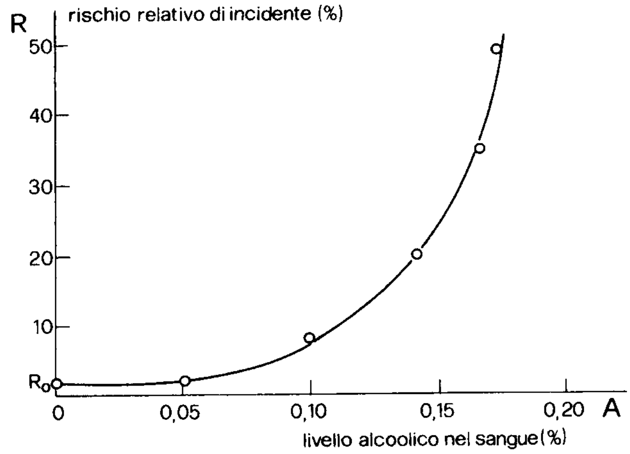
Uno dei più famosi e semplici metodi di datazione dei reperti archeologici è il cosiddetto "metodo del Carbonio-14" ideato alla fine degli anni quaranta dal chimico statunitense Walter F. Libby (che ricevette per questo il Premio Nobel nel 1960).
L'atmosfera terrestre è bombardata continuamente da raggi detti "cosmici", i quali danno luogo alla produzione di Carbonio-14 ($C^{14}$), che è radioattivo. Il $C^{14}$ viene assorbito dalle piante e assimilato così dagli animali. L'assorbimento del $C^{14}$ nei tessuti viventi è compensato esattamente dal decadimento radioattivo, per cui si crea uno stato di equilibrio. Quando un organismo cessa di vivere, la concentrazione di $C^{14}$ diminuisce col tempo perché esso non ne assimila più e quindi ha luogo soltanto il fenomeno di decadimento. Ora l'ipotesi fondamentale su cui poggia il metodo del $C^{14}$, è che l'intensità di bombardamento della superficie non è mai variata. Ciò implica che il decadimento del $C^{14}$ in un campione, per esempio, di carbon fossile, si verificava all'origine con la stessa intensità con cui si verifica oggi. Queste osservazioni consentono di determinare l'età di un campione di carbon fossile e quindi di reperti archeologici ritrovati assieme ad esso. È possibile ricavare una equazione in cui l'unica incognita è l'età del carbon fossile; essa si ottiene dalla più generale equazione di crescita esponenziale applicata ai fenomeni di decadimento radioattivo (fenomeno studiato fin dagli inizi del secolo da E. Rutherford).

Proposta di lavoro

"Il tempo di dimezzamento" di una sostanza radioattiva corrisponde al tempo necessario affinché il numero di atomi della sostanza si dimezzi. Per il Carbonio-14 il tempo di dimezzamento è di 5730 anni. Determina, con ragionevole approssimazione, l'età di un reperto per il quale la concentrazione di $C^{14}$ risulta pari al 12% di quella di analoghi organismi viventi (si può calcolare un valore adeguato di $(1/2)^n$ dove $n$ è il numero dei tempi di dimezzamento o risolvere l'equazione esponenziale $(1/2)^x = 0,12$ ricordando che l'unità di misura è 5730 anni).

- L'insegnante propone adesso due grafici

**Istogramma del rischio di incidente automobilistico per ingestione di alcool, confrontato con la curva di crescita esponenziale**




**Curve della concentrazione di penicillina nel sangue in casi di somministrazione di diverse dosi iniziali**

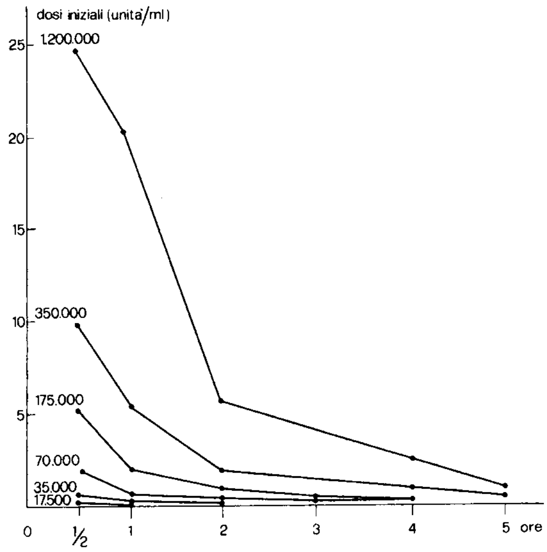



*Figura 1*

Proposta di lavoro

Confronta i due grafici con gli altri da te ottenuti e fai le tue osservazioni in non più di cinque righe.

<u>Seconda fase</u>

Si propongono alcune brevi letture, oggetto di una precedente ricerca su Internet con gli studenti, sulle scale logaritmiche.

Il terremoto

L'intensità: misura la grandezza di un terremoto attraverso gli effetti sull'uomo, sulle costruzioni, sull'ambiente.
Pertanto in luoghi diversi, per uno stesso terremoto, essa assume valori differenti e ciò deriva dal fatto che gli effetti tendono a divenire più deboli con l'aumentare della distanza dall'epicentro. L'intensità di un terremoto viene espressa tramite la scala Mercalli.
La magnitudo: misura la forza di un terremoto attraverso le registrazioni (sismogrammi) degli strumenti ed è stata definita nel 1935 dal famoso sismologo C.F. Richter come misura oggettiva della quantità di energia elastica emessa durante il terremoto. Esprime la grandezza di un terremoto attraverso la misura dell'ampiezza massima della traccia registrata dal sismografo. La scala della magnitudo è una scala logaritmica, per cui un aumento di una unità nelle magnitudo corrisponde a un aumento di un fattore 10 nell'ampiezza del movimento della terra, e a una liberazione di energia circa 30 volte maggiore. La magnitudo è un parametro indipendente dagli effetti che il terremoto provoca sull'uomo e sulle costruzioni; essa permette di confrontare tra loro eventi sismici avvenuti nelle diverse parti del mondo ed in tempi differenti. I terremoti più piccoli percettibili dall'uomo hanno una magnitudo intorno a 2,5, mentre quelli che possono provocare danni alle abitazioni e vittime hanno generalmente una magnitudo superiore a 5,5.
Nella seguente tabella si può vedere l'equivalenza fra le scale comunemente usate per indicare l'intensità di un terremoto: la scala Richter e la scala Mercalli (MCS).

| Gradi scala Mercalli [MCS] | Gradi scala Richter | Quantità equivalente di tritolo [kg] |
|---|---|---|
| 0 | 1,0 | 20 |
| 1 | 2,0 | 625 |
| 2 | 2,5 | 3.500 |
| 3 | 3,0 | 20.000 |
| 4 | 3,5 | 110.000 |
| 5 | 4,0 | 625.000 |
| 6 | 4,5 | 3.500.000 |
| 7 | 5,0 | 20.000.000 |
| 8 | 5,5 | 110.000.000 |
| 9 | 6,0 | 625.000.000 |
| 10 | 6,5 | 3.500.000.000 |
| 11 | 7,0 | 20.000.000.000 |
| 12 | 7,5 | 110.000.000.000 |

*Tabella 2*

È comunque conveniente tradurre l'ultima colonna in notazione scientifica.

Proposta di lavoro

Rappresenta i dati dell'ultima colonna su scala logaritmica, in modo da poterli confrontare con quelli della scala Richter prima e della Scala Mercalli poi.

L'idea di Richter

L'ampiezza massima delle onde registrate da un sismogramma (indicata con $A$) può essere usata come misura della "grandezza" di un terremoto se viene messa a confronto con l'ampiezza massima ($A_0$) delle onde fatte registrare da un terremoto scelto come riferimento (terremoto standard). Egli

scelse un terremoto che produce su un sismografo standard, posto a 100 km dall'epicentro, un sismogramma con oscillazione massima uguale a 0,001 mm.
Poiché l'ampiezza massima registrata sul sismogramma di un forte sisma può essere anche milioni di volte maggiore di un terremoto debole, al fine di evitare numeri di magnitudo troppo grandi, ritenne opportuno ricorrere al logaritmo in base 10 del rapporto fra l'ampiezza massima del terremoto (misurata in micrometri) e l'ampiezza che verrebbe prodotta dal terremoto standard alla stessa distanza epicentrale: $M = log\ A/A_0$; non esiste un limite teorico della magnitudo ma, in pratica, nel XX secolo la massima magnitudo registrata è stata poco meno di 9.

La scala decibel del suono

L'apparato uditivo umano è sensibile alle variazioni di pressione atmosferica che, tramite un complesso sistema meccanico, chimico e nervoso traduce in variazione di segnali elettro-chimici che viaggiano verso il cervello.
Il punto è che questo legame non è lineare. E cioè, al raddoppio dell'intensità del suono non avvertiamo il raddoppio della sensazione di volume, ma molto di meno. Il legame è di tipo logaritmico. In linea di massima, se l'intensità dell'onda sonora aumenta di dieci volte, noi avvertiamo soltanto un raddoppio del volume.
La definizione di dB passa appunto per i logaritmi. La scala decibel nasce in questa maniera: se $P'$ è la pressione standard di 0,0002 microbar (approssimativamente corrispondente alla soglia audio, cioè al minimo segnale rilevabile dal nostro orecchio) la pressione sonora $P$ è così definita:

$$20\ log\ (P/P')$$

Per le proprietà dei logaritmi, sappiamo che:

$$log\ (ab) = log\ a + log\ b$$
$$log\ (a/b) = log\ a - log\ b$$

per cui, se nell'appartamento accanto il nostro c'è una festa e il rumore raggiunge la pressione $P_2$ mentre nella nostra stanza il volume della tv raggiunge una pressione $P_1$ avremo che la differenza in pressione fra le stanze adiacenti, espressa in decibel, sarà pari a:

$$20\ log\ (P_1/P') - 20\ log\ (P_2/P') = 20\ log\ (P_1/P_2)$$

In genere l'orecchio è capace di rilevare differenze solo oltre i 3dB. Se la pressione acustica raddoppia, si produce un incremento di circa 6dB rispetto a quello iniziale. Oltre i 130dB avvertiamo dolore, mentre una esposizione continua (per esempio negli impianti industriali) a intensità superiori agli 80dB finisce per danneggiare l'udito in maniera irreversibile.

Esercizio
Qual è la pressione acustica massima che può sopportare il nostro orecchio senza avvertire dolore? Esprimi la risposta in microbar.

La scala del pH

È possibile esprimere la concentrazione dello ione idrogeno (in pratica l'acidità o la basicità di una sostanza) mediante l'introduzione di una funzione che eviti l'uso di numeri molto piccoli. Questa è la scala del pH, metodo largamente usato per misurare l'acidità. Il pH di una soluzione è definito come l'opposto del logaritmo in base 10 della concentrazione dello ione idrogeno:

$$pH = -\ log\ [H^+]$$

Si osserva che il calcolo di un logaritmo è incorporato nelle definizione stessa della misura del pH. Occorre poi saper interpretare correttamente i dati numerici: se il pH di una soluzione passa dal valore 6 al valore 5, questo significa che la concentrazione di ione idrogeno risulta decuplicata (essendo passata da $10^{-6}$ a $10^{-5}$).

Esercizio

Tenendo conto che la concentrazione dello ione idrogeno presente in una sostanza si misura in moli per litro, determinare il pH delle seguenti sostanze: pomodori (con $[H^+] = 6{,}3\times10^{-5}$ moli/litro) e latte (con $[H^+] = 4\times10^{-7}$ moli/litro).

Se, invece, si sa che il pH del succo di limone è uguale a 2,3, qual è la concentrazione dello ione idrogeno misurata in moli per litro nel succo di limone?

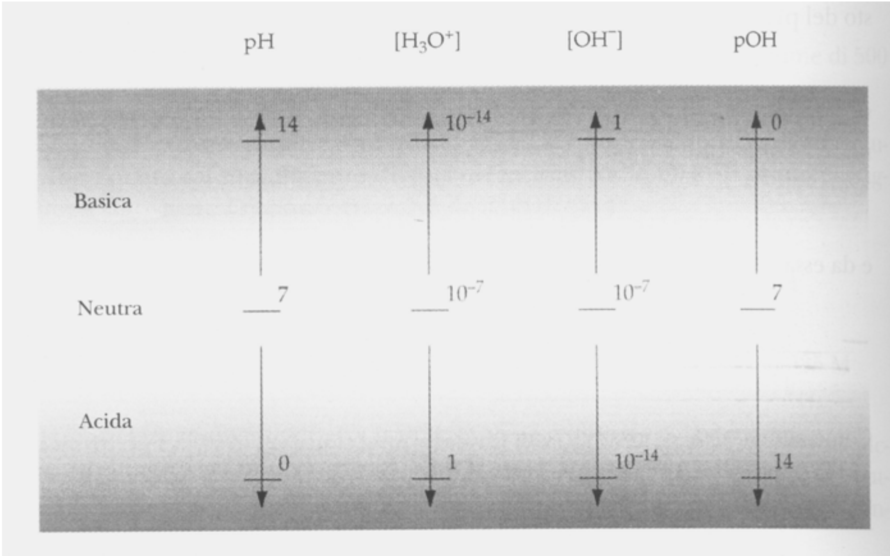



*Figura 2*

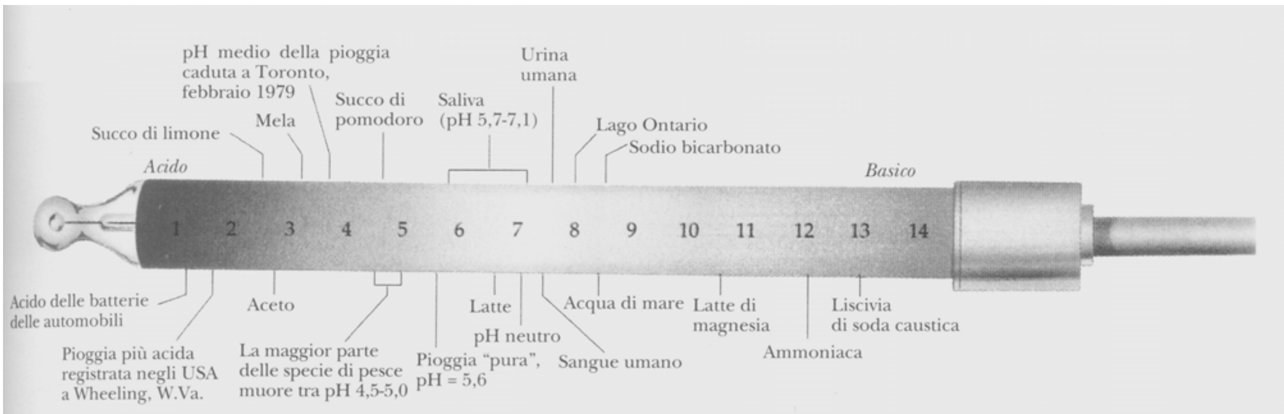



*Figura 3*

- Qualche osservazione sulle scale logaritmiche è utile farla in questo contesto, per esempio l'insegnante mette in evidenza che: la scala logaritmica permette la rappresentazione delle sole misure positive della grandezza che intendiamo visualizzare. Man mano che le misure delle grandezze si avvicinano a zero, i corrispondenti valori dei logaritmi tendono a $-\infty$. In altre parole, la scala logaritmica dilata la rappresentazione grafica dei valori (positivi) piccoli, ma, nel contempo, comprime la rappresentazione grafica dei valori grandi. Infatti quando le misure delle grandezze che intendiamo visualizzare assumono valori sempre più grandi, anche i corrispondenti valori dei logaritmi tendono a $+\infty$, ma i loro punti immagine sulla scala logaritmica risultano via via più ravvicinati.

**Possibili sviluppi**

- Numeri irrazionali.

- Potenzialità e limiti di un modello.
- Storia della matematica: le spirali.

**Elementi di prove di verifica**

**1.** Scale grandi e piccole

- Determina il valore reale $k$ tale che, per ogni $x$, si ha: $10^x = e^{kx}$.

- Nella formula $A = kB^x$ trova $x$ sapendo che $A = 12{,}6$, $k = 0{,}0012$ e $B = 21{,}9$.

- In un'elezione un partito politico ha avuto una percentuale del 5% dei voti. Da un certo momento in poi il numero dei votanti per quel partito politico si dimezza ad ogni successiva elezione. Esisterà un momento in cui esso non avrà più voti?

- Siano $p$, $q$ ed $r$ tre termini di una progressione geometrica. Verifica, con esempi, se $\log p$, $\log q$ e $\log r$ sono tre termini di una progressione aritmetica. Costruisci una catena di deduzioni per dimostrare che la proprietà in questione è vera sempre.

# Un numero misterioso: π

**Livello scolare**: 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Scegliere e utilizzare strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze.<br><br>Determinare approssimazioni di lunghezze.<br><br>Dimostrare l'irrazionalità di alcuni numeri.<br><br>Determinare l'incertezza relativa che si propaga in un quoziente di grandezze misurate. | I numeri irrazionali.<br><br>Approssimazioni.<br><br>Il numero $\pi$.<br><br>Esempi di grandezze incommensurabili.<br><br>Schemi di ragionamento. | <u>Misurare</u><br><br>Numeri e algoritmi<br><br>Spazio e figure<br><br>Argomentare, congetturare, dimostrare<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | Fisica |

**Contesto**
Numeri.

Questa proposta è riferita al contesto dei numeri e può essere introdotta nel terzo anno.

**Descrizione dell'attività**
L'attività prevede che gli studenti abbiano già acquisito una certa abilità nella lettura di algoritmi, nell'affrontare i problemi connessi al misurare ed alla rappresentazione dei dati sperimentali. Essa si caratterizza per la ricchezza degli spunti e offre non solo un contributo significativo alle conoscenze disciplinari, ma concorre a potenziare la capacità degli stessi ad analizzare situazioni e formulare congetture. Tale attività concorre alla costruzione del senso del numero, come ordine di grandezza, perché dà un significato a quella formula (la lunghezza della circonferenza) che spesso viene ricordata mnemonicamente, senza che gli studenti si rendano conto di quanto "sia grande $\pi$". Contribuisce, inoltre, alla formazione culturale globale degli studenti.

<u>Prima fase</u>
Gli studenti conoscono $\pi$ come simbolo, in quanto l'hanno già probabilmente incontrato in precedenza nei loro studi, ma non hanno forse ancora approfondito i problemi ad esso connessi. L'insegnante in questa proposta introduce gli studenti al problema della determinazione di $\pi$ come numero irrazionale.

L'insegnante propone agli studenti la lettura del seguente passo del libro *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan per porre il problema della misura della circonferenza.
"*... la domanda fu questa: è possibile per un esperto geometra trovare l'esatto rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio?*
*Così rispose l'Uomo Che Contava: "Non è possibile calcolare esattamente una circonferenza, pur conoscendone il diametro. Il rapporto tra le due misure è un numero ben determinato, ma non siamo in grado di conoscerne il vero valore. Gli antichi cultori dell'astrologia credevano che la circonferenza fosse tre volte il diametro, ma le cose non stanno così. Archimede il greco trovò che,*

*se la misura della circonferenza è di 22 cubiti, il suo diametro deve misurarne circa 7. Ma i matematici indiani non sono d'accordo, e il grande al-Kwarizmi ha affermato che la regola di Archimede è ben lungi dall'essere esatta*".
E Beremiz, rivolgendosi al sapiente con il naso camuso, così concluse: "Questo numero è in realtà avvolto dal mistero, e Allah solo potrebbe svelarne le occulte qualità".

L'insegnante sottolinea come questo numero fondamentale abbia una storia di origine 'costruttiva' e pone la seguente domanda: quanto deve essere lungo il raggio per costruire la circonferenza di una data lunghezza?
E' il problema che probabilmente si pose l'abile artefice fenicio che sembra abbia edificato una vasca circolare all'interno del Tempio di re Salomone. Secondo il *Primo libro dei Re* della Bibbia, la circonferenza misura 3 volte il diametro: 'Fece pure il mare di metallo fuso, a forma circolare, di dieci cubiti di diametro, cinque d'altezza e trenta di circonferenza'.
Per la Bibbia, dunque $\pi$ è uguale a 3: è la prima approssimazione del suo valore di cui abbiamo testimonianza.

Seconda fase
L'insegnante propone agli studenti, divisi in piccoli gruppi, una fase operativa, di seguito riportata, perché attraverso la "manipolazione" possano constatare quali difficoltà si incontrano nel ricavare un'approssimazione di $\pi$. E' opportuno che l'insegnante guidi gli alunni a riconoscere le difficoltà peculiari della misurazione. Con questa attività si possono reperire dati tramite misure e perseguire l'obiettivo di indagare sulla relazione tra due grandezze.
Queste prime due fasi si possono realizzare anche a livello del primo biennio.

Situazione

Considerate alcuni barattoli di forma cilindrica, aventi dimensioni differenti (diversa circonferenza di base, diversa altezza).

Proposta di lavoro

Misura
- Misurate la lunghezza del diametro di base di ciascun barattolo e annotate i valori su un foglio.
- Come potete misurare la lunghezza della circonferenza di base di ogni barattolo? Misuratela e annotate i valori sul foglio.
- Completate le prime due colonne della tabella 1, inserendo, per ciascun barattolo, i valori misurati per le lunghezze di diametro e circonferenza.

| diametro [cm] | circonferenza [cm] | |
|---|---|---|
| … | … | … |
| … | … | … |
| … | … | … |
| … | … | … |

*Tabella 1*

- Cosa accade alla lunghezza della circonferenza quando la lunghezza del diametro aumenta? E quando diminuisce?
- Dividete la lunghezza della circonferenza per la lunghezza del diametro e riportate i valori dei rapporti nella terza colonna della tabella.
- Cosa osservate? Come variano i valori dei rapporti che avete ottenuto?

- Che relazione c'è tra la circonferenza e il diametro? Provate a descriverla a parole.
- Disegnate su un grafico le coppie di numeri delle prime due colonne della tabella.

Dati

Rispondete alle seguenti domande, sulla base dei dati e del grafico:

- Come si dispongono i punti?
- Se aveste un barattolo di diametro di lunghezza 4,5 cm quanto sarebbe lunga la circonferenza?
- Quale sarebbe la lunghezza del diametro di base di un barattolo avente circonferenza di 17,2 cm?
- Se la lunghezza del diametro passa da un valore al suo doppio, come cambia la lunghezza della circonferenza?
- E se il diametro diventa la metà, come diventa la circonferenza?
- E se la circonferenza diventa il triplo, come cambia il diametro?

Modello

Supponete di avere un barattolo con un diametro di lunghezza $k$.

- Quanto vale la lunghezza della circonferenza?
- E se aveste un barattolo di diametro di lunghezza $2k$, quanto sarebbe lunga la circonferenza?
- Ora scrivete una legge algebrica che rappresenti la variazione della circonferenza $y$ in funzione del diametro $x$, servendovi di ciò che avete capito nell'esperimento.

L'insegnante nel momento di intergruppo si adopera per far comprendere agli studenti che, senza utilizzare formule o tanto meno "numeri fissi", il rapporto tra le misure di circonferenza e di diametro, nei limiti dell'incertezza, è costante e che tra le due grandezze c'è una relazione di proporzionalità diretta. L'indagine successiva sul grafico permette, inoltre, di legare tale relazione alla disposizione delle coppie di numeri della tabella nel piano: i punti (le coppie di misure), infatti, sono all'incirca allineati. Per raffinare ulteriormente l'indagine, è possibile richiedere agli studenti di determinare l'incertezza relativa ed assoluta del rapporto tra la circonferenza ed il diametro, a partire dall'incertezza assoluta di misura delle due grandezze.
Nel momento conclusivo di questa fase si procede verso l'astrazione: gli studenti, guidati dalle domande dell'insegnante, devono esplicitare in simboli le eventuali relazioni ottenute (introdurre un simbolo per la costante e tradurre in formula la proporzionalità).

<u>Terza fase</u>

L'insegnante sottopone all'attenzione degli studenti alcune considerazioni storiche, in particolare presenta il ruolo di Archimede nello studio di $\pi$, riferendo che $\pi$ è detto anche numero di Archimede. Egli fu, infatti, il primo a formulare una procedura geometrica per il suo calcolo approssimato. Il suo metodo consisteva nel racchiudere una circonferenza in due esagoni regolari-uno inscritto ed uno circoscritto-dei quali era in grado di calcolare il perimetro. Mediante il progressivo raddoppio del numero dei lati dei poligoni, raggiunse approssimazioni sempre migliori di $\pi$. Giunto a 96 angoli ottenne: $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$.
Dopo aver affrontato l'approssimazione di $\pi$ con il confronto fra il diametro e la circonferenza come misure dirette (seconda fase), si propone un altro metodo per ottenere valori approssimati della lunghezza della circonferenza con il calcolo dei perimetri di poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza. Dai perimetri dei poligoni inscritti si ottengono valori di $\pi$ approssimati per difetto, dai perimetri dei poligoni circoscritti valori approssimati per eccesso.

Situazione

Data una circonferenza, per semplicità di raggio unitario, inscrivere e circoscrivere ad essa poligoni regolari.

Proposta di lavoro

Determinate una misura approssimata della circonferenza, considerando poligoni regolari inscritti e circoscritti. Per fare ciò prendete in considerazione un quadrato inscritto, calcolate il valore del perimetro del quadrato. Successivamente raddoppiate il numero dei lati, in modo da avere un ottagono regolare inscritto, si calcoli il valore del perimetro anche in questo caso. Ora suddividete ulteriormente la figura e ottenete un poligono regolare di 16 lati, calcolate il perimetro. Se volete, provate anche a costruire un poligono regolare di 32 lati. Successivamente prendete in considerazione i poligoni circoscritti e procedete in modo analogo.
Quali considerazioni potete trarre dal confronto delle misure dei perimetri prima considerati?

L'insegnante conduce gli studenti alla consapevolezza che il procedimento è iterativo e quindi alla costruzione di una procedura.
Di seguito si propone il programma ottenuto con una calcolatrice grafico-simbolica. E' comunque del tutto indifferente rispetto all'efficacia dell'attività l'utilizzo di un qualsiasi altro strumento informatico per implementare la procedura.

```
F1      F2▾     F3▾  F4▾  F5     F6▾
▾       Control I/O  Var  Find…  Mode
:pigrel()
:Prgm
:Local n,l,s,k,a
:setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
:ClrIO
:Input "Inserisci il numero di iterazion
 i",n
:2→l
:1→s
:0→k
:While k<n
:l*s→a
MAIN            RAD AUTO          FUNC
```

*Figura 1*

```
F1      F2▾     F3▾  F4▾  F5     F6▾
▾       Control I/O  Var  Find…  Mode
 i",n
:2→l
:1→s
:0→k
:While k<n
:l*s→a
:√((1-√(1-s^2))/2)→s
:2*l→l
:k+1→k
:EndWhile
:Disp "π appr. ="&string(a)
:EndPrgm
MAIN            RAD AUTO          FUNC
```

*Figura 2*


*Figura 3*

<u>Quarta fase</u>
L'insegnante ora propone la determinazione di $\pi$ con un metodo che ricorre alla misura approssimata dell'area del cerchio mediante rettangoli. Si lavora sul piano cartesiano e gli studenti devono utilizzare l'equazione della circonferenza con centro nell'origine degli assi. L'insegnante può tener presente l'attività "Superfici scomode".

Situazione

E' data una circonferenza di raggio 1, rappresentata sul piano cartesiano con il centro nell'origine.

Proposta di lavoro

Determinate una misura approssimata dell'area racchiusa dalla circonferenza, utilizzando il metodo dei rettangoli.
Per fare ciò prendete in considerazione soltanto il primo quadrante, per via della simmetria della figura.
Determinate i valori approssimati per eccesso, eseguendo il calcolo nei seguenti tre casi:

- Divisione della base in 2 parti uguali.
- Divisione della base in 4 parti uguali.
- Divisione della base in 8 parti uguali.

Confrontate, ordinate i valori ottenuti e fate le vostre osservazioni.

L'insegnante fa notare agli studenti che all'aumentare delle divisioni della base si ottengono valori che approssimano sempre di più la misura dell'area del quarto di cerchio.

<u>Quinta fase</u>
Al termine dell'attività gli studenti, divisi in piccoli gruppi, producono una relazione sintetica dell'attività svolta, che può essere oggetto di valutazione.

**Possibili sviluppi**

- Numeri irrazionali. Il passaggio dal momento in cui il rapporto è uguale a un numero razionale, ottenuto da misure, a quello in cui si intuisce l'impossibilità di rappresentarlo come rapporto di numeri interi, è sicuramente un argomento che va approfondito successivamente (per es. logaritmi in base 10 di un numero e potenze a esponente razionale).

- Numeri trascendenti. La natura trascendente del numero $\pi$ può essere affrontata all'interno di altri nuclei tematici (numeri e algoritmi).
- Grandezze incommensurabili.
- Lo sviluppo dell'informatica.
- Approccio intuitivo al concetto di limite.

**Elementi di prove di verifica**

**1.** Il metodo di Archimede

- In un cerchio di diametro $r$ è inscritto un esagono regolare; il suo lato è dunque lungo $r$, e il perimetro è $6r$.

Determinare il perimetro dell'esagono regolare circoscritto, calcolando il rapporto tra gli apotemi dei due esagoni (si osservi che i due esagoni sono simili).
Determinare poi un valore di $\pi$, confrontando la lunghezza della circonferenza sia con il perimetro dell'esagono inscritto sia con il perimetro dell'esagono circoscritto.

- Archimede trova che la lunghezza della circonferenza è minore di 3 volte il diametro più 1/7 del diametro stesso, ed è maggiore di 3 volte il diametro più 10/71 del diametro.

Quali valori approssimati di $\pi$, per eccesso e per difetto, si ottengono?

# Superfici scomode

**Livello scolare**: 2° biennio

| Abilità interessate | Conoscenze | Nuclei coinvolti | Collegamenti esterni |
|---|---|---|---|
| Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza. | L'insieme dei numeri reali.<br><br>Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite.<br><br>Approssimazione dell'area sottesa da un grafico. | <u>Misurare</u><br><br>Numeri e algoritmi<br><br>Relazioni e funzioni<br><br>Argomentare, congetturare, dimostrare<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | Fisica |

**Contesto**
Figure geometriche.

Il contesto è quello delle figure geometriche del piano, con particolare attenzione alla questione relativa all'area, da un punto di vista esatto ed approssimato.

**Descrizione dell'attività**
Il progetto del percorso didattico si può suddividere in due parti: la prima riguarda le attività in ambiente carta e matita, che si può fare al terzo anno, la seconda le attività col supporto della tecnologia (calcolatrici o calcolatori), che può essere realizzata al quarto anno. Si può utilizzare una metodologia di lavoro di gruppo[1] e una di discussione collettiva, per la messa in comune e l'istituzionalizzazione del sapere coinvolto.
In una sperimentazione in classe di queste attività, il lavoro di gruppo, stimolando la comunicazione delle idee e delle strategie di risoluzione, è stato funzionale all'esplicitazione dei processi cognitivi degli allievi, oltre che svolgere un ruolo fondamentale nella costruzione della conoscenza in un contesto di interazione sociale. La parte di lavoro collettivo, importantissima dal punto di vista didattico per la fase di istituzionalizzazione dei saperi coinvolti, si è rivelata altresì interessante, in quanto ha permesso di mettere in luce elementi rimasti in ombra durante le attività di gruppo, attraverso il confronto tra gli allievi con la conduzione dell'insegnante.
I nodi concettuali messi in gioco con questa serie di attività sono:
- la misura, come processo di approssimazione (caratterizzata da incertezza) e come calcolo esatto (caratterizzata da un risultato non soggetto a incertezza);
- il discreto e il continuo.

I contenuti sviluppati sono: l'area di una figura piana irregolare, ottenuta con metodi di approssimazione; l'area sottesa da una curva sul piano cartesiano, ottenuta con calcoli esatti; l'area sottesa da una curva sul piano cartesiano, che non si possa ottenere con calcoli esatti, quindi ottenuta con calcoli approssimati, come nel primo caso; l'area sottesa da una curva sul piano

[1] Gruppi di due-quattro elementi, ciascuno con un'unica scheda di lavoro e, ove previste, una o due calcolatrici.

cartesiano (in un intervallo), in modo che tale area sia non un numero, ma una funzione dipendente dal secondo estremo dell'intervallo.
Può essere opportuno leggere agli studenti un brano storico che illustri come il metodo della quadratura, utilizzato da Archimede per la determinazione dell'area sottesa da una parabola, possa essere esteso ad altre funzioni. Questa fu una delle scoperte determinanti a metà del diciassettesimo secolo, per la nascita del calcolo integrale. Il brano è tratto da *De aequationum localium trasmutatione et emendazione*, di Pierre de Fermat, 1657:
*"Archimede si è servito della progressione geometrica nella sola quadratura della parabola; in tutti gli altri casi, confrontando quantità eterogenee, si è limitato alla sola progressione aritmetica. Forse perché aveva verificato che la sola progressione geometrica era meno adatta…? O forse perché il peculiare artificio richiesto da quella progressione* [esaustione sulla somma dei triangoli di area massima] *per quadrare la prima parabola* [$y=x^2$] *può difficilmente applicarsi alle altre? Ad ogni modo, io ho riconosciuto e provato che questo tipo di progressione è estremamente fecondo nelle quadrature, e volentieri comunico ai geometri moderni la mia scoperta, che permette di quadrare con lo stesso identico metodo sia le parabole* [$y=x^k$] *sia le iperboli* [$y=x^{-k}$] *... con l'unica eccezione dell'iperbole apolloniana* [$y=x^{-1}$]…"

Prima fase
Nella prima fase agli studenti viene chiesto di determinare l'area di una figura piana a forma di ameba, lasciando il problema aperto e non suggerendo metodi di calcolo.

Proposta di lavoro 1
Determinate l'area della figura in cartoncino, scegliendo uno o più metodi; spiegate quale/i metodo/i avete utilizzato e perché li avete scelti.

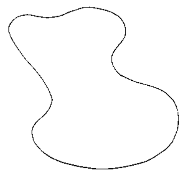


*Figura 1*

Una discussione collettiva segue questa attività, con lo scopo di confrontare i diversi metodi utilizzati dagli studenti, che potranno essere di triangolazioni, quadrettature, misure dirette o calcoli. L'insegnante fa convergere la discussione all'utilizzo di un metodo condiviso da tutta la classe, che consiste nell'ottenere una misura dell'area approssimata per difetto e una approssimata per eccesso, in modo tale da poter quantificare l'approssimazione stessa (come differenza tra le due misure).

Proposta di lavoro 2
Determinate l'area della figura in cartoncino, utilizzando le tre griglie quadrettate che vi vengono fornite: con quadretti di lato rispettivamente 1 cm, 0,5 cm e 0,1 cm.

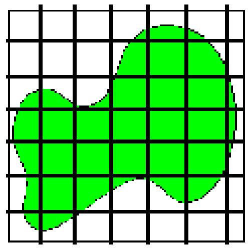


*Figura 2*

Tramite questa attività, gli allievi sovrappongono la figura ameboide a una griglia quadrettata per volta, ottenendo varie misure dell'area della figura stessa, tramite il conteggio dei quadretti che contengono la figura (misura per eccesso) e di quelli che sono interamente contenuti nella figura (misura per difetto).
Tale attività ha l'obiettivo di far riflettere sul fatto che si raggiunge un'approssimazione migliore con la quadrettatura più fine, riuscendo a quantificare la misura dell'area come semisomma delle misure per eccesso e per difetto (media aritmetica delle due) e dell'intervallo di incertezza come differenza tra la misura per eccesso e per difetto.
La discussione che segue l'attività ha lo scopo di raccogliere i dati ottenuti dai gruppi di studenti, che in generale non è detto che coincidano (per scelte effettuate di calcolo di quadretti o per errori vari).
In una sperimentazione effettuata in classe, per rispondere all'esigenza manifestata da alcuni allievi di conoscere il valore esatto dell'area della sagoma, si è partiti dal confronto degli intervalli di misura ottenuti mediante l'impiego delle tre quadrettature. Sono stati scritti alla lavagna gli intervalli di misura e le incertezze assolute e relative ottenute nei tre casi, utilizzando correttamente la tecnica della misura, cioè andando a considerare i quadretti contenuti interamente nella figura (area per difetto) e quelli contenenti interamente la figura (area per eccesso).
I dati in possesso erano i seguenti:

- quadretti grandi (unità di misura $q_1$, di lato 1 cm):
  $$93 < A < 164, \quad i_{ass} = 71\ q_1, \quad i_{rel} = 27{,}6\ \%$$
- quadretti medi (unità di misura $q_2$, di lato 0,5 cm):
  $$436 < A < 576, \quad i_{ass} = 140\ q_2 = 35q_1, \quad i_{rel} = 13{,}8\ \%$$
- quadretti piccoli (unità di misura $q_3$, di lato 0,1 cm):
  $$12252 < A < 1364, \quad i_{ass} = 812\ q_3 = 8{,}12\ q_1, \quad i_{rel} = 3{,}2\ \%.$$

Ulteriori sviluppi di questa attività possono essere rivolti alla misura di aree di figure piane note, come ellissi, circonferenze, con metodo di approssimazione delle quadrettature, in modo che gli studenti possano eventualmente anche scegliere di rappresentare tali figure sul piano cartesiano.

Seconda fase
Le attività della prima fase proseguono ora con un'apertura al piano cartesiano, che ha come obiettivo quello di portare la riflessione della misura approssimata di aree dalle figure ameboidi alle regioni limitate da curve sul piano cartesiano.

Situazione

Nelle figure seguenti trovate rappresentate delle funzioni sul piano cartesiano.

Proposta di lavoro

Determinate le aree indicate nelle seguenti figure; spiegate i metodi scelti e perché li avete usati.
Valutate l'incertezza delle misure trovate.
Area compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 2$, la retta $x = 5$ e l'asse delle ascisse, indicata in figura:

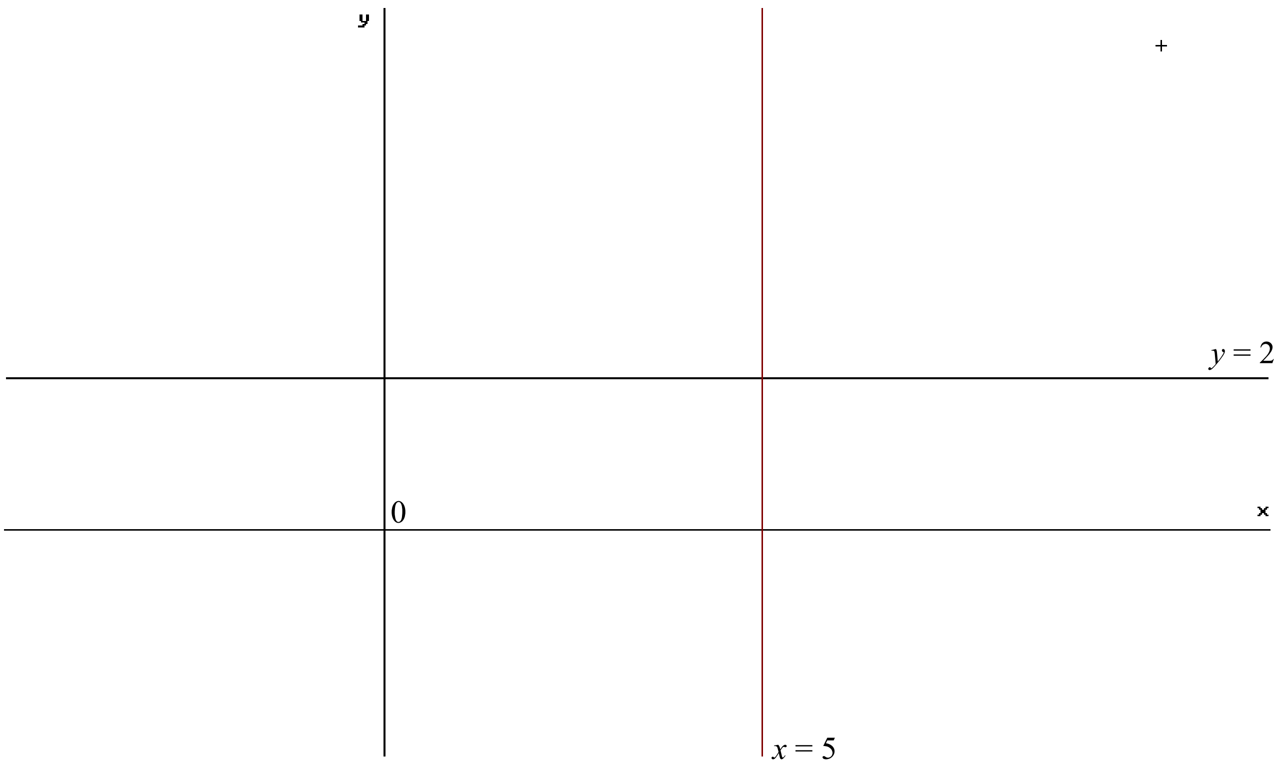



*Figura 3*

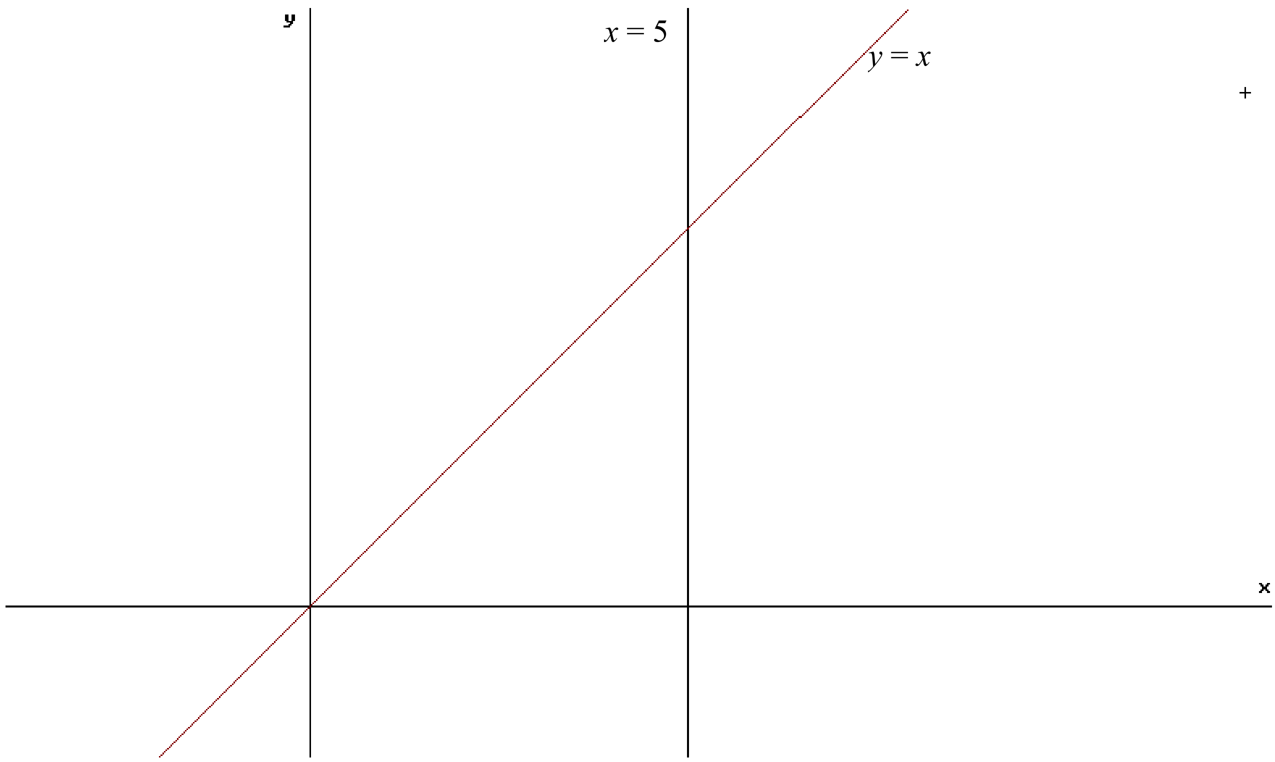



*Figura 4*

Area compresa tra la parabola $y = x^2$, la retta $x = 3$ e l'asse delle ascisse, indicata in figura:

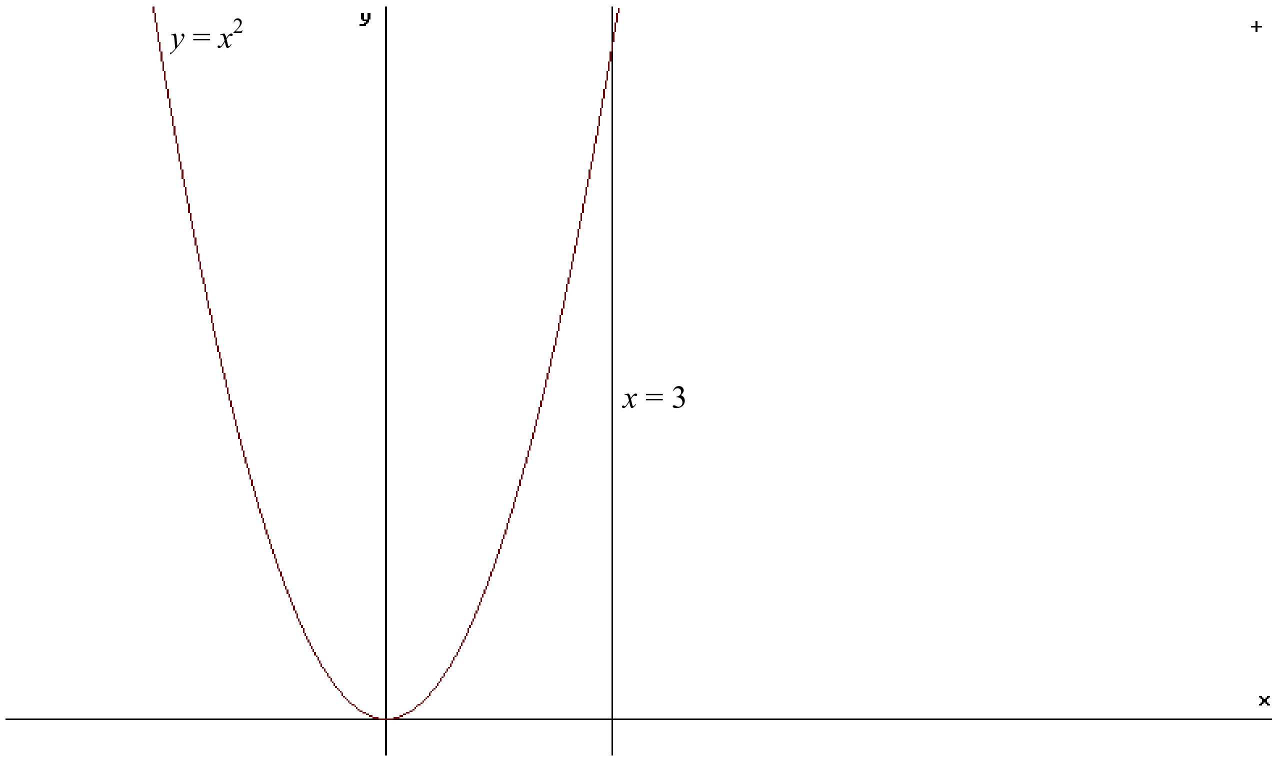



*Figura 5*

Questa attività presenta due situazioni in cui l'area può essere ottenuta come calcolo esatto, nel caso di un rettangolo e di un triangolo, mentre il terzo caso si presenta come diverso dai due precedenti, in quanto l'area non può essere ottenuta come risultato esatto. In questo caso, gli studenti attiveranno nuovamente metodi di approssimazione, che possono ricalcare quelli usati in precedenza per la forma ameboide, o essere nuovi. Da una sperimentazione effettuata in classe, si è visto che gli studenti, dopo aver suddiviso ulteriormente l'intervallo di misura, introducono metodi di calcolo approssimato con rettangoli contenuti e/o contenenti il grafico della parabola, oppure utilizzano trapezi con lato obliquo per due punti della funzione, o ancora trapezi con lato obliquo tangente al grafico della funzione.
Dalla discussione che segue, l'insegnante guida gli studenti a scegliere un metodo implementabile sulla calcolatrice o sul calcolatore, in modo che sia possibile quindi scrivere un algoritmo di calcolo. Si sceglie il metodo dei rettangoli (in analogia alle quadrettature utilizzate nella prima fase), per avere una valutazione dell'incertezza e si applica tale metodo in vari casi di determinazione di aree sottese da funzioni continue e monotone su intervalli limitati.

Dopo aver discusso del metodo dei rettangoli facendo riferimento ad una figura esplicativa alla lavagna, si può passare a tradurre l'algoritmo nella sintassi dei comandi della calcolatrice, per poi inserirlo nella stessa (nell'apposito ambiente di programmazione) assegnandogli un nome.
La figura 6 mostra un programma che calcola un'approssimazione per difetto dell'area sottesa dalla parabola $y = x^2$, e che è stato chiamato appunto ardif; la figura 7 mostra il programma analogo per l'area per eccesso (arecc), tali programmi sono nel linguaggio delle calcolatrici grafico-simboliche, ma possono essere implementati in un linguaggio di programmazione o tramite un foglio elettronico.

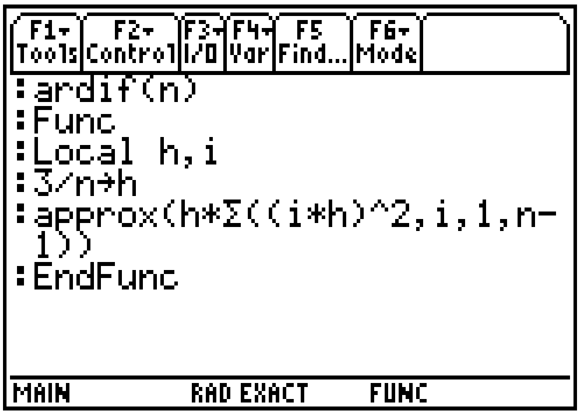



*Figura 6*

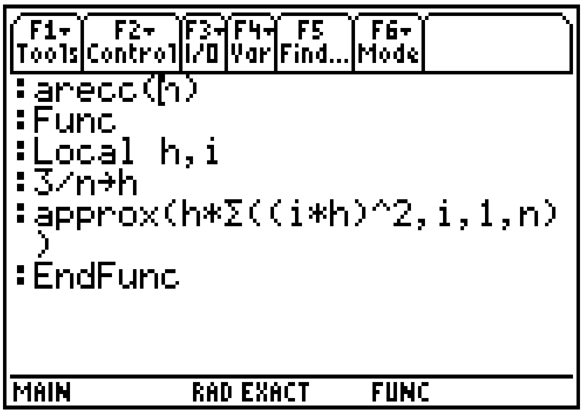



*Figura 7*

Nelle seguenti figure si può osservare la convergenza delle due successioni di risultati verso il valore 9:

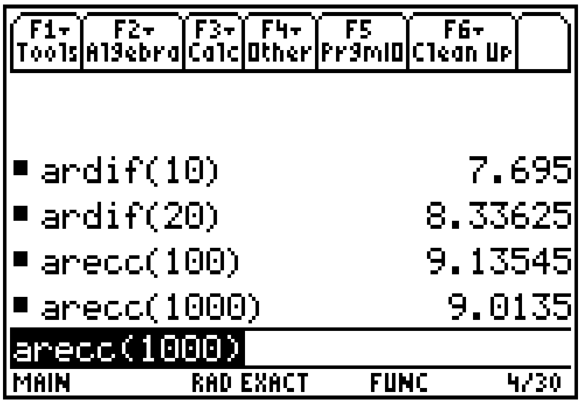



*Figura 8*

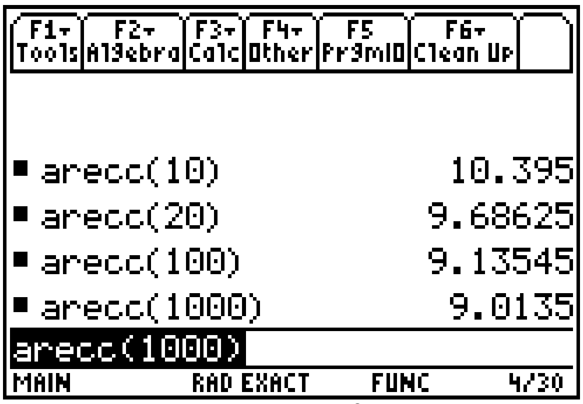



*Figura 9*

**Possibili sviluppi**

Questa attività si può sviluppare ulteriormente in varie direzioni: per esempio, può evolvere nella direzione di determinare aree in cui l'estremo destro dell'intervallo di misura non è un numero, ma una variabile $k$: ciò comporta che l'area sia funzione di $k$, come nelle proposte seguenti:

- Determinare l'area compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 2$, la retta $x = k$ e l'asse delle ascisse. Qual è la funzione che rappresenta l'area considerata?

- Determinare l'area compresa tra la retta $y = x$, la retta $x = k$ e l'asse delle ascisse. Qual è la funzione che rappresenta l'area considerata?

Oppure si può arrivare all'utilizzo del comando di integrazione in un software di calcolo simbolico o in una calcolatrice grafico-simbolica, per poter avere uno strumento di calcolo di aree sottese da funzioni, prima ancora di fondare il concetto di integrale dal punto di vista formale dell'analisi matematica.

L'intero percorso ha come obiettivo quello di fondare il significato di integrale definito, prima di ricorrere alla teoria dell'analisi matematica, ma puntando a metodi e processi di calcolo esatto e approssimato, in ambito di geometria piana e di ambiente cartesiano.

# Quanto è lontana la Luna?

**Livello scolare**: 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Analizzare e rappresentare dati ottenuti da misure di grandezze.<br><br>Rappresentare variazioni di grandezze in funzione di altre.<br><br>Determinare approssimazioni di lunghezze, aree, volumi ed effettuare una stima dell'incertezza. | Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.<br>La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili.<br>Seno, coseno e tangente di un angolo.<br>Coordinate polari.<br>Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo. | Misurare<br><br>Numeri e algoritmi<br><br>Spazio e figure<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | Astronomia<br><br>Filosofia<br><br>Fisica<br><br>Scienze |

**Contesto**
Corpi celesti.

Il contesto dell'attività è quello del moto dei corpi celesti, con particolare riguardo alla rivoluzione della Luna intorno alla Terra ed al fenomeno (relativamente frequente) dell'eclisse totale di Luna.

**Descrizione dell'attività**
Servendosi di opportuni dati astronomici, rintracciati sui repertori ufficiali, e di alcune immagini, prelevabili da Internet, dell'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001, con l'ausilio di alcuni calcoli trigonometrici, si giunge a stimare la misura della distanza Terra-Luna.
Prerequisiti: angoli e loro misura, seno, coseno, tangente e teoremi sui triangoli rettangoli, conoscenze sul fenomeno delle eclissi.
Obiettivo: fornire un contesto nel quale applicare nozioni elementari di trigonometria per ricavare una misura indiretta di una grandezza astronomica significativa.

Prima fase

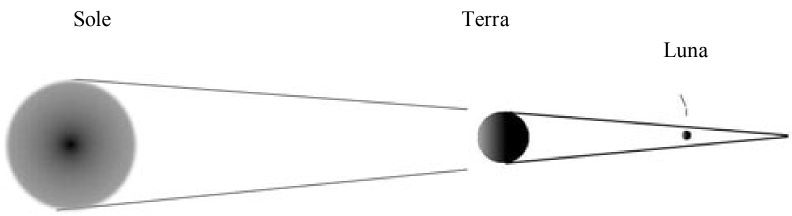



*Figura 1*

Partendo da alcuni dati astronomici noti, servendosi di alcune immagini fornite dall'insegnante, si procede al calcolo della lunghezza del cono d'ombra prodotto dalla Terra.
Come è noto, la Terra produce un cono d'ombra nello spazio.

Seconda fase
Si effettua la misurazione indiretta dell'ampiezza angolare del cono d'ombra prodotto dalla Terra in occasione di un'eclisse di Luna.
La misura dell'apertura di tale cono d'ombra può essere rintracciata nei repertori di dati astronomici. Per quel che riguarda l'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001, tale apertura è pari a (0,54)°. Si procede adesso al calcolo della lunghezza del cono d'ombra terrestre, indicata con il simbolo $R_S = R_{Shadow} = R_{Ombra}$.

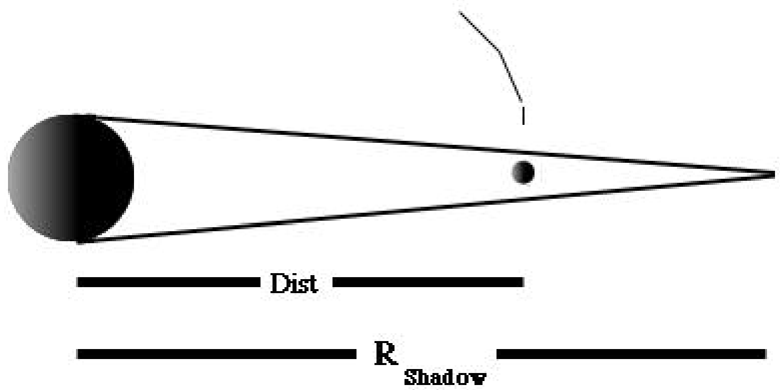



*Figura 2*

Prima di tutto si ricorda che il raggio terrestre è circa pari a 6372 km. Pertanto la lunghezza del cono d'ombra terrestre misura circa $R_S = 6372 / sen\,(0.27)° = 1352185$ km $\approx 1{,}352 \times 10^6$ km.

Terza fase
Si elabora una formula trigonometrica per valutare la distanza Terra-Luna.

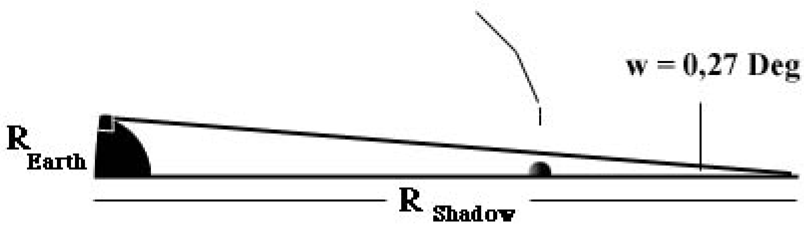



*Figura 3*

Come mostra il precedente disegno, il diametro dell'ombra diminuisce all'aumentare della distanza dalla Terra. Misurando la semiampiezza angolare *v* dell'ombra durante l'eclisse, si è in grado di determinare la distanza Terra-Luna.

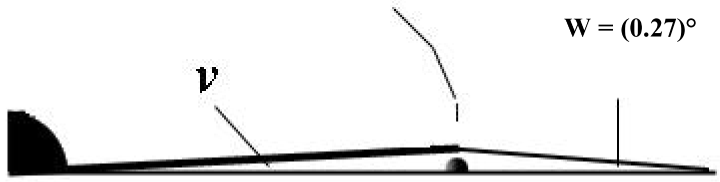



*Figura 4*

Si suddivide allora il triangolo sopra riportato in una parte destra ed in una parte sinistra. Si denomina poi con *h* l'altezza di tale triangolo. Considerando il triangolo di sinistra si ottiene:

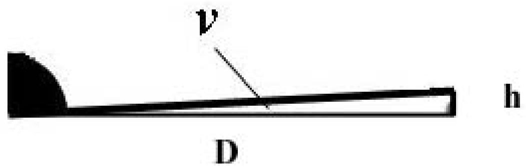



*Figura 5*

$$\tan(\nu) = \frac{h}{D}$$

Dal triangolo di destra della figura 4 si ricava anche:

$$\tan(w) = \frac{h}{R_s - D} \quad .$$

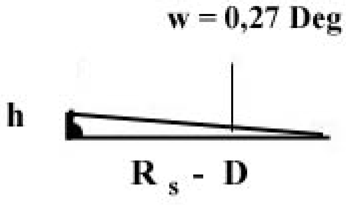



*Figura 6*

Combinando queste due ultime equazioni si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{\tan(w)}{\tan(\nu)} = \frac{R_s - D}{D} = \frac{R_s}{D} - 1 \quad ,$$

ovvero

$$\frac{\tan(w)}{\tan(\nu)} + 1 = \frac{R_s}{D} \quad ,$$

dalla quale si ricava:

$$D = \frac{R_S}{\dfrac{\tan(w)}{\tan(v)} + 1} \quad .$$

Come annotazione significativa dal punto di vista storico, si può ricordare che Aristotele (384–322 a.C.) osservò la forma circolare dell'ombra prodotta dalla Terra proprio durante un'eclisse di Luna e dedusse correttamente che il nostro pianeta ha forma sferica!

Quarta fase
Si procede al calcolo della distanza Terra-Luna mediante la formula in precedenza ricavata, analizzando l'incertezza del risultato e confrontandolo con i dati ufficiali.

L'angolo $v$ in precedenza considerato può essere stimato uguale a circa la metà di (1,42)°, ovvero (0,71)°. Il valore di (1,42)° è ricavato direttamente dagli studenti, i quali, servendosi della figura 9, misurano il diametro angolare dell'ombra prodotta dalla Terra, confrontandolo anche con quello ricavabile dalla figura 8 e tenendo conto dell'unità di misura di 1° riportata direttamente sulle immagini utilizzate. Questa operazione di misurazione può essere effettuata in gruppo o individualmente e si presta ad un'analisi della variabilità dei risultati. Inserendo il valore di $v$ – insieme con il valore dell'apertura angolare del Sole (semidiametro) $w = (0{,}27)°$ (come riportato in un repertorio di dati astronomici) – nella precedente formula si ricava:

$$D = \frac{1{,}352 \times 10^6}{\dfrac{\tan(0{,}71)}{\tan(0{,}27)} + 1} = 3{,}72 \times 10^5 \,\text{km}$$

Gli studenti  possono valutare, a titolo di esercizio, l'incertezza da cui sono affette le misure ottenuta nel corso dell'attività. In particolare, partendo da una ragionevole incertezza di 1 km nella valutazione della misura del raggio della Terra e di 0,01° nella valutazione dell'ampiezza dell'angolo $w$ , si può ricavare una stima per l'incertezza della misura $R_S$. In seguito, analizzate le incertezze relative ai valori angolari $w$ e $v$, sulla base delle leggi di propagazione degli errori nelle moltiplicazioni e nelle divisioni, si perviene ad una stima dell'errore commesso sulla valutazione della distanza *D*. E' istruttivo poi determinare la differenza percentuale tra il valore di *D* ricavato con questa analisi ed il valore di *D* fornito da un programma di calcolo astronomico, ad esempio "MOONCALC": in relazione al valore sopra indicato, tale differenza  ammonta appena al 5%!

Immagini dell'eclisse di Luna del 9 gennaio 2001

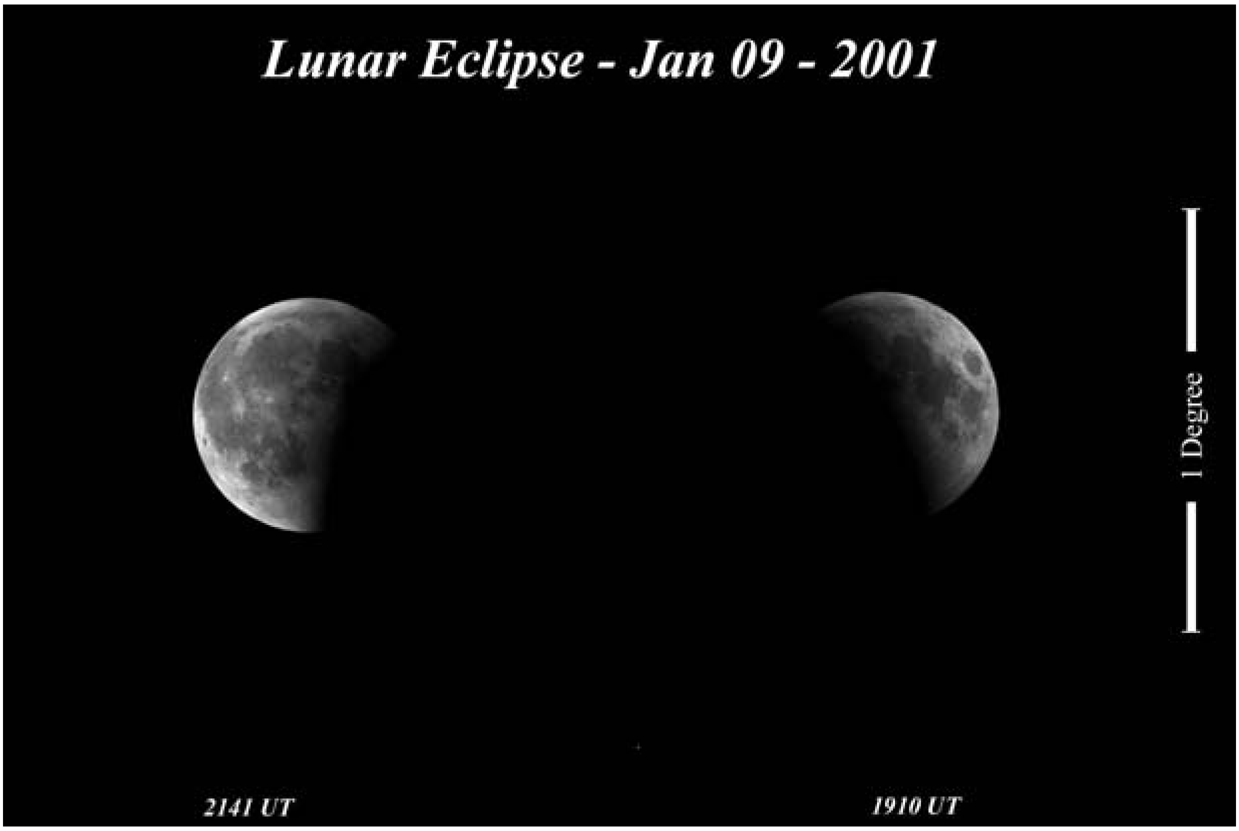



*Figura 7*

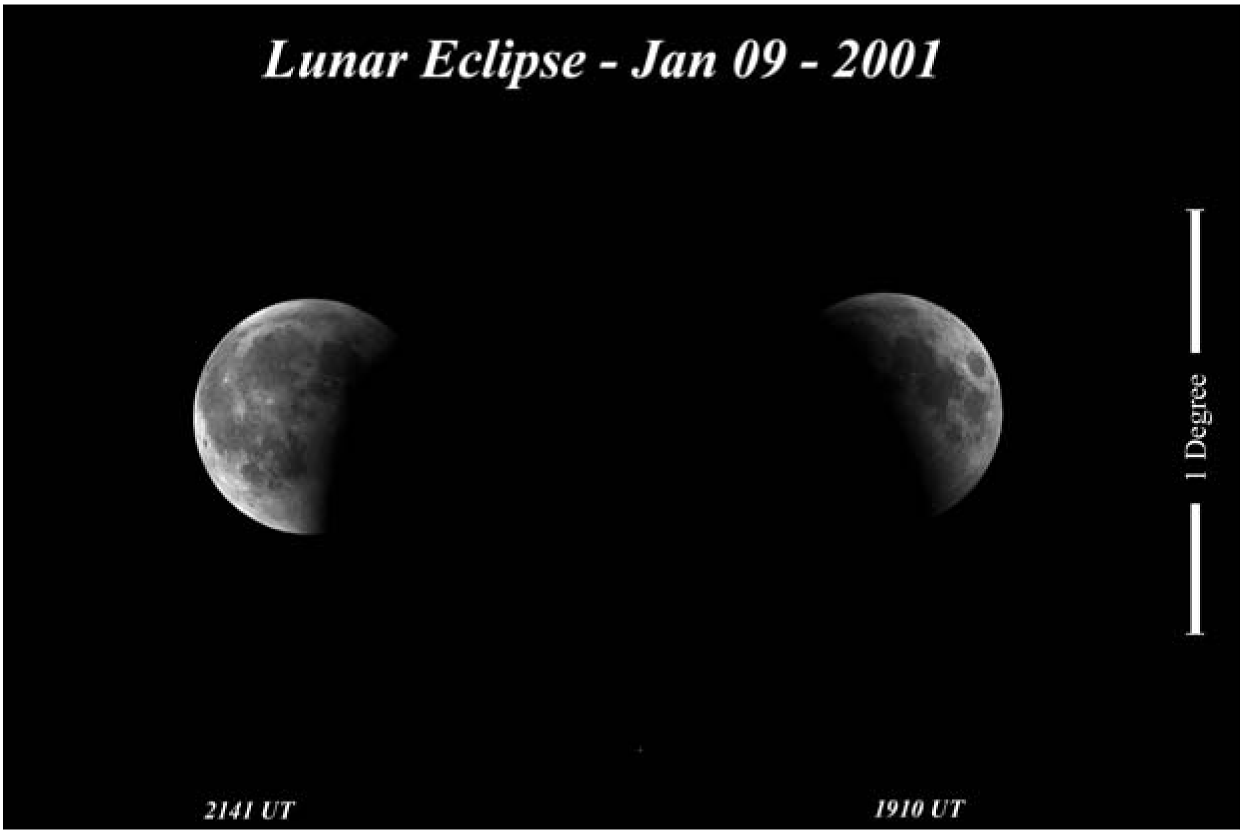



*Figura 8*

(La precedente immagine è una combinazione di due immagini distinte. L'effetto è stato ottenuto sovrapponendo con attenzione le due immagini, a partire da accurate misurazioni astronomiche effettuate durante ciascuna esposizione).

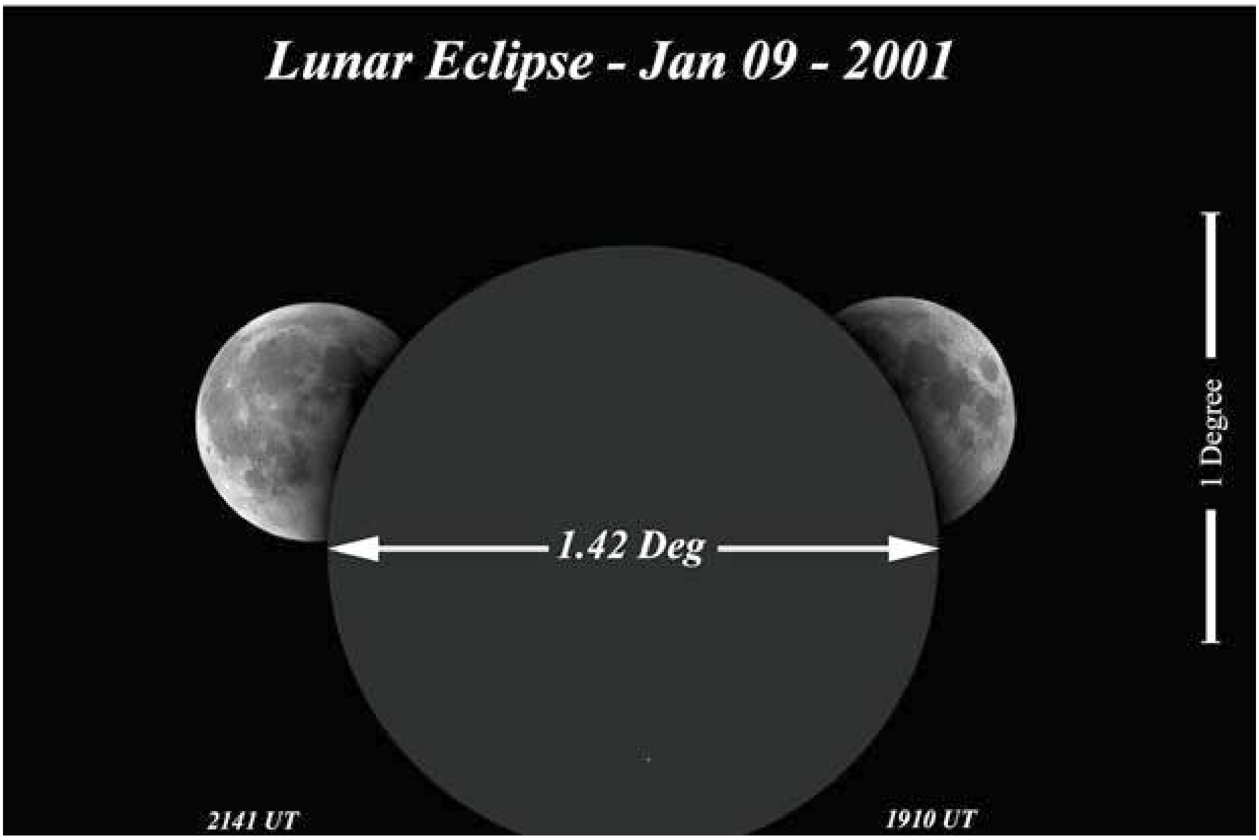


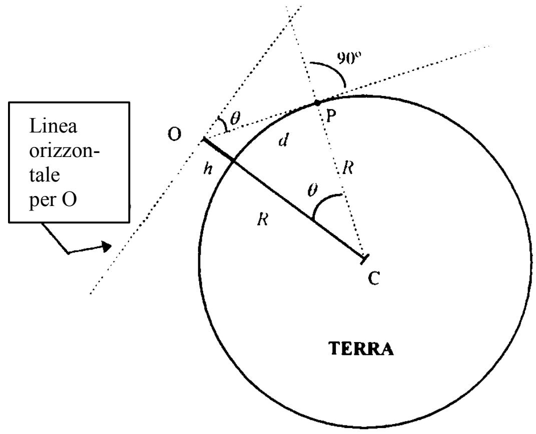

*Figura 9*

**Elementi di prove di verifica**

**1.** A quale distanza dai nostri occhi si trova l'orizzonte?
L'immensità dei grandi spazi aperti fa normalmente ritenere che l'orizzonte geografico si trovi molto lontano da un osservatore, ad esempio a svariate decine di chilometri di distanza secondo alcuni, addirittura ancora più lontano secondo altri. Prova adesso a valutare se in realtà è veramente così.
Immagina che la Terra sia una sfera di raggio $R$. Considera un osservatore posto nel punto O ad un'altezza $h$ rispetto alla superficie terrestre. Il punto P appartiene alla linea dell'orizzonte, che è definita come il luogo geometrico dei punti di tangenza alla superficie del globo, relativi alle direzioni che escono dal punto O.

*a)* Descrivi geometricamente la linea dell'orizzonte in base alla precedente definizione, giustificando la tua risposta.

*b)* Considera il triangolo OCP e ricava un'espressione letterale per la distanza OP, in funzione dei dati $R$ e $h$. Spiega perché, dal momento che, in generale, è $h \ll R$, si può scrivere, senza avere una grande incertezza, $d = \sqrt{2Rh}$ .




*Figura*

*c)* Nel caso della Terra ($R$ = 6,372 · $10^6$ m), supponendo che l'osservatore si trovi nel mezzo dell'oceano (al fine di evitare gli inconvenienti legati alla presenza di rilievi sul terreno), a bordo di un'imbarcazione e con gli occhi posti ad un'altezza $h$ = 15,0 m rispetto alla superficie dell'acqua, determina qual è il valore della distanza $d$.

Quando dirige lo sguardo verso il punto P, l'osservatore non guarda secondo la direzione orizzontale, bensì secondo l'angolo $\vartheta$ al di sotto della linea orizzontale stessa passante per O (questo angolo $\vartheta$ è generalmente noto con il nome di depressione apparente dell'orizzonte).

*d)* Ricava una formula goniometrica per determinare l'angolo $\vartheta$ e il suo valore, servendoti dei dati precedentemente forniti.

*e)* Utilizzando le espressioni che hai in trovato precedenza, nel caso di un osservatore che si trovi lungo una spiaggia, con gli occhi posti ad un'altezza di 1,60 m rispetto alla superficie dell'acqua, ricava i valori di $d$ e di $\vartheta$.

D'altra parte, la formula ottenuta nel punto *b)* mostra che il valore di $d$ dipende da $R$ e ciò ha alcune curiose conseguenze.

*f)* Considera infatti un corpo celeste di piccole dimensioni, come ad esempio Cerere ($R$≈480 km), il quale è approssimativamente sferico. Stabilisci dove un osservatore di altezza $h$ = 1,60 m, in piedi, vede il punto P e valuta anche l'ampiezza dell'angolo $\vartheta$. Analizza quindi come cambiano le due risposte precedenti nel caso del Sole ($R$ = 7,0 · $10^8$ m), ammettendo che esso abbia una superficie solida ed una temperatura sopportabile e che l'elevato valore del campo gravitazionale non crei alcun effetto sul fenomeno considerato.

A questo punto si è verificato che la linea dell'orizzonte non si trova così lontana come in apparenza potrebbe sembrare. L'analisi svolta ammette la presenza di superfici perfettamente sferiche, il che non è vero nel caso della Terra e degli altri corpi celesti.

*g)* Dal momento che, di solito, si considerano piccole distanze nelle vicinanze del punto O, per quale motivo si può affermare che le semplificazioni adottate nei precedenti calcoli sono ragionevolmente legittime? Esprimi la tua opinione a proposito.

**Elementi di prove di verifica**

**Livello scolare:** 2° biennio

**1.** Troppa precisione!
Una ragazza misurò la lunghezza e la larghezza di un rettangolo e trovò 2,3 cm e 3,6 cm; calcolò l'area ed ottenne 8,28 $cm^2$. Quando si sentì dire dal suo insegnante che il suo risultato era di gran lunga troppo accurato, fu molto disorientata – non avrebbe mai pensato di riuscire a fare qualcosa in modo più che accurato. Perché l'insegnante fece questo commento?

**2.** Il cannocchiale
Il terreno su cui sorge un fabbricato è piano, ma inclinato. Si ha a disposizione uno strumento per determinare il livello del terreno: esso è costituito da un teodolite sistemato orizzontalmente che può ruotare attorno al suo asse verticale e da un'asta graduata verso cui si può puntare il cannocchiale per poter leggere la differenza di livello. L'oculare del cannocchiale è munito di una scala graduata che consente di determinare anche la distanza dell'asta.
Qual è il modo più semplice per trovare l'inclinazione del terreno e la direzione dell'inclinazione?

**3.** Misura dell'arco
Determinare la misura dell'arco della curva, grafico della funzione $y = \sqrt{x^3}$ fra i punti di ascissa 1 e 2.

**4.** Calcolo della temperatura
Supponiamo che le temperature, rilevate ogni due ore, di una certa giornata dell'anno, siano quelle riportate nella seguente tabella. Calcolare, per approssimazione, l'area compresa tra l'asse $x$ e la curva che congiunge i valori assegnati. Determinare, tramite essa, la temperatura media durante la giornata.

| Ora | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura | 16 | 15 | 13 | 12 | 15 | 21 | 28 | 31 | 28 | 20 | 15 | 13 |

**5.** L'orologio
Un orologio, allo scoccare della mezzanotte ufficiale, segna le 23 e 59. Qual è l'incertezza assoluta e quella relativa?

**6.** La calcolatrice
Una calcolatrice rappresenta i numeri in forma esponenziale (in base 10) e ha a disposizione 2 posti per le cifre del numero e 1 posto per quelle dell'esponente. La cifra prima della virgola è sempre diversa da zero; si può inoltre specificare sia il segno del numero sia quello dell'esponente.

*a)* Quali sono il numero minimo e quello massimo rappresentabili da questa calcolatrice?
*b)* Quanti sono i numeri positivi rappresentabili inferiori ad 1?
*c)* Quanti sono in tutto i numeri macchina rappresentabili da tale calcolatrice?

**7.** $\pi$ è un numero normale?
Nelle prime 200 cifre decimali di $\pi$ qual è la frequenza di 0, di 1, di 2, …? Qual è la proporzione delle cifre pari? Quante sono le sequenze di due cifre che si ripetono? E quante quelle di tre cifre?

## Riferimenti bibliografici


Alder, K. (2002). *La misura di tutte le cose,* Rizzoli, Milano.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2002). *Matematica*, collana: Professione Docente, La Scuola, Brescia.

Barozzi, G. C. & Cappuccio S. (1997). *Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, Pitagora, Bologna.

Blatner, D. (1999). *Le gioie del $\pi$*, Garzanti, Milano.

Castelnuovo, E., Gori Giorgi, C. & Valenti, D. (1986). *La matematica nella realtà- geometria analitica, logaritmi, geometria dello spazio, statistica,* la Nuova Italia, Firenze.

Fontana, M. & Ghiandoni, G. (1987). *I sistemi di misura. Introduzione alla metrologia: regole, convenzioni, scrittura,* Editori Riuniti, Roma.

Israel, G. (2002). *Modelli matematici. Introduzione alla matematica applicata*, F. Muzzio, Padova.

Lombardo Radice, L. & Mancini Proia, L. (1979). *Il metodo matematico*, vol. 3, Principato, Milano.

Maraschini, W. & Palma (2001). *Format. SPE (triennio),* Paravia, Torino.

Maraschini, W. & Palma (2002). *Multiformat. Numeri, macchine e metodi numerici,* Paravia, Torino.

Maraschini, W. & Palma (2002). Problemi e modelli della Matematica, vol. A, Paravia, Torino.

Maraschini, W., Menghini, M. & Palma (1990). *Strategie matematiche*, Paravia, Torino.

Nolli, N., Pivetta, M., Robutti, O. & Rossetto, R. (1998). Statistica e probabilità. Modulo quinquennale, *Nuova Secondaria*, 8, 37-47.

Robutti, O. & Sabena, C. (2003). La costruzione del significato di integrale, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol.26B, n.4, 473-498.

Robutti, O. (2001). Matematica, in: A. Colombo, R. D'Alfonso, M. Pinotti, *Curricoli per la scuola dell'autonomia*, La Nuova Italia, Firenze, 206-224.

Robutti, O. (2002). La tecnologia nell'insegnamento della matematica (parte I), *Progetto Alice*, 7, 99-121.

Robutti, O. (2002). La tecnologia nell'insegnamento della matematica (parte II), *Progetto Alice*, 8, 347-364.

Tahan, M. (1996). *L'uomo che sapeva contare*, Salani, Firenze.


## Siti Web (2003)


http://www.amtsgym-sdbg.dk/as/moondist2001/uk.htm

http://www5.indire.it:8080/set/comunicazione/comunicazione.htm