

Sciogliamo i nodi

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo ad essa equivalente e, viceversa, dato un grafo di calcolo, scrivere l'espressione numerica ad esso corrispondente. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni	

Contesto

Calcolo algebrico.

Gli studenti non sempre riescono a raggiungere una soddisfacente competenza nel calcolo aritmetico e algebrico, nonostante il tempo che a esso è dedicato.

Le difficoltà incontrate dagli studenti si articolano sostanzialmente in due direzioni: l'aspetto computistico (il saper fare) e l'aspetto algoritmico (il saper organizzare). Mentre per l'ambito computistico è relativamente difficile aggiungere qualcosa di nuovo alle varie metodologie illustrate nei materiali didattici già esistenti, per l'aspetto algoritmico, invece, se preso in considerazione in maniera separata dal primo, si può prospettare un intervento didattico diverso e ipotizzare un percorso di apprendimento alternativo alle tradizionali metodologie di intervento.

Descrizione dell'attività

Tradizionalmente l'esecuzione di un'espressione algebrica è caratterizzata dalla risoluzione della stessa. Mediante una successione di operazioni (comunemente dette "passaggi"), si va da una forma descrittiva ampia, la traccia ("semplice" o "articolata"), ad una forma più sintetica, ma equivalente, che rappresenta il risultato.

Quest'attività, ai fini di un maggior coinvolgimento emotivo dello studente, pone l'attenzione sull'aspetto grafico, e rinvia il calcolo algebrico ad un secondo momento.

Prima fase

L'attività viene proposta in classe quando gli studenti devono affrontare espressioni algebriche più complesse e inizia con la costruzione verticale di un diagramma a forma di triangolo rovesciato. La stesura del diagramma, in seguito chiamata albero, inizia dalle operazioni indicate nella traccia e si articola in ramificazioni successive, sempre meno dense, terminanti all'ultimo nodo di chiusura. I nodi sono posti su vari livelli, in funzione delle regole di calcolo e dei criteri di svolgimento dell'esercizio.

Risoluzione grafica di espressione algebrica.

Esempio 1

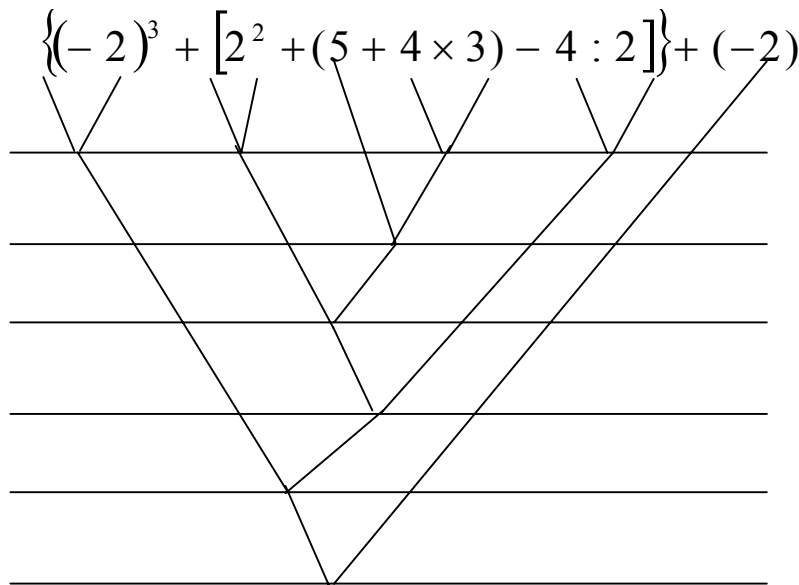


Figura 1

La risoluzione grafica di ogni espressione avviene seguendo queste fasi:

- si tracciano delle linee orizzontali, man mano che servono: queste linee rappresentano i diversi livelli di risoluzione o di "scioglimento dell'espressione" necessari per la risoluzione della stessa;
- rispettando le "regole algebriche", si tracciano per ciascuna operazione due linee oblique che confluiscono in un punto, detto nodo, terminanti sulla linea di livello corrispondente;
- si ripetono le fasi precedenti, per tutte le operazioni e per i diversi livelli, fino all'esaurimento delle operazioni stesse e all'identificazione del nodo conclusivo;
- le linee oblique di ciascuna operazione non si devono mai intrecciare: questa eventualità evidenzia una condizione di confusione o di disordine mentale (nell'esempio 2 che segue sono evidenziate in grassetto);
- le linee oblique, quando confluiscono in un nodo, non devono attraversare più linee di livello: questa descrizione grafica evidenzia una modalità risolutiva elementare: "...un'operazione per volta ..." (nell'esempio 3 sono evidenziate in grassetto);
- le linee oblique, quando confluiscono in un nodo, non devono mai essere più di due: questa descrizione grafica evidenzia una modalità risolutiva complessa che può generare confusione se effettuata con scarsa consapevolezza (nell'esempio 3 sono evidenziate in grassetto).

Ogni espressione sarà, dunque, caratterizzata da un grafico e non da una sequenza di espressioni equivalenti: viene meno, dunque, il significato di uguaglianza ed è reso più evidente l'aspetto semantico della semplificazione.

Risoluzione grafica di espressioni contenenti errori.

Esempio 2

$$\{(-2)^3 + [2^2 + (5 + 4 \times 3) - 4 : (-2)]\} + 2$$

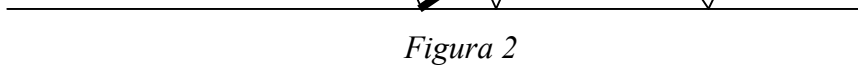


Figura 2

Esempio 3

$$\{(-2)^3 + [2^2 + (5 + 4 \times 3) - 4 : 2]\} + 2$$

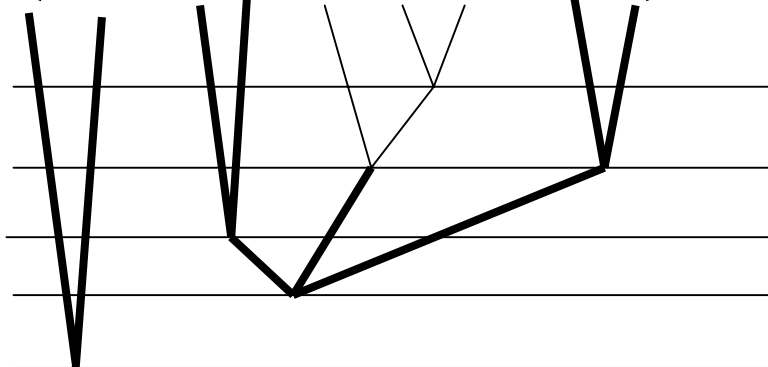


Figura 3

Dal punto di vista didattico la metodologia proposta presenta un'ulteriore vantaggio per l'insegnante e per lo studente: la possibilità di misurare oggettivamente la complessità di un esercizio.

Se per ogni linea di livello indichiamo il numero di nodi presenti (ossia le operazioni eseguite in quel momento) e lo confrontiamo con un altro valore di pari livello di un'altra espressione, conosceremo la diversa complessità delle due espressioni in un determinato momento risolutivo. Se questo risultato è moltiplicato per un peso avente solo un valore numerico e non qualitativo, ad esempio il numero ordinale del livello, si otterrà il peso dell'espressione relativo al livello, ossia la complessità relativa. In ultimo, se le considerazioni sono ripetute per tutta la risoluzione e sommate tra loro, si avrà, ovviamente, la misura o il peso della complessità globale dell'espressione.

Risoluzioni di espressioni algebriche con indicazione della complessità.

Esempio 4

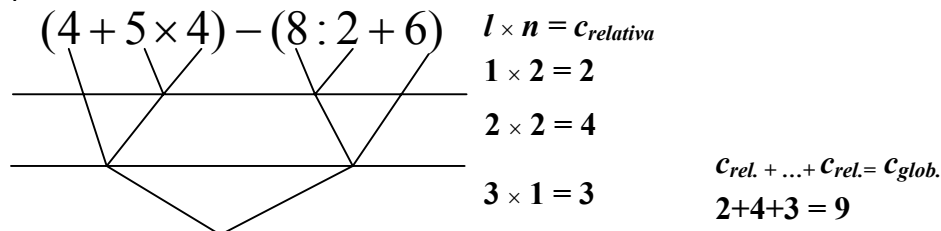


Figura 4

Esempio 5

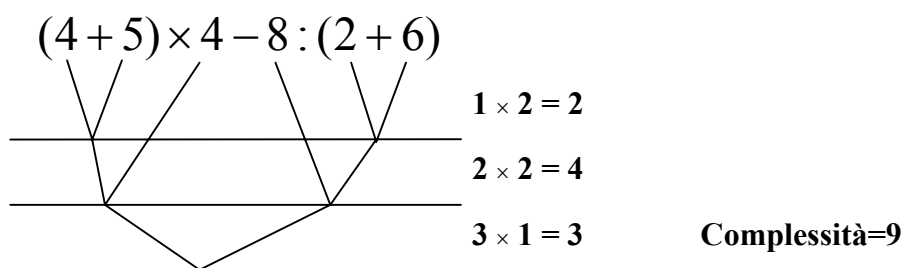


Figura 5

Esempio 6

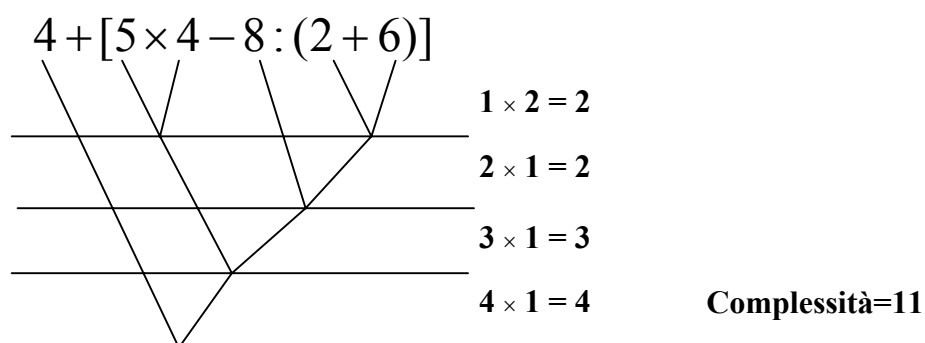


Figura 6

Esempio 7

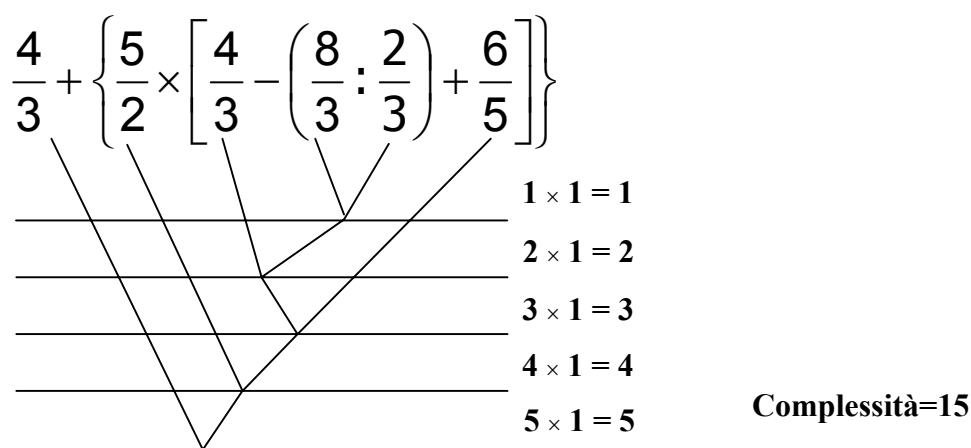


Figura 7

Alcune considerazioni

In questa prima fase l'azione dell'insegnante è favorita dalle seguenti considerazioni che nascono dai vantaggi e dalle valenze didattiche legate al metodo utilizzato.

- 1) Il grafico di calcolo (identificabile in un albero stilizzato) rappresenta la risoluzione di ogni espressione e permette di differenziarla meglio e/o di confrontarla più velocemente con altre risoluzioni presentate. Si può osservare come la modifica delle parentesi, negli esempi 4 e 5, ha variato il grafico e quindi la struttura risolutiva degli esercizi, pur mantenendo la stessa complessità.

- 2) Tradizionalmente lo studente è impegnato a confrontare solo il risultato finale di un'espressione, senza preoccuparsi dello sviluppo, anzi non accetta una "correzione" quando il risultato è corretto ma lo svolgimento è errato. Con questa metodologia egli pone tutta la sua attenzione al grafico e, quindi, al procedimento utilizzato.
- 3) Il metodo permette anche una "risoluzione modulare" dell'espressione, creando percorsi differenziati fra gli studenti e per lo stesso studente in uno stesso esercizio, in antitesi a quella più tradizionale che prevede sempre risoluzioni in sequenza (Figura 8).

Con riferimento all'esempio 5:

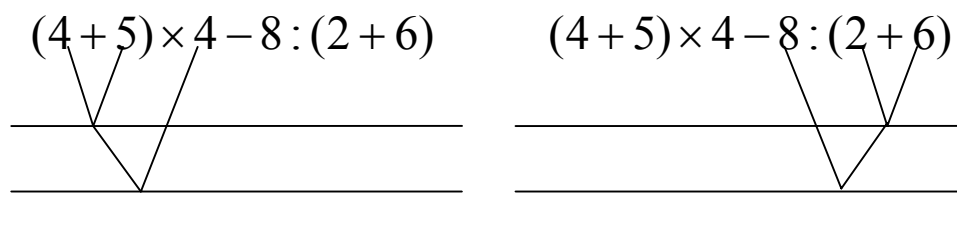


Figura 8

- 4) L'osservazione della struttura grafico-algoritmica permette una risoluzione mentale più immediata rispetto a quella numerico-computistica.
- 5) Un'ulteriore valenza didattica può essere riscontrata nella possibilità di identificare ogni espressione con alcuni parametri: il numero di livelli, la quantità di operazioni e la complessità globale. Negli esempi precedenti si può osservare, infatti, come tutte le espressioni sono formate dallo stesso numero di operazioni (è sufficiente contare i nodi di ciascun grafico) anche se distribuiti in diversi livelli e quindi con complessità differenti.
- 6) Un ulteriore arricchimento è fornito dalla possibilità di indicare, a fianco di ogni riga-livello, un numero intero progressivo (o peso) che, moltiplicato per il numero di operazioni presenti sulla riga corrispondente, fornisce la misura della complessità che le operazioni hanno nel processo risolutivo fino a quel momento.

La somma di questi valori fornisce la misura della difficoltà complessiva di tutta l'espressione.

Ad esempio nella prima espressione (Figura 4):

- al 1° livello si trovano 2 operazioni e quindi il risultato è 2,
- al 2° livello si trovano altre 2 operazioni e il risultato è 4,
- al 3° livello si trova 1 operazione e il risultato è 3.

Globalmente questa espressione ha una difficoltà, o complessità, di "9 punti" mentre, nell'ultimo esempio, la difficoltà complessiva, per la presenza delle parentesi e dei diversi livelli, risulta maggiore (Figura 7). Quest'opportunità permette all'insegnante di:

- a) programmare con più oggettività il proprio intervento nella classe,
 - b) controllare meglio il livello di competenza raggiunto, globalmente o individualmente,
 - c) differenziare il proprio intervento, nel tempo ed eventualmente anche tra gli studenti,
 - d) operare in armonia con i colleghi dei corsi paralleli, nell'ambito della programmazione d'istituto.
- 7) L'aspetto computistico permette ad ogni studente di esprimere una valutazione assoluta della propria competenza acquisita: espressioni algebriche con diverse difficoltà o complessità si identificano con punteggi più elevati.
 - 8) L'aspetto computistico permette a ogni studente di valutare la misura relativa della propria competenza, anche in caso di errore. In espressioni errate, infatti, egli è in grado di valutare il livello di competenza raggiunto, rapportando il valore totalizzato, prima dell'errore, al valore massimo indicato dall'insegnante. Una successiva "funzione punteggio" permetterà di trasformare questi valori grezzi in valori con base diversa o in valori percentuali, per permettere un confronto congruo con altre espressioni.

- 9) Il consolidamento della misura della competenza permette sia all'insegnante sia a ciascun studente di tenere sotto controllo, con opportuni indicatori statistici, la "performance" individuale e globale.
- 10) Gli studenti accettano più facilmente questo metodo perché più divertente e non oppongono alcuna resistenza all'apprendimento o al recupero.
- 11) La correzione, da parte dell'insegnante o da parte dello studente, risulta più agevole poiché non si ha la propagazione numerica dell'errore in tutta l'espressione, ma si può correggere la zona interessata, cancellando la linea errata e riscrivendo contestualmente quella esatta.

Seconda fase

L'attività viene proposta in classe quando gli studenti, dovendo completare la risoluzione di espressioni algebriche, partono dall'apprendimento globale dell'algoritmo per giungere all'apprendimento specifico computazionale.

Per trasformare il diagramma in espressione numerica si procede nel seguente modo. Si scrivono i risultati di ciascuna operazione in corrispondenza di ogni nodo e successivamente si ricopia la sequenza numerica e simbolica di ogni linea. In questo modo è possibile trasformare la rappresentazione grafica in una rappresentazione lineare dove i cosiddetti "passaggi" corrispondono ai vari livelli (Figura 9).

Con riferimento all'esempio n° 4 si ottiene:

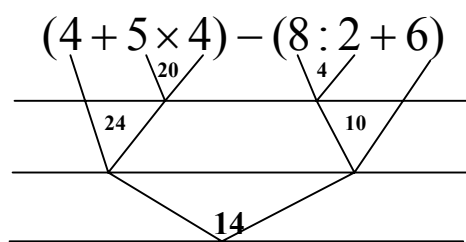


Figura 9

$$\begin{aligned} &(4 + 20) - (4 + 6) \\ &24 - 10 \\ &14 \end{aligned}$$

Elementi di prove di verifica

1. Indicare qual è l'esatta rappresentazione grafica della seguente espressione:

$$(3 + 4 \times 3) + (13 + 2 : 1) : (2^3 - 1)$$

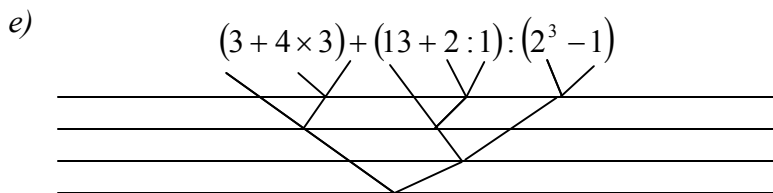
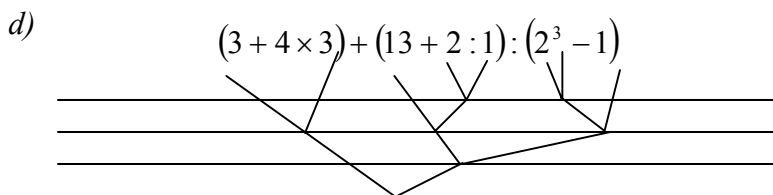
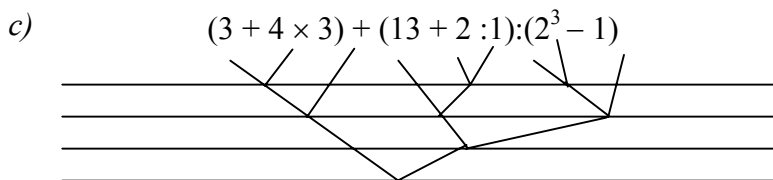
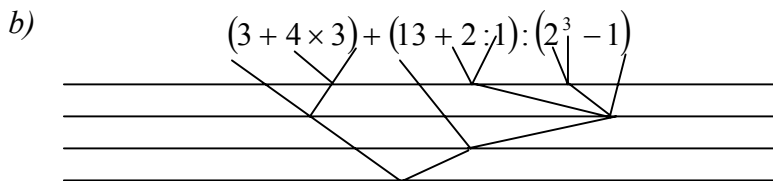
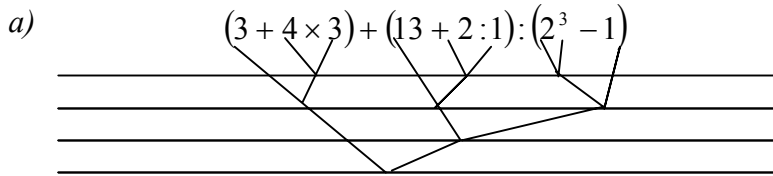


Figura 10

2, Indicare qual è la complessità relativa al 5° livello della seguente espressione:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right] \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$$

a) 7

b) 31

c) 13

d) 24

e) 6

3. Indicare qual è la complessità globale della seguente espressione:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right] \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$$

- a) 8 b) 31 c) 13 d) 24 e) 6

4. Nella seguente espressione:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)^2 + \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right] \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$$

uno studente ha eseguito correttamente la risoluzione algoritmica della stessa fino al 6° livello incluso. Indicare qual è la sua “performance” espressa in forma percentuale:

- a) 89% b) 29% c) 58% d) 86% e) 77%

5. Con riferimento all'espressione precedente, indicare qual è l'esatta rappresentazione lineare della stessa a partire dal 3° livello incluso:

a) $\left\{ \frac{5}{6} + \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{3}{2} \right] \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$

b) $\left\{ \frac{25}{36} + \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{3}{2} \right] \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$

c) $\left\{ \frac{25}{36} + \left[\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$

d) $\left\{ \frac{25}{36} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \right\} + \frac{4}{5}$

e) $\left\{ \frac{25}{36} \right\} + \frac{4}{5}$

Dalla frazione al numero decimale: esploriamo

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. Scrivere un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 ad esponente intero. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Il teorema fondamentale dell'aritmetica.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare	Informatica

Contesto

Calcolo aritmetico. Storia della matematica.

La verifica ed il consolidamento delle necessarie abilità di calcolo con i numeri (naturali e razionali), di cui è opportuno verificare il possesso da parte degli allievi all'inizio del percorso di matematica al primo biennio, può essere condotta attraverso attività diverse (analisi e rappresentazione di semplici indagini condotte nella classe, risoluzione di problemi con percentuali, ...). L'attività qui proposta si colloca al termine di queste verifiche, prima di passare alla formalizzazione delle strutture indotte dalle operazioni nei diversi insiemi numerici. Essa intende da una parte consolidare negli studenti la consapevolezza e la padronanza dell'uso degli strumenti di calcolo elementare, dall'altra fornire loro un buon bagaglio di esperienze significative cui far riferimento, per contesti ed esempi applicativi, quando saranno introdotti, nel seguito degli studi, strumenti più formali.

Descrizione dell'attività

L'attività si articola in momenti di calcolo manuale con i numeri naturali, le frazioni e i numeri decimali, anche in basi diverse da 10, e in momenti di esplorazione e riflessione di proprietà. L'uso degli strumenti di calcolo è motivata dalla necessità di poter condurre in modo più ricco ed esteso questa sorta di sperimentazione con "oggetti" della matematica che, seppure utili come strumenti per risolvere problemi di contesti reali, assumono qui una loro autonomia e diventano essi stessi un interessante ambito di esplorazione e di riflessione.

Il percorso procede per domande alle quali si cercherà di dare risposte utilizzando gli strumenti (concettuali e di calcolo) che gli studenti hanno a disposizione.

Domanda 1: Data una frazione ridotta ai minimi termini, in quali condizioni la frazione è espressa (in base dieci) da un numero decimale finito?

Le frazioni sono date come rapporto di numeri naturali: i concetti coinvolti sono l'equivalenza delle frazioni, la scomposizione (in particolare l'unicità della fattorizzazione) di un numero naturale, il numero decimale finito come frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

È agevole osservare, anche in modo informale, che la frazione è espressa da un numero decimale finito soltanto se il denominatore ha come fattori primi esclusivamente il 2 oppure il 5, che sono i soli fattori della base.

È utile verificare, anche carta e penna, qualche caso, con esempi a conferma e con controesempi.

Domanda 2: In una frazione, che si esprime con un numero decimale finito, che relazione c'è tra il denominatore e il numero delle cifre della parte decimale?

Anche in questo caso è semplice osservare che il numero di cifre decimali è l'esponente maggiore tra la potenza di base 2 e quella di base 5 nella fattorizzazione del denominatore. Infatti, per avere una frazione, equivalente alla data, che abbia una potenza di 10 al denominatore basta moltiplicare per la potenza mancante.

Per condurre o confermare queste osservazioni può essere utile utilizzare un ambiente di calcolo che elabori la frazione in modo esatto, cioè come coppia di numeri naturali.

Ecco un esempio con un software di calcolo simbolico.

#1:	$\frac{13}{40}$	
#2:	0.325	La frazione introdotta nella riga #1 è espressa nella riga #2 come numero decimale finito. Si osserva che il numero decimale ha 3 cifre.
#3:	$\frac{13}{2^3 \cdot 5}$	A riga #3 il denominatore è scomposto in fattori: la fattorizzazione ha solo potenze di 2 e di 5.
#4:	$\frac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2}$	L'esponente più alto delle due potenze al denominatore è 3, esattamente come il numero di cifre dopo la 'virgola' del numero decimale.
#5:	$\frac{325}{2^3 \cdot 5^2}$	Per avere al denominatore una potenza di 10 (la minima possibile) occorre moltiplicare per 5^2 : in questo modo il denominatore è 1000. Moltiplicando per 5^2 il numeratore si ottiene proprio la parte decimale del numero (325).

Figura 1

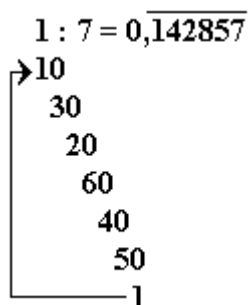
Domanda 3: Cosa succede alla espressione decimale della frazione (ridotta) se questa ha al denominatore un fattore che non è divisore della base?

Per la proprietà della unicità della fattorizzazione dei numeri naturali, nessuna potenza di 10 può contenere come fattore il denominatore se questo ha un fattore primo diverso da 2 e da 5. Questa proprietà è usata in tanti contesti dell'aritmetica ed è quindi opportuno richiamarla in modo esplicito e non darla per scontata, anche se non la si può certamente dimostrare ad allievi di questa età. La conseguenza è che la frazione non può essere espressa da nessun numero decimale finito perché questo corrisponderebbe ad una frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

Come dimostrare, o almeno giustificare intuitivamente, il fatto che il numero decimale, che esprime una frazione, se non è finito, è necessariamente periodico? Gli allievi sanno già calcolare con la divisione il numero decimale corrispondente ad una frazione: la dimostrazione parte da questa conoscenza. Nel calcolo il divisore è il denominatore. Quando nel calcolo si trova come resto 0, il processo ha termine e quindi il numero decimale è finito. D'altra parte, se nel calcolo si ritrova un resto già incontrato in precedenza, il processo si ripete con la stessa sequenza indefinitamente.

Nella divisione (tra numeri naturali) il resto è minore del divisore: per questo il numero dei possibili resti nel calcolo del numero decimale è minore del denominatore. Di conseguenza nel calcolo del numero decimale corrispondente ad una frazione i casi sono due: o dopo qualche passo si trova

resto 0 e quindi il numero decimale è finito, oppure si ritrova uno dei resti (il cui numero è minore del denominatore) già calcolato in precedenza e quindi il numero decimale è periodico. In questo ultimo caso la lunghezza del periodo è minore del denominatore della frazione.



La risposta alla terza domanda passa attraverso la sequenza dei resti trovati nel calcolo del numero decimale.

Prendiamo in esame un caso particolare: la frazione $1/7$ si esprime con il numero decimale $0,142857$ (qui le cifre del periodo sono sottolineate per comodità tipografica). La sequenza dei resti è 1, 3, 2, 6, 4, 5. Poiché l'ultimo passo ha prodotto come resto 1, che è il primo nella sequenza dei resti, la sequenza dei resti, e quindi anche delle cifre del numero decimale, si ripete all'infinito.

Figura 2

Il calcolo fatto nella figura 2 del numero decimale corrispondente ad $1/7$ offre l'opportunità di fare qualche osservazione sulle regolarità delle cifre del periodo quando al denominatore ci sono numeri particolari (in questo caso primi). Lo scopo di queste osservazioni è di stimolare la curiosità degli allievi, di abituarli a formulare congetture e di sottoporle a verifiche per vedere se si tratta di mere coincidenze o di fatti che si possono generalizzare, di esprimere in modo corretto argomentazioni. Queste abilità sono la premessa necessaria alle attività di dimostrazione alle quali saranno avviati successivamente.

Una verifica 'sperimentale' di queste congetture troverà utile l'uso di strumenti di calcolo e potrà essere occasione per qualche attività di stesura di semplici programmi.

Prima osservazione: $142857 \times 7 = 999999$ il numero che si ottiene isolando il periodo moltiplicato per il denominatore dà un numero fatto da *tanti nove quante le cifre del periodo* (o se si vuole anche $10^6 - 1$). Questa è esattamente la regola della frazione generatrice dei numeri periodici, solo espressa al contrario, che almeno un tempo era bagaglio comune della scuola media.

Seconda osservazione: $142857 \times 2 = 285714$
 $142857 \times 3 = 428571$

.....
 Il numero delle cifre del periodo ha questa curiosa proprietà: se lo si moltiplica per un numero minore di 7, produce un numero che ha la stessa sequenza di cifre spostata di qualche posto. La dimostrazione è immediata osservando il processo di calcolo del numero decimale.

Terza osservazione: $142 + 857 = 999$ spezziamo il numero del periodo in due parti (di tre cifre ciascuna), la somma dei due numeri ottenuti è una sequenza di cifre 9. Questa è la curiosità più sorprendente di questo tipo di numeri, che naturalmente si ritrova anche per altri denominatori primi, ma la cui dimostrazione è più complicata.

La proprietà può anche essere espressa così: le cifre della seconda parte del periodo sono le complementari rispetto a 9 delle corrispondenti cifre della prima parte.

Si possono provare quali di queste proprietà si ritrovano con $1/11$, $1/13$ oppure $1/17$.

Soprattutto l'ultimo caso, che produce una sequenza di 16 cifre, suggerisce l'opportunità di disporre di un programma che, dati due numeri come numeratore e denominatore, ne calcoli il corrispondente numero decimale. La stesura del programma naturalmente va proposta agli allievi più motivati o con maggiore autonomia nell'uso degli strumenti informatici. Nulla impedisce però di usare il programma predisposto per le osservazioni che verranno suggerite nel seguito. Per i numeri decimali finiti il programma deve calcolare tutte le cifre decimali, mentre se il numero decimale è periodico si chiede che vengano calcolate tutte le cifre del periodo. Nel primo caso si eseguirà la divisione finché il resto è 0, nel secondo finché si ritrova il resto iniziale del periodo. Ed è proprio questo il problema posto dalla quarta domanda, la cui risposta è necessaria per scrivere il programma che calcola il numero decimale di una frazione.

Domanda 4: Data una frazione ridotta, come si determina il numero di cifre della parte decimale che precede il periodo (antiperiodo) nel numero decimale corrispondente?

Scomponiamo in fattori il denominatore della frazione: possiamo raccogliere le potenze di 2 e di 5 in un primo fattore del denominatore e tutte le altre nel secondo. In modo formale possiamo scrivere:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^h 5^k p} = \frac{1}{2^h 5^k} \cdot \frac{m}{p} \quad \text{dove compare una frazione strettamente decimale e una frazione nella}$$

quale il denominatore è primo con 10. Il numero delle cifre dell'antiperiodo dipende solo dalla prima frazione ed è quindi (vedi Domanda 1) il massimo tra gli esponenti della potenza di 2 e di 5 contenute nella fattorizzazione del denominatore.

Data la frazione m/n (ridotta), il calcolo delle cifre dell'antiperiodo si può fare in questo modo:

$\text{antiperiodo}(n)$

n numero naturale dato (la lunghezza dell'antiperiodo dipende solo da n);

a numero naturale per il calcolo della lunghezza dell'antiperiodo;

assegna 0 ad a : all'inizio l'antiperiodo è vuoto

finché n è divisibile per 10

assegna $n/10$ a n

aumenta a di 1

finché n è divisibile per 2

assegna $n/2$ a n

aumenta a di 1

finché n è divisibile per 5

assegna $n/5$ a n

aumenta a di 1

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:antiper(n)
:func
:local a
:0→a
:while mod(n,10)=0
:a+1→a
:n/10→n
:EndWhile
:while mod(n,2)=0
:a+1→a
:n/2→n
:EndWhile
:while mod(n,5)=0
:a+1→a
:n/5→n
:EndWhile
:Return a
:EndFunc
MAIN DEG AUTO FUNC
    
```

Figura 3

la lunghezza dell'antiperiodo è a .

La Figura 3 contiene il listato della funzione scritto per una calcolatrice programmabile. Ecco ora alcune applicazioni della funzione $\text{antiper}(n)$.

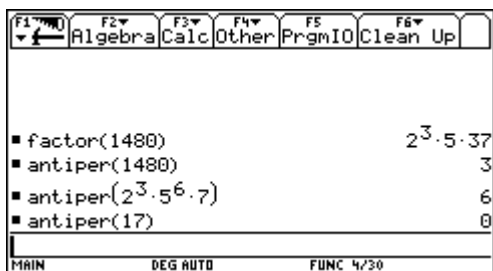


Figura 4

Nello schermo della calcolatrice a sinistra compare la riga immessa e a destra la risposta calcolata.

Nella scomposizione in fattori primi di 1480 il 2 compare con esponente 3, mentre il 5 ha esponente 1. Il numero di cifre dell'antiperiodo di 1480 è 3. Prendendo un numero già fattorizzato, l'antiperiodo ha la lunghezza prevista. Naturalmente 17 è primo e quindi in base 10 non ha antiperiodo.

Possiamo ora descrivere la funzione che produce il numero decimale di una frazione.

Numerodecimale(n,d)

n e d numeri naturali rappresentanti il numeratore ed il denominatore della frazione
 a numero naturale per la lunghezza dell'antiperiodo
 m numero naturale per il massimo comun divisore tra numeratore e denominatore da usare per ridurre la frazione ai minimi termini
 r numero naturale che conterrà il resto al termine del calcolo delle cifre dell'antiperiodo: se il resto è 0 il calcolo ha termine e il numero decimale è finito, se invece è diverso da 0 sarà l'elemento di confronto per stabilire quando ha termine il periodo nella quale saranno raccolte le cifre del numero decimale a mano a mano che sono calcolate; in s si userà la virgola per separare la parte intera da quella decimale e il segno: per separare, se serve, l'antiperiodo dal periodo.

primo passo: Ridurre la frazione ai minimi termini.
 secondo passo: Calcolare la parte intera della frazione ed assegnarla come stringa a s , conservare in n il primo residuo della frazione.
 terzo passo: Calcolare le cifre dell'antiperiodo. Con la funzione *antiper* si calcola il numero di cifre dell'antiperiodo: questo numero stabilisce quante volte va fatto il calcolo delle cifre successive alla virgola da aggiungere alla destra della stringa s . Si osservi il ruolo della base di rappresentazione, il 10, sia nel calcolo della lunghezza (nella funzione *antiper*), sia nel calcolo delle cifre: questo sarà utile quando si vorrà applicare l'algoritmo ad altre basi di rappresentazione.
 quarto passo: Se il resto dell'ultima divisione è 0 il calcolo del numero decimale ha termine (numero decimale finito), altrimenti si calcolano le cifre del periodo. Si conserva il resto iniziale del periodo: quando si ritroverà nel calcolo lo stesso resto il procedimento ha termine. Prima di aggiungere a s la prima cifra del periodo si inserisce un segno di separazione “:”.

Una possibile traduzione nel linguaggio della calcolatrice programmabile è la seguente. Usiamo ancora la forma della funzione, che restituisce il risultato nell'ambiente di calcolo, per poter fare sul numero decimale prodotto qualche elaborazione successiva.

```

: numdec(n, d)
: Func
: Local a, m, r, s
: gcd(n, d) → m
: n / m → n
: d / m → d
    
```

numdec(n,d) è una funzione che restituisce come sequenza di caratteri il numero decimale,
 Local definisce le variabili di calcolo interne alla funzione.
 La funzione gcd(n,d) è predefinita nella calcolatrice e calcola il MCD dei numeri n e d .

Figura 5

```

:antiper(d)→a
:s&"":s
:mod(n,d)→n
:While a>0
:10*n→n
:s&string(intDiv(n,d))→s
:mod(n,d)→n
:a-1→a
:EndWhile
    
```

Figura 6

Calcolo delle cifre dell'antiperiodo. La funzione predefinita della calcolatrice $\text{intDiv}(n,d)$ calcola il quoto (intero) nella divisione di n per d che corrisponde alla cifra da calcolare; la funzione $\text{mod}(n,d)$ calcola il resto nella stessa divisione e produce il nuovo resto.

While ... EndWhile descrive un ciclo che è eseguito quando la condizione iniziale è verificata. L'operatore & tra stringhe le concatena.

Se il resto è 0, il calcolo è finito. Altrimenti si mette in coda a s il segno "." che indica l'inizio del periodo.

Dopo aver registrato in r il resto di confronto, comincia il ciclo di calcolo delle cifre del periodo. Il ciclo Loop ... EndLoop non ha mai fine: per terminare il processo occorre uscire dal ciclo con l'istruzione Goto <etichetta>, dove <etichetta> indica la riga di programma Lbl <etichetta> da cui riprendere il processo. Nel nostro caso l'istruzione di uscita è eseguita quando nella divisione intera si trova un resto uguale al resto iniziale.

```

:If n>0 Then
:s&"":s
:n→r
:Loop
:10*n→n
:s&string(intDiv(n,d))→s
:mod(n,d)→n
:If n=r
:Goto fine
:EndLoop
:Lbl fine
:EndIf
:Return s
:EndFunc
    
```

Figura 7

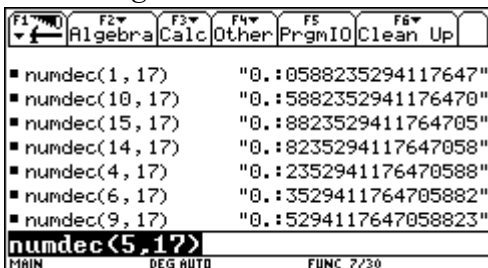
Vediamo ora qualche applicazione della funzione $\text{numdec}(n,d)$.

- $\text{numdec}(5, 24)$ "0.208:3"
- $\text{numdec}(5, 240)$ "0.0208:3"
- $\text{numdec}(3, 2^4 \cdot 7)$ "0.0267:857142"
- $\text{numdec}(3, 2^4 \cdot 5^2)$ "0.0075"

Il numero decimale è calcolato come stringa: non è possibile avere come risultato un numero se si vuole mantenere il segno di separazione tra l'antiperiodo ed il periodo.

Negli esempi sono evidenziate alcune delle proprietà dei numeri decimali già richiamate in precedenza.

Figura 8



17 è un numero primo e la frazione $1/17$ produce un numero decimale periodico con 16 cifre di periodo.

Tutte le frazioni $n/17$, con n da 1 a 16, producono la stessa sequenza di cifre solo spostate. Scegliendo opportunamente i numeratori, le sequenze risultano spostate ogni volta di un posto.

Figura 9

Anche 13 è un numero primo, ma $1/13$ ha 6 cifre di periodo. In questo caso le sequenze circolari di cifre sono due:

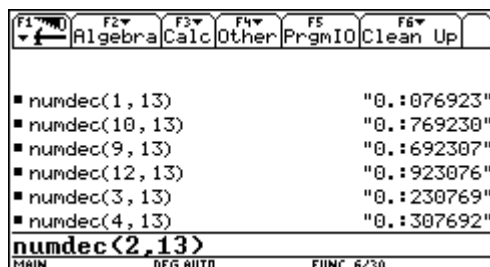


Figura 10

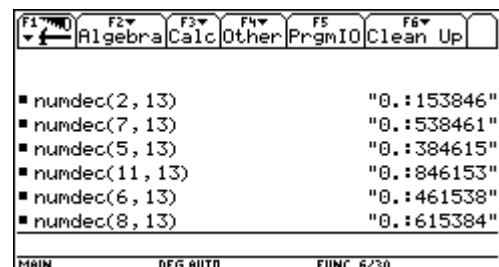


Figura 11

Si era osservato nelle pagine precedenti che i semiperiodi di $1/7$ davano per somma 999. Questo fatto vale anche in altri casi? La Figura 12 a destra mostra alcuni altri casi e vuole essere un invito per condurre qualche esplorazione ulteriore su questo tema.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
numdec(1, 17)	"0. :0588235294117647"				
5882352 + 94117647	99999999				
numdec(1, 19)	"0. :052631578947368421"				
52631578 + 947368421	99999999				
numdec(1, 23)	"0. :0434782608695652173913"				
4347826086 + 95652173913	9999999999				

Figura 12

Possibili sviluppi

- Una prima estensione delle attività proposte può riguardare lo studio della relazione tra n , numero naturale, e la lunghezza del periodo di $1/n$. Si può modificare la funzione $\text{numdec}(n,d)$ in modo che produca solo la lunghezza del periodo della frazione. Poiché la lunghezza del periodo non dipende dal numeratore (se la frazione è ridotta in minimi termini) la funzione può avere come argomento il solo denominatore e considerare sempre 1 come numeratore. Si è già detto che la lunghezza del periodo di $1/n$ è minore di n : solo alcuni numeri primi hanno lunghezza del periodo pari a $n-1$ (massima possibile). Ad esempio 17 ha periodo 16, mentre 13 ha periodo 6.
Si osserva la seguente proprietà per la lunghezza del periodo, qui espressa per 7: 7 ha periodo 6, 7^2 ha periodo 12, 7^3 ha periodo 18, in generale 7^k ha periodo $6 \times 7^{k-1}$.
- Le funzioni per la lunghezza dell'antiperiodo e per il calcolo del numero decimale possono essere adattate a qualche altra base di rappresentazione, ad esempio la base 2 o la base 6. Con esse si possono poi ripetere le osservazioni fatte con la base 10; in particolare si può evidenziare il fatto che la frazione $1/10$ scritta in forma razionale in base 2 è periodica con tutte le ben note problematiche del calcolo approssimato con il computer.
- La sequenza dei resti nel calcolo del numero decimale corrispondente a m/n , con $m < n$ e con numero di cifre del periodo massimo (si provi, ad esempio, con $n = 541$), appare *del tutto* imprevedibile e ben distribuita (compaiono tutti i numeri compresi tra 1 e 540). Se dividiamo i resti di questa sequenza per n , otteniamo una sequenza di numeri < 1 distribuiti in modo apparentemente casuale e che possono rappresentare un modello semplificato della generazione di numeri casuali utilizzati dal computer per le simulazioni.

Elementi di prove di verifica

Numeri finiti e numeri periodici.

1. Quali delle seguenti frazioni produce numeri decimali finiti e quali periodici?

$3/40, 5/15, 3/7, 7/35$

2. Calcola la scrittura decimale di $1/13$. Quante sono le cifre del periodo? Quante potevano essere al massimo?

3. Il numero di cifre del periodo di $1/37$ è 3. Quante sono le cifre dell'antiperiodo di $1/3700$?

A caccia di numeri periodici.

4. Si osservi che $10^6 - 1 = 999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$. I numeri 7 e 13 hanno lunghezza del periodo 6. Quali sono i numeri *candidati* ad avere 4 cifre di periodo e quali le hanno effettivamente?

La radice di due va a teatro: dove si siede?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure Argomentare, congetturare e dimostrare	Filosofia greca

Contesto

Visualizzazioni geometriche e storia dei numeri.

La scoperta di segmenti incommensurabili presso i Greci produsse una profonda crisi nella concezione matematica del tempo. Ancora oggi, gli studenti evidenziano gran difficoltà nell'acquisire il concetto di numero irrazionale.

L'attività proposta coinvolge gli studenti in una rappresentazione di un passo tratto dal testo greco: il "Menone" di Platone, particolarmente significativo se rielaborato, in maniera adeguata, utilizzando la rappresentazione grafico-geometrica.

Può essere introdotta, nel primo biennio, dopo aver affrontato lo studio dei numeri naturali e razionali a livello operativo e strutturale.

Descrizione dell'attività

Il metodo socratico, favorito dalla visualizzazione delle figure, si alterna con quello euristico-dinamico: gli studenti, investiti del ruolo di scopritori, analizzano la figura, procedendo per gradi e, mediante successive intuizioni, tentativi e verifiche, arrivano alla conquista del concetto. L'apprendimento in situazione richiede un forte impegno da parte dell'insegnante che, oltre a coinvolgere lo studente nell'attività, ne deve anche guidare le intuizioni nella giusta direzione.

La sistematizzazione del processo spetta, nella fase conclusiva, all'insegnante che deve presentare questo numero con un nuovo simbolo (s'introduce il simbolo $\sqrt{2}$).

Prima fase

L'insegnante, dopo aver consegnato agli studenti copia del passo tratto dal testo originale del "Menone", li invita prima ad una lettura individuale e poi ad una rielaborazione dello stesso, inserendo, laddove è opportuno, il riferimento alla visualizzazione geometrica di cui devono corredare il testo.

La scoperta dell'incommensurabilità, oggi, al contrario di quanto non lo sia stato al tempo degli antichi greci, è facilitata dall'utilizzo di moderni strumenti informatici che conferiscono al disegno geometrico una grande potenzialità di apprendimento. Corredare il passo di Platone con una serie di illustrazioni significa, quindi, rivisitare un testo classico, di grande valenza didattica, in chiave moderna.

Socrate propone un problema geometrico ad un giovane, servo dell'amico Menone, senza particolari conoscenze matematiche.

[...]

Menone: Sì Socrate, ma in che senso dici che non apprendiamo e quello che denominiamo apprendere è reminiscenza? Puoi insegnarmi che sia davvero così?

Socrate: Non è certo facile, ma per amor tuo, ugualmente mi ci impegno. Chiama uno di questi molti servi del tuo seguito, quello che vuoi, sì che proprio in lui possa darti la dimostrazione che desideri.

[...]

Disegnare il quadrato avente area pari al doppio di quello assegnato

[...]

Socrate: Dimmi, ragazzo, l'area del quadrato come questo che vedi in figura, la conosci?

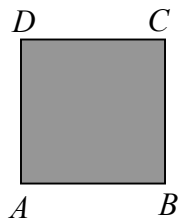


Figura 1

Ragazzo: La conosco.

S: È dunque un'area quadrata avente uguali tutti questi lati $AB = BC = CD = DA$ che sono quattro.

R: Precisamente.

S: Ora quest'area potrebbe essere e più grande e più piccola?

R: Precisamente.

S: Se pertanto il lato AB fosse due piedi, e questo AD fosse pure due piedi, di quanti piedi dovrebbe essere l'intero?

R: Quattro, o Socrate.

S: Or si potrebbe avere un'altra area doppia di questa, e tale da avere tutti e quattro i lati uguali come questa?

R: Sì.

S: E di quanti piedi sarà?

R: Di otto.

S: Su via provati a dirmi quanto sarà ciascun lato di essa. Il lato di questa è di due piedi: che cosa sarà il lato di quella doppia?

R: È chiaro, o Socrate, che sarà il doppio.

[...]

S: Dunque il lato sarebbe il doppio di AB se ne aggiungessimo un altro BL della stessa misura da questa parte?

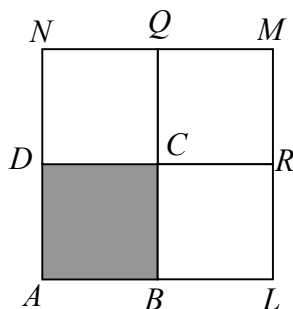


Figura 2

R: Precisamente.

S: E da questo lato AL , tu dici, nascerà l'area di otto piedi, quando quattro siano di tal misura?

R: Sì.

S: Disegnamone dunque da questo quattro uguali: non dovrebbe essere questa ($ALMN$) l'area che tu dici esser di otto piedi?

R: Precisamente.

S: Ma in essa ve ne sono quattro, queste ($ABCD$, $BLRC$, $CRMQ$, $DCQN$), ciascuna delle quali è uguale a questa ($ABCD$), che è di quattro piedi?

R: Sì.

S: Quanto dunque diventa? Non quattro volte tanto?

[...]

R: Sì, il quadruplo.

S: Dal lato doppio dunque non si ottiene un'area doppia ma quadrupla.

R: Dici vero.

S: E quattro volte quattro fanno sedici: o che no?

R: Sì.

[...]

S: Provati ora a dire di che misura credi che debba essere.

R: Di tre piedi.

S: Dunque, se ha da essere di tre piedi, aggiungiamo (ad AB) la metà di questo (cioè di MO), e si avranno i tre piedi. Infatti questi (AB) sono due e questo (BO) uno. E si ha quest'area che tu dici ($AOPT$).

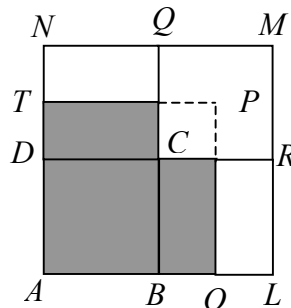


Figura 3

R: Sì.

S: Ma se da questa parte (AO) è di tre piedi, e da questa (AT) è di tre, l'area intera non diventa di tre piedi?

R: È evidente.

[...]

S: Non si ha dunque punto da un lato di tre piedi l'area di otto piedi.

R: No affatto.

S: E allora da quale? Provati a dircelo esattamente; e se non vuoi dire un numero, mostraci almeno da quale (fare qualche tentativo sulla figura).

R: Ma per Giove, o Socrate, io non lo so.

[...]

S: Dimmi dunque tu. La nostra area di quattro piedi non è questa qui ($ABCD$)? (vedi Figura 4).

R: Capisco.

[...]

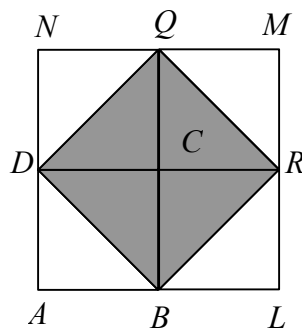


Figura 4

S: E che? Tutto questo intero ($ALMN$) quante volte è più grande di questo ($ABCD$)?

R: Quattro volte.

S: E a noi occorre due volte, ti ricordi?

R: Perfettamente.

S: Ora questa linea che si stende (DB, BR, RQ, QD), da un angolo all'altro non taglia essa per metà ciascuna di queste aree?

R: Sì.

S: Si hanno dunque quattro linee uguali che racchiudono quest'area ($DBRQ$).

R: Si hanno.

S: Ora osserva, di che misura è quest'area?

R: Non capisco.

S: Non sono quattro queste aree, e ciascuna linea trasversale non ne ha tagliata di dentro la metà di ciascuna? O non ti pare?

R: Sì.

S: Quante dunque di tali ve ne sono in questo ($DBRQ$)?

R: Quattro.

S: E quante in questo ($ABCD$)?

R: Due.

S: E il quattro del due che cosa è?

R: Il doppio.

S: Questo dunque, ($DBRQ$) di quanti piedi sarà?

R: Di otto piedi.

S: (Partendo) da quale linea?

R: Da questa (DB)

S: Da quella che va da un angolo all'altro dell'area di quattro piedi?

R: Sì.

S: Or questa gli intendenti la chiamano diagonale, e se questa (DB) ha nome diagonale, dalla diagonale, dunque, come tu dici, si potrebbe ottenere l'area doppia.

R: Perfettamente, o Socrate.

Fatta ora la conoscenza con questo nuovo numero, il passo successivo è quello di individuarne il comportamento operativo per notare come nelle applicazioni siffatti numeri si comportino diversamente da quelli fino ad ora conosciuti.

Avvalendosi del Teorema di Pitagora, è possibile passare, con l'uso di un software di geometria dinamica e con un procedimento ricorsivo, a partire dal segmento di misura $\sqrt{2}$, alla costruzione di più segmenti aventi per misura un numero irrazionale.

Seconda fase

Come si costruiscono geometricamente i numeri irrazionali del tipo \sqrt{n} ?

A partire dal segmento unitario, si costruisce il triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa misura $\sqrt{2}$ (cfr. prima fase).

A partire dal segmento (cateto) di misura $\sqrt{2}$, si costruisce il triangolo rettangolo avente per cateto minore il segmento unitario. Si ottiene così l'ipotenusa che misura $\sqrt{3}$.

Iterando tale procedimento è possibile individuare le misure di segmenti espresse mediante radici quadrate di numeri interi positivi.

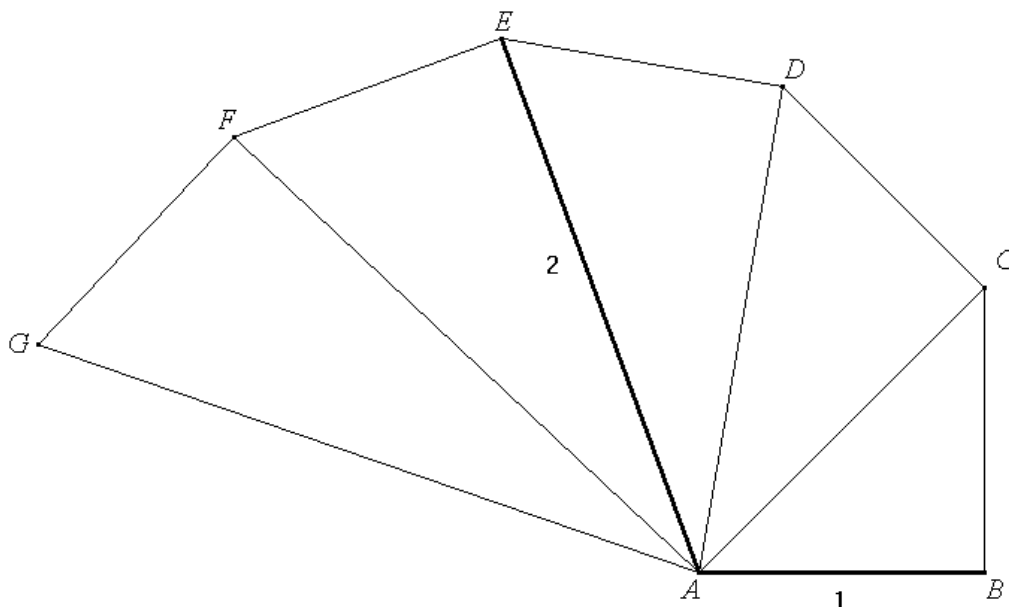


Figura 5

Terza fase

A partire dalla Figura 5 ha senso riportare i segmenti su una retta passante per O per eseguire le ordinarie operazioni tra segmenti (addizione e sottrazione) al fine di far osservare il diverso comportamento operativo dei numeri irrazionali rispetto a quelli fino ad ora studiati.

Lo stesso metodo di costruzione, riferito ad un piano cartesiano monometrico ortogonale, consente di rappresentare i numeri irrazionali sulla retta orientata.

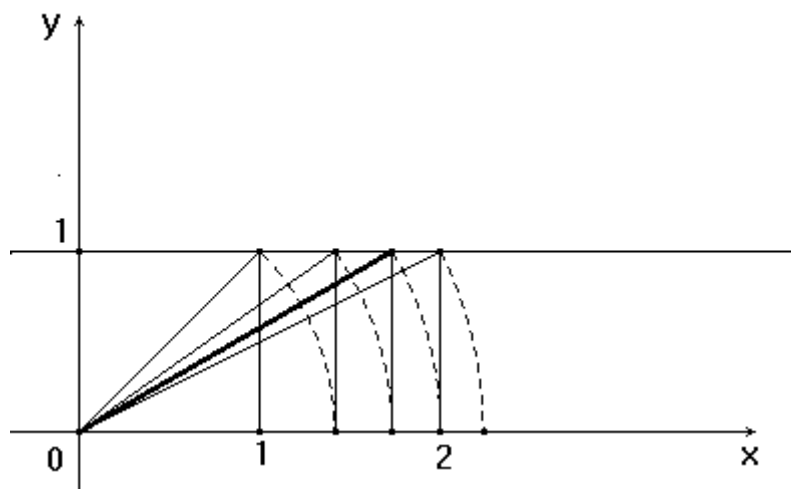


Figura 6

A questo punto occorre far osservare agli studenti, ad esempio, che $\sqrt{2}$ è un numero compreso tra 1 e 2, ma ciò non è sufficiente a far comprendere il concetto d'incommensurabilità. Si ricercano allora, con l'uso di una calcolatrice grafico-simbolica e per successive approssimazioni (due, tre, quattro, ... cifre significative), i corrispondenti valori decimali di $\sqrt{2}$ come riportato nel seguente esempio.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Inv Pow	
x	w1				
1.	1.				
1.1	1.21				
1.2	1.44				
1.3	1.69				
1.4	1.96				
1.5	2.25				
1.6	2.56				
1.7	2.89				
x=1.4					
MAIN		RAD AUTO		FUNC	

Tabella 1

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Inv Pow	
x	w1				
1.4	1.96				
1.41	1.9881				
1.42	2.0164				
1.43	2.0449				
1.44	2.0736				
1.45	2.1025				
1.46	2.1316				
1.47	2.1609				
x=1.41					
MAIN		RAD AUTO		FUNC	

Tabella 2

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Inv Pow	
x	w1				
1.41	1.9881				
1.411	1.990921				
1.412	1.993744				
1.413	1.996569				
1.414	1.999396				
1.415	2.002225				
1.416	2.005056				
1.417	2.007889				
x=1.414					
MAIN		RAD AUTO		FUNC	

Tabella 3

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Inv Pow	
x	w1				
1.414	1.999396				
1.4141	1.9996788				
1.4142	1.9999616				
1.4143	2.0002445				
1.4144	2.0005274				
1.4145	2.0008103				
1.4146	2.0010932				
1.4147	2.0013761				
x=1.4142					
MAIN		RAD AUTO		FUNC	

Tabella 4

Gli studenti potrebbero, a titolo di esercizio, anche con l'uso di una semplice calcolatrice, costruire un'ulteriore tabella con le successive approssimazioni, verificando così che i numeri irrazionali, avendo la parte decimale formata da infinite cifre non periodiche, non possono essere espressi da una frazione né possono costituire un'unità di misura confrontabile con segmenti di misura finita.

Elementi di prove di verifica

1. Si può richiedere, la costruzione geometrica di $2\sqrt{2}$ (Figura 7).

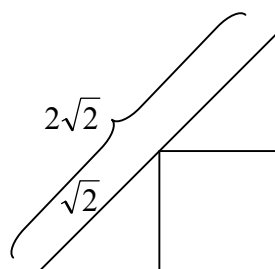


Figura 7

2. Come esempio di confronto si può richiedere la costruzione geometrica di $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ per far discutere sul risultato ora ottenuto in relazione a quelli precedenti.

Quando viene Pasqua?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Geografia astronomica Religione Storia

Contesto

Algoritmi numerici.

Questa attività affronta il problema del calcolo della data della Pasqua cattolica nei vari anni (*Computus Paschalis*), e presenta la successiva implementazione dell'algoritmo corrispondente nel foglio elettronico. Ciò consente agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di scoprire i collegamenti con le altre discipline e, inoltre, di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato.

Essa può essere introdotta in prima classe, quando gli studenti sanno sia calcolare il valore dell'espressione numerica e algebrica corrispondente alle relazioni e alle formule presenti negli algoritmi sia utilizzare il computer e il foglio elettronico nelle funzioni essenziali.

Descrizione dell'attività

Il percorso proposto parte da un'attività prevalentemente operativa, legata al calcolo della data di Pasqua come applicazione individuale e manuale, per concludere con l'implementazione delle relazioni presentate che porta, in momenti successivi, all'uso più ampio dell'algoritmo corrispondente.

Prima fase

L'insegnante:

- Illustra l'esperienza e consegna agli studenti una scheda contenente notizie storiche, religiose e di geografia astronomica.
- Distribuisce agli studenti, eventualmente divisi in gruppi, la scheda contenente i due algoritmi e li invita ad effettuare manualmente il calcolo per entrambi.
- Sollecita gli studenti a confrontare i due algoritmi e a proporre differenze e analogie fra gli stessi.
- Sollecita la risoluzione di un nuovo problema: "Roberta, nata il 7/4/1983, ha festeggiato alcuni suoi compleanni nel giorno di Pasqua: in quali anni? Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nel giorno di Pasqua?".
- Sottolinea la necessità, per risolvere questo problema, di automatizzare la procedura di ricerca, con l'uso di un computer, implementando gli algoritmi nel foglio elettronico con le specifiche istruzioni.

Seconda fase

L'attività è proposta in laboratorio d'informatica quando gli studenti sono in grado di gestire un computer e un foglio elettronico.

L'insegnante:

- Invita gli studenti ad implementare gli algoritmi illustrati nel foglio elettronico disponibile.
- Sollecita la risoluzione del problema: “Roberta, nata il 7/4/1983 ha festeggiato alcuni suoi compleanni nel giorno di Pasqua: in quali anni. Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nel giorno di Pasqua?”.
- Stimola gli studenti a confrontare i due algoritmi e a proporre differenze e analogie fra gli stessi, analizzando le diversità tra le difficoltà operative dei due algoritmi e quelle tra le istruzioni-macchina e le informazioni lette.

Possibili sviluppi

- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico l'*epatta*¹;
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il *numero d'oro*²;
- Stabilire l'*intervallo di ricorrenza della festività pasquale nei prossimi vent'anni*³;
- Stabilire, con riferimento al periodo 1950-2050, *in quali giorni ricorre maggiormente la Pasqua*.
- Utilizzare il *Metodo aritmetico* di Karl F. Gauss⁴, per calcolare il giorno della Pasqua;
- Utilizzare l'*Algoritmo di Oudin-Tondering*⁵, per calcolare il giorno della Pasqua.

Notizie storiche, religiose e astronomiche su Computus Paschalis

La Pasqua cristiana ricorda la passione, morte e resurrezione di Gesù Cristo che avvenne durante la Pasqua ebraica che cade fra il 14 ed il 15 del primo mese del calendario ebraico. Celebra anche la notte in cui Jahvè uccise tutti i primogeniti degli uomini e degli animali, risparmiando quelli delle famiglie ebraiche che avevano cosparsa la soglia di casa con il sangue del sacrificio di un agnello maschio.

La determinazione della data della Pasqua cristiana, in dipendenza di quella ebraica, si è dimostrata subito problematica per la differenza fra il calendario ebraico, basato sulle fasi lunari, e quello cristiano, basato sulla rivoluzione completa della terra intorno al sole (365,25 giorni).

Poiché le “lunazioni ecclesiastiche” hanno un ciclo di 29^d, mentre le “lunazioni astronomiche” sono di 29^d 12^h 44^m è necessario portare alcuni correttivi.

Nell'anno 325 il Concilio di Nicea, per interrompere ogni discussione, che portava addirittura a festeggiare la Pasqua in domeniche differenti nelle varie aree geografiche, stabilì che la solennità cristiana della Pasqua di Resurrezione, dovesse cadere la prima domenica dopo il “plenilunio ecclesiastico” (ossia il quattordicesimo giorno della luna ecclesiastica) che viene dopo l'equinozio di primavera. Stabilendo questo criterio la Chiesa cristiana dimostrò di non voler interrompere nettamente con la tradizione platonica ed il misticismo pitagorico-babilonese.

In quell'occasione la data ufficiale dell'equinozio fu spostata dal 25 marzo al 21 marzo poiché, a causa delle imprecisioni del calendario giuliano, si erano accumulati a quell'epoca quasi quattro giorni di ritardo rispetto al tempo di Giulio Cesare. Va in ogni modo precisato che, per varie ragioni, la data astronomica esatta dell'equinozio varia da un anno all'altro e nel corso dei secoli. Per queste ragioni la data della Pasqua è compresa tra il 22 marzo e il 25 aprile (inclusi). Infatti, se il 21 marzo è luna piena, e questo giorno è di sabato, sarà Pasqua il giorno dopo, il 22 marzo; se invece è di domenica, il giorno di Pasqua sarà la domenica successiva, il 28 marzo. D'altro canto, se il

¹ cfr. Epatta - <http://space.tin.it/edicola/esongi/epatta.htm>

² cfr. Numero d'oro - <http://space.tin.it/edicola/esongi/numerodoro.htm>

³ cfr. Tabella delle date di Pasqua - <http://space.tin.it/edicola/esongi/datapasqua.htm>

⁴ cfr. Metodo aritmetico - <http://space.tin.it/edicola/esongi/gauss.htm>

⁵ cfr. Algoritmo di Oudin-Tondering - <http://space.tin.it/edicola/esongi/oudin.htm>

plenilunio sopravviene il 20 marzo, quello successivo si verificherà il 18 aprile, e se questo giorno è una domenica occorre aspettare la domenica successiva, il 25 aprile.

La questione sul metodo di calcolo della data della Pasqua fu molto dibattuta all'interno della Chiesa, soprattutto prima, ma anche dopo il Concilio di Nicea. Nel corso dei secoli V-VII si affermò, grazie soprattutto all'opera di Dionigi il Piccolo, il metodo della compilazione delle tavole delle date della Pasqua, basato sul ciclo di Metone⁷. La riforma gregoriana del 1582⁸ rese più preciso il calcolo, introducendo una correzione del ciclo di Metone. Parecchie chiese ortodosse utilizzano il calendario giuliano, anziché il gregoriano, per il calcolo della Pasqua, che in tal modo è celebrato in un giorno generalmente diverso rispetto a quello della chiesa cattolica e delle chiese protestanti. È in corso un tentativo da parte della chiesa cattolica, delle chiese ortodosse e di quelle protestanti di stabilire una stessa data della Pasqua sia per le chiese occidentali, sia per quelle orientali. Ciò sarebbe possibile se, anziché ricorrere ad algoritmi e ad una data dell'equinozio fissata a priori il 21 marzo, si eseguissero i calcoli sulla base del momento esatto degli eventi astronomici: equinozio e plenilunio.

Molti studiosi si occuparono del problema di stabilire un algoritmo per valutare esattamente la data del giorno di Pasqua: tra questi il monaco Anianus, Vittorio d'Aquitania, K. F. Gauss (1825), Cisa di Gresy (Torino 1820), F. Piccolini (Bologna 1854) e Kinkelin (Basilea 1872) che ne diede una dimostrazione. Altri metodi richiedono la conoscenza dell'epatta e del numero d'oro.

7 cfr. Metone, astronomo ateniese del V secolo a. C. - <http://space.tin.it/edicola/esongi/numerodoro.htm>

8 cfr. Anno gregoriano - <http://space.tin.it/edicola/esongi/epatta.htm>

Antico algoritmo benedettino che consente di stabilire la data della Pasqua

- a) Chiama y l'anno di riferimento;
- b) Chiama n la differenza tra y e 1900;
- c) Dividi n per 19, chiama a il suo resto;
- d) Dividi $(7a + 1)$ per 19 e chiama b il suo quoziente;
- e) Dividi $(11a + 4 - b)$ per 29, chiama m il suo resto;
- f) Dividi n per 4, chiama q il quoziente;
- g) Dividi $(n + q + 31 - m)$ per 7, chiama w il resto.
- h) Calcola $(25 - m - w)$ chiama g il risultato.
- i) Se $g > 0$ la Pasqua cadrà ad Aprile nel giorno g
- j) Se $g \leq 0$ la Pasqua cadrà nel mese di marzo del giorno $(31 + g)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2		y	n	a	b	m	q	w	g	<i>La Pasqua in quest'anno ricorre il:</i>							
3		2001	101	6	2	10	25	0	15	22-mar	01-apr						
4										23-mar	02-apr						
5										24-mar	03-apr						
6										25-mar	04-apr						
7										26-mar	05-apr						
8										27-mar	06-apr						
9										28-mar	07-apr						
10										29-mar	08-apr						
11										30-mar	09-apr						
12										31-mar	10-apr						
13											11-apr						
14											12-apr						
15											13-apr						
16											14-apr						
17											15-apr						
18											16-apr						
19											17-apr						
20											18-apr						
21											19-apr						
22											20-apr						
23											21-apr						
24											22-apr						
25											23-apr						
26											24-apr						
27											25-apr						
28																	

**Ma quando
arriva Pasqua
antico algoritmo benedettino**

Tabella 1

Altro algoritmo per stabilire la data della Pasqua

- Chiami Y l'anno di riferimento
- Dividi Y per 19, chiami G il suo resto aumentato di 1
- Dividi Y per 100, ignora il resto e chiami C il quoziente aumentato di 1
- Moltiplica C per 3 e dividi il risultato per 4, trascura il resto e chiami X il quoziente diminuito di 12
- Calcola $(8 * C + 5) / 25$ trascura il resto e chiami Z il quoziente diminuito di 5
- Moltiplica Y per 5 e dividi il risultato per 4, trascura il resto e chiami D il quoziente diminuito di $(X + 10)$
- Dividi $(11 * G + 20 + Z - X)$ per 30 e chiami il resto E
- Se si verifica che $E = 25$ e $G > 11$ oppure $E = 24$, aggiungi 1 ad E
- Se non si verifica la condizione precedente il valore di E rimane invariato
- Calcola $(44 - E)$ e chiami il risultato N
- Se $N < 21$, incrementa N di 30 altrimenti lascia invariato il valore
- Calcola $(7 + N)$ e sottrai il resto di $(D + N) / 7$ e chiami R il risultato
- Se $R > 31$ la Pasqua cadrà ad Aprile nel giorno $R - 31$
- Se $R < 32$ la Pasqua ricorre il giorno R del mese di Marzo.

Y	G	C	X	Z	D	E	cond.	N	cond.	R
2000	6	21	3	1	2487	24	25	19	49	54

La Pasqua in quest'anno ricorre il 23 Aprile

Tabella 2

Elementi di prove di verifica

- Quante volte, fino ad oggi, Roberta ha festeggiato il suo compleanno nel giorno di Pasqua?
 - una volta,
 - due volte,
 - tre volte,
 - quattro volte,
 - nessuna volta.
- Fra quanti anni, a partire dal 2003, Roberta potrà festeggiare nuovamente il suo compleanno nel giorno di Pasqua?
 - Settanta anni,
 - Settantuno anni,
 - Settantadue anni,

- d) Settantatré anni,
 - e) Settantaquattro anni.
3. Qual è il periodo delle vacanze pasquali nell'anno scolastico 2003-04?
- a) dall'8 aprile al 13 aprile,
 - b) dal 27 marzo al 1 aprile,
 - c) dal 15 aprile al 20 aprile,
 - d) dal 20 marzo al 25 marzo,
 - e) dall'7 aprile al 12 aprile.
4. Quando cade l'inizio della quaresima nell'anno scolastico 2004-05?
- a) 7 febbraio
 - b) 8 febbraio
 - c) 9 febbraio
 - d) 10 febbraio
 - e) 11 febbraio
5. Qual è l'intervallo in cui può variare la Pasqua?
- a) dal 21 marzo al 22 aprile
 - b) dal 27 marzo al 21 aprile
 - c) dal 15 aprile al 20 aprile
 - d) dal 2 marzo al 25 marzo
 - e) nessuna risposta delle precedenti è esatta
6. In che periodo la Pasqua coinciderà con la festa dell'Anniversario della liberazione?
- a) dal 2019 al 2035
 - b) dal 1990 al 2010
 - c) dal 2036 al 2050
 - d) dal 2011 al 2020
 - e) nessuna risposta delle precedenti è esatta
7. In che periodo la Pasqua coinciderà con la festa del Lavoro?
- a) dal 2019 al 2035
 - b) dal 1990 al 2010
 - c) dal 2036 al 2050
 - d) dal 2011 al 2020
 - e) nessuna risposta delle precedenti è esatta

In quale giorno cade Natale?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Risolvere e porsi problemi Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	Geografia astronomica Religione Storia

Contesto

Algoritmi numerici.

Questa attività affronta il problema del calcolo del giorno della settimana in cui viene Natale¹ nei vari anni e in generale di un qualunque altro giorno del calendario, e presenta l'implementazione dell'algoritmo corrispondente nel foglio elettronico. Essa consente agli studenti di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione algebrica, di scoprire i collegamenti con le altre discipline e di acquisire piena consapevolezza sull'uso degli strumenti di calcolo automatizzato e sull'uso di una tabella complessa quale quella relativa al Calendario Perpetuo.

Può essere introdotta in prima classe, quando gli studenti sanno sia orientarsi in modo cosciente in una tabella sia calcolare il valore dell'espressione numerica e algebrica corrispondente alle relazioni e alle formule presenti nell'algoritmo sia, ancora, utilizzare il computer e il foglio elettronico nelle funzioni essenziali.

Descrizione dell'attività

Il percorso proposto parte da un'attività, prevalentemente operativa e personale, legata al calcolo del giorno corrispondente ad una qualsiasi data di un calendario in forma tabellare, che porta, in momenti successivi, all'uso più ampio dell'algoritmo corrispondente.

Prima fase

L'insegnante:

- Illustra l'esperienza e consegna agli studenti una scheda contenente notizie storiche, religiose e di geografia astronomica relative al Calendario.
- Distribuisce agli studenti, eventualmente divisi in gruppi, la scheda contenente il Calendario Perpetuo in forma tabellare e li invita a ricercare “in quale giorno della settimana cadrà il Natale nel successivo anno scolastico”, dopo aver letto e commentato le istruzioni per l'utilizzo della stessa.
- Sollecita la risoluzione di un nuovo problema: “Rita, nata il 5/9/1980, ha festeggiato diversi suoi compleanni nello stesso giorno della settimana in cui è nata: quali sono questi anni? Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nello stesso giorno?”.
- Sottolinea la necessità, per la risoluzione del problema, di automatizzare la procedura di ricerca con l'uso di un computer, implementando l'algoritmo nel foglio elettronico con le specifiche istruzioni.

¹ Il presente lavoro ha soltanto un valore didattico e non scientifico

Seconda fase

L'attività è proposta in laboratorio quando gli studenti sono in grado sia di calcolare il valore di un'espressione algebrica sia di gestire un computer e un foglio elettronico nelle funzioni essenziali.

L'insegnante:

- Invita gli studenti a implementare l'algoritmo analizzato nel foglio elettronico disponibile.
- Sollecita la risoluzione del problema: "Rita, nata il 5/9/1980, ha festeggiato alcuni suoi compleanni nello stesso giorno della settimana in cui è nata; fino ad oggi quali sono questi anni? Quanti anni, inoltre, dovrà aspettare per festeggiare nuovamente il suo compleanno nello stesso giorno?".
- Stimola gli studenti a confrontare i due metodi: tabellare e algoritmico e a proporre differenze e analogie fra gli stessi; mette a confronto le differenti difficoltà operative e le diversità tra le istruzioni-macchina e le informazioni lette.

Possibili sviluppi

- Calcolare il giorno corrispondente ad una data utilizzando altri *calendari perpetui*²;
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico la *lettera domenicale*³;
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il *ciclo solare*⁴;
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il *giorno della settimana*⁵;
- Calcolare manualmente e con l'uso del foglio elettronico il giorno corrispondente all'inizio e alla fine dell'*ora legale in Italia* nel periodo antecedente al 1967⁶;
- Costruire "*la ciclicità del giorno di Natale*";
- Costruire "*la ciclicità di un'altra festività fissa*".

Notizie storiche, religiose e astronomiche su Il Calendario Perpetuo

Un calendario⁷ rappresenta una suddivisione dell'anno in mesi, settimane e giorni, nonché un metodo per ordinare gli anni. Diverse culture hanno prodotto diversi calendari, quasi tutti originariamente basati sul mese lunare, cioè sul periodo di tempo che intercorre tra una luna nuova e la successiva (circa 29 giorni e mezzo) e che è all'origine della definizione del mese. Il nome calendario deriva dal latino *calendæ*, il primo giorno del mese romano, in cui si celebrava proprio la comparsa della luna nuova. Il calendario che usiamo oggi è invece solare: i nostri dodici mesi durano 365 giorni in tutto, approssimando il periodo della rivoluzione completa della Terra intorno al Sole. Poiché l'anno solare dura in realtà 365 giorni e, circa, un quarto, ogni quattro anni aggiungiamo un giorno alla fine di febbraio (anno bisestile). Per definire le date usiamo come riferimento un'ipotetica data di nascita di Gesù Cristo, e chiamiamo avanti Cristo (a.C.) le date anteriori e dopo Cristo o Anno Domini (d.C. o AD) le date posteriori.

I calendari primitivi erano basati sull'osservazione della posizione del Sole (per la durata del giorno), sul ciclo della Luna (per la durata del mese) e sulle stagioni (per la durata dell'anno). La suddivisione del tempo rifletteva i vincoli imposti dalla natura e dalla geografia locale. In Egitto, dove la sopravvivenza dipendeva dalla fertilizzazione delle terre dovuta alle periodiche piene del Nilo, l'anno era diviso in tre stagioni: inondazione del Nilo, emersione delle terre, mietitura del grano. Ogni stagione era suddivisa in quattro mesi di 30 giorni ciascuno; alla fine si aggiungevano cinque giorni dedicati ad altrettante divinità. Gli egizi furono probabilmente i primi a dividere il giorno in 24 ore di eguale durata.

² cfr. Il calendario Perpetuo - <http://space.tin.it/edicola/esongi/perpetuo.htm>

³ cfr. La lettera domenicale - <http://space.tin.it/edicola/esongi/domenicale.htm>

⁴ cfr. Il ciclo solare - <http://space.tin.it/edicola/esongi/ciclosolare.htm>

⁵ cfr. Metodo della formula per stabilire il giorno della settimana - <http://space.tin.it/edicola/esongi/formula.htm>

⁶ cfr. L'ora legale in Italia - <http://space.tin.it/edicola/esongi/oralegale.htm>

⁷ cfr. Il Calendario - <http://www.ciaoumbria.it/incasa/soleluna/calendarioperpetuo/>

Il primo calendario accurato, basato sul ciclo delle fasi lunari, fu probabilmente sviluppato 5000 anni fa dai Sumeri in Mesopotamia, regione compresa tra i fiumi Tigri ed Eufrate (nell'odierno Iraq).

Il calendario ebraico è una complessa combinazione di cicli lunari e solari: un anno può avere 12 o 13 mesi, la cui durata normalmente varia tra 29 e 30 giorni. Il conto degli anni è fatto iniziare nel 3761 a.C., data tradizionale della creazione del mondo.

Il calendario islamico, basato sul ciclo lunare, ha dodici mesi di 29 e 30 giorni alternativamente. L'anno musulmano dura quindi 354 giorni, undici in meno dell'anno solare: il calendario ruota intorno alle stagioni in un ciclo trentennale. La datazione musulmana inizia con l'ègira (16 luglio dell'anno 622), data del trasferimento di Maometto dalla Mecca a Medina.

Anche il calendario tradizionale cinese, in uso ancora oggi insieme a quello occidentale, è lunare e ha un ciclo di 60 anni.

In India l'inizio dell'anno cade il 22 marzo, subito dopo l'equinozio di primavera, e gli anni si calcolano a partire dall'inizio di varie dinastie: l'era Saka, per esempio, inizia nel 78 d.C.

Il calendario usato oggi da tutto l'Occidente ha invece le sue origini dal calendario giuliano, introdotto da Giulio Cesare nel 46 avanti Cristo, che portò la durata dell'anno a 365 giorni. Le date si misuravano *ab Urbe condita*, cioè dalla fondazione di Roma (il 22 aprile del 753 a.C.).

Fu il monaco scozzese Dionysius Exiguus, nel 525 d.C., a proporre la numerazione degli anni a partire dalla nascita di Cristo, che fissò nell'anno 753 dalla fondazione di Roma. Molti storici di oggi ritengono, invece, che Gesù sia nato alcuni anni prima. Il nuovo calendario definito da Exiguus, non era però ancora preciso, e determinava l'accumularsi di piccoli sfasamenti tra i mesi e le stagioni.

Fu la riforma gregoriana del 1582, ad opera del papa Gregorio XIII, a tenere conto del fatto che l'anno solare dura 365 giorni, 5 ore e 48 minuti: quindi poco meno di 365 giorni e un quarto. L'aggiunta di un giorno bisestile ogni quattro anni è quindi eccessiva. La riforma gregoriana per questa ragione stipulò che, degli anni secolari, soltanto uno ogni quattro fosse bisestile. Ecco perché gli anni 1700, 1800 e 1900 non sono stati bisestili, ma l'anno 2000 sì.

Il calendario gregoriano entrò in vigore in quasi tutta l'Europa giovedì 4 ottobre 1582. Quel giorno la gente lavorò normalmente, e alla solita ora tutti andarono a letto. Quando si risvegliarono era il 15 ottobre, venerdì. Il salto decretato da papa Gregorio XIII si era reso necessario perché, a causa della leggera imprecisione del calendario giuliano, si era accumulato, nei secoli, uno sfasamento in avanti di ben 10 giorni (quelli annullati tra il 4 e il 15 ottobre). Senza questa correzione, col passare del tempo si sarebbe celebrato il Natale in piena primavera.

La Francia, la Spagna, il Portogallo, i Paesi Bassi e quasi tutti gli staterelli italiani si adeguarono subito al calendario stabilito dallo stato pontificio, mentre gli stati cattolici della Germania e la Svizzera lo fecero solo nel 1584. La Gran Bretagna accettò il calendario gregoriano soltanto nel 1752, la Cina nel 1911, la Russia nel 1919 e la Grecia nel 1923.

Tra i più recenti esperimenti storici di modifica del calendario merita una menzione quello della Francia rivoluzionaria, che sostituì il calendario gregoriano con il Calendario Repubblicano, iniziando l'anno con l'equinozio di autunno del 22 settembre 1792, giorno della proclamazione della Repubblica. I mesi restavano dodici, ma di 30 giorni ciascuno. I 5 giorni mancanti (6 negli anni bisestili) erano riservati alle festività nazionali e si contavano a parte. Anche il nome dei mesi veniva modificato: vendemmiaio, brumaio e frimaio (per l'autunno), nevoso, piovoso e ventoso (per l'inverno), germinale, fiorile e pratile (per la primavera), messidoro, termidoro e fruttidoro (per l'estate). La Rivoluzione francese portò anche all'introduzione del sistema metrico decimale, e non mancò chi propose di passare a una settimana di dieci giorni anziché di sette. Questa riforma fu, poi, cancellata da Napoleone. Il calendario gregoriano fu restaurato in Francia il 1° gennaio 1806.

Più di una volta è stata avanzata la proposta⁸ di creare un calendario che possa essere adottato da tutti i popoli e che superi le differenze esistenti tra i diversi calendari.

⁸ cfr. La proposta di calendario perpetuo - <http://space.tin.it/edicola/esongi/perpetuo1931.htm>

Un calendario perpetuo⁹ è, come dice il nome stesso, un calendario valido per sempre o per un periodo lunghissimo di tempo e può assumere svariate forme.

CALENDARIO PERPETUO

Q U A D R O I														
<p>ISTRUZIONE</p> <p>1° - Cercare nel Quadro 1° in basso a sinistra il numero dei secoli, in alto a destra quello degli anni e leggere all'incrocio della riga con la colonna il numero corrispondente. Se il numero degli anni è scritto in rosso, l'anno è bisestile. Se si tratta di un anno secolare (cioè tale che il millesimo termini con 00) ricordare che tutti gli anni secolari sono bisestili ad eccezione del 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700. Per questo motivo il numero 00, nella prima casella, in alto a sinistra, è scritto con uno zero nero e uno rosso. Occorre tener conto degli anni bisestili solo per le date relative ai mesi di Gennaio e Febbraio.</p> <p>2° - Cercare nella prima colonna del Quadro 2° la riga portante il numero ricavato dal quadro 1° e leggere, all'incrocio colla colonna contenente il mese dato, il numero corrispondente. Per gli anni bisestili e per i soli mesi di Gennaio e Febbraio, usare le colonne nelle quali questi mesi sono scritti in rosso; altrimenti cercare sempre il mese scritto in nero.</p> <p>3° - Cercare nella prima colonna del Quadro 3° la riga portante il numero ricavato dal Quadro 2° e leggere all'incrocio colla colonna portante la data del giorno cercato, l'iniziale del giorno stesso. (Quando la lettera M è scritta in nero significa Martedì, quando è scritta in rosso significa Mercoledì).</p>					A N N I									
					00	01	02	03	—	04	05			
					06	07	—	08	09	10	11			
					—	12	13	14	15	—	16			
					17	18	19	—	20	21	22			
					23	—	24	25	26	27	—			
					28	29	30	31	—	32	33			
					34	35	—	36	37	38	39			
					—	40	41	42	43	—	44			
					45	46	47	—	48	49	50			
					51	—	52	53	54	55	—			
					56	57	58	59	—	60	61			
					62	63	—	64	65	66	67			
					—	68	69	70	71	—	72			
73	74	75	—	76	77	78								
79	—	80	81	82	83	—								
84	85	86	87	—	88	89								
90	91	—	92	93	94	95								
—	96	97	98	99	—	—								
S E C O L I														
GIULIANI			GREGORIANI											
0	7	14					6	0	1	2	3	4	5	
1	8	15					5	6	0	1	2	3	4	
2	9						4	5	6	0	1	2	3	
3	10						3	4	5	6	0	1	2	
4	11						2	3	4	5	6	0	1	
5	12						1	2	3	4	5	6	0	
6	13						0	1	2	3	4	5	6	
<p>Dall'anno 0 al 4 Ottobre 1582</p> <p>Dal 15 Ottobre 1582 al 2899</p>														
Q U A D R O II														
MESI	M A G G I O	A G O S T O	F E B B R A I O B.	F E B B R A I O	M A R Z O	N O V E M B R E	G I U G N O	S E T T E M B R E	D I C E M B R E	A P R I L E	L U G L I O	G E N N A I O B.	G E N N A I O	O T T O B R E
Numero risultante dai calcoli precedenti														
1	2	3	4	5	6	0	1							
2	3	4	5	6	0	1	2							
3	4	5	6	0	1	2	3							
4	5	6	0	1	2	3	4							
5	6	0	1	2	3	4	5							
6	0	1	2	3	4	5	6							
0	1	2	3	4	5	6	0							
Q U A D R O III														
GIORNI	1	2	3	4	5	6	7							
Numero risultante dai calcoli precedenti	8	9	10	11	12	13	14							
	15	16	17	18	19	20	21							
	22	23	24	25	26	27	28							
	29	30	31											
1	D	L	M	M	G	V	S							
2	L	M	M	G	V	S	D							
3	M	M	G	V	S	D	L							
4	M	G	V	S	D	L	M							
5	G	V	S	D	L	M	M							
6	V	S	D	L	M	M	G							
0	S	D	L	M	M	G	V							

Tabella 1

⁹ cfr. Il calendario perpetuo - <http://space.tin.it/edicola/esongi/perpetuo.htm>

Algoritmo che consente di determinare il giorno della settimana di un qualunque anno del calendario Gregoriano

- a) Chiama g , m , ed a rispettivamente il giorno il mese e l'anno di riferimento
- b) Se il mese è Gennaio allora $m = 11$
 se il mese è Febbraio allora $m = 12$
 se il mese è Marzo allora $m = 1$
 ...
 se il mese è Dicembre allora $m = 10$
- c) Se il giorno è domenica allora $g = 0$
 Se il giorno è lunedì allora $g = 1$
 ...
 Se il giorno è sabato allora $g = 6$
- d) Calcola $a/100$ e chiama C il quoziente e Y il resto
- e) Calcola $(13*m - 1)/5$ e indica con E il quoziente trascurandone il resto
- f) Calcola $Y/4$ e indica B il quoziente trascurandone il resto
- g) Calcola $C/4$ e indica F il quoziente trascurandone il resto
- h) Calcola $(E + B + F + g + Y - 2C)$ e indica tale valore con D
- i) Calcola $D/7$ e indica il resto con R
- j) Se $R = 0$ il giorno è domenica
- k) Se $R = 1$ il giorno è lunedì
- l) ...
- m) Se $R = 6$ il giorno è sabato

Ma quando viene Natale										
mese	g=giorno	a=anno	m	C	Y	E	B	F	D	R
maggio	23	2003	3	20	3	7	0	5	-2	5

Il giorno corrisponde a:
venerdì

Tabella 2

Elementi di prove di verifica

1. In quali anni Rita ha festeggiato i suoi compleanni nello stesso giorno della settimana in cui è nata?
 - 1) 1985 - 1996 - 2002
 - 2) 1986 - 1996 - 2003
 - 3) 1987 - 1998 - 2004
 - 4) 1988 - 1999 - 2005
 - 5) 1989 - 2000 - 2006

2. In quale anno Rita festeggerà il suo prossimo compleanno nello stesso giorno della settimana in cui è nata?
 - a) 2005
 - b) 2006
 - c) 2007
 - d) 2008
 - e) 2009

3. Utilizzando esclusivamente il Calendario Perpetuo tabellare calcolare il giorno della settimana relativo al 7/settembre/1947.
 - f) lunedì
 - g) martedì
 - h) giovedì
 - i) sabato
 - j) domenica

4. Utilizzando esclusivamente il Calendario Perpetuo algoritmico calcolare il giorno della settimana relativo al 13/ottobre/1582.
 - a) lunedì
 - b) martedì
 - c) mercoledì
 - d) sabato
 - e) nessuna delle risposte precedenti è esatta

5. Supponiamo che le vacanze di Natale dell'anno scolastico 2004-05 inizino il 23 dicembre 2003 e terminino il 6 gennaio 2004. A quali giorni della settimana essi corrispondono?
 - a) lunedì – martedì
 - b) martedì – martedì
 - c) mercoledì - venerdì
 - d) giovedì - giovedì
 - e) domenica - domenica

I numeri delle macchine

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e dei numeri razionali. I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali. Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Laboratorio di matematica	

Contesto

I numeri macchina.

Gli strumenti di calcolo, dalla più economica delle calcolatrici al più costoso dei computer, hanno oggi una grandissima diffusione e non solo in ambiente scolastico. È dunque importante che gli studenti si rendano conto delle possibilità e dei limiti degli strumenti che hanno a disposizione.

Le conoscenze matematiche necessarie per svolgere le attività di laboratorio qui descritte sono elementari e alla portata di qualsiasi studente del primo biennio.

Descrizione dell'attività

Esistono vari tipi di "errori" commessi dalle macchine: quelli dovuti alla rappresentazione dei numeri nella macchina, quelli legati alla "instabilità" di certi problemi, quelli di tipo grafico dovuti al modo utilizzato dallo strumento per realizzare un grafico, ...

Nell'attività descritta si farà riferimento a strumenti che non utilizzano sistemi di calcolo simbolico (CAS = Computer Algebra System), i quali usano metodi di rappresentazione e algoritmi di calcolo completamente diversi, bensì a calcolatrici non simboliche, fogli elettronici e anche CAS usati in modalità approssimata.

L'argomento di quest'attività non è, come il titolo potrebbe far pensare, i numeri-macchina, in altre parole come i numeri sono rappresentati nella memoria di un calcolatore o di una calcolatrice: questo è un argomento non facile e non proponibile in una classe del primo biennio; per eventuali approfondimenti su questo tema si rimanda alla Bibliografia.

L'obiettivo di quest'attività di laboratorio è imparare a conoscere i vari modi nei quali le "macchine" (calcolatrici e calcolatori) visualizzano i numeri, gli errori che possono essere indotti da un uso non consapevole di uno strumento di calcolo, la conoscenza delle prestazioni offerte dallo strumento disponibile e più in generale un approfondimento della conoscenza dei numeri, delle operazioni elementari e delle loro proprietà.

Non si parla quindi di numeri macchina, ma di numeri coinvolti nell'uso di strumenti di calcolo: arrotondamenti e approssimazioni, errori dovuti alla rappresentazione dei numeri...

Una difficoltà operativa notevole nell'uso delle calcolatrici in classe deriva dal fatto che, a meno che ci siano delle "adozioni" ufficiali da parte dell'insegnante, tutti gli studenti di norma possiedono una calcolatrice, ma di modelli, marche, prestazioni (e prezzi) spesso molto diversi tra loro. Se questa diversità costituisce un ostacolo nell'uso regolare della calcolatrice, in questa attività può anche essere considerata una risorsa, offrendo la possibilità di mettere a confronto le caratteristiche dei diversi strumenti.

Saranno esaminati i comportamenti di vari tipi di macchine di calcolo:

- la funzione "calcolatrice" presente in quasi tutti i modelli di telefoni cellulari (questo strumento è particolarmente utile proprio a causa delle sue modestissime capacità di calcolo);
- le calcolatrici più semplici ed economiche, tipicamente i Convertitori Lira-Euro e le calcolatrici offerte in omaggio con l'acquisto di alcuni prodotti (ad esempio nei fustini del detersivo);
- le calcolatrici cosiddette "scientifiche";
- le calcolatrici grafiche ovvero "scientifiche evolute (e programmabili)";
- i calcolatori o, meglio, alcuni software per calcolatori, tipicamente il foglio elettronico;
- le calcolatrici simboliche o più in generale i Computer Algebra System, siano essi su calcolatrice o su computer;
- potrebbero essere disponibili anche calcolatrici che operano in RPN (Reverse Polish Notation), oggi però poco diffuse: potrebbe essere utile allora far precedere una lezione sui diversi linguaggi algebrici (tradizionale, lineare, con grafi ad alberi e, per l'appunto, RPN) e i diversi modi di indicare le priorità delle operazioni.

In queste attività non saranno utilizzati CAS (sia esso per computer o per calcolatrice) perché con questo tipo di strumento la maggior parte dei problemi sotto elencati non si presenta in quanto la rappresentazione dei numeri nella macchina e i relativi algoritmi di calcolo sono completamente diversi.

Anzi, in alcune delle attività proposte è opportuno che la calcolatrice a disposizione abbia le prestazioni più scarse possibile.

Gli studenti opereranno in piccoli gruppi di apprendimento collaborativo. Sarà cura dell'insegnante fare in modo che in ciascun gruppo sia presente la maggior varietà possibile di calcolatrici; la presenza di un calcolatore non è indispensabile, ma sarà molto utile almeno un calcolatore a disposizione dell'insegnante con un dispositivo di proiezione. I software che possono essere particolarmente utili sono: un foglio elettronico e un programma di elaborazione simbolica (CAS).

Prima fase:

Individuazione delle capacità di calcolo

L'insegnante propone le seguenti attività, eventualmente guidate da un'apposita scheda da compilare (una per ciascun modello di calcolatrice):

- Individuazione delle operazioni eseguibili (le quattro operazioni sono disponibili su tutti gli strumenti di calcolo, le radici quadrate di norma non nei modelli più economici; spesso l'operazione di elevamento a potenza è disponibile solo dalle scientifiche in su).
- Individuazione del tasto da premere per ottenere il risultato (ENTER, tasto di uguaglianza, ...).
- Individuazione del modo con cui la calcolatrice segnala un errore (ad esempio chiedendo di calcolare $5 / 0$ o scrivendo un'espressione sintatticamente scorretta, come $8 + =$) attraverso un'apposita scritta che compare nel display oppure semplicemente non fornendo alcun risultato.
- Rilevazione della capacità di gestire i numeri razionali in forma frazionaria oltre che decimale.
- Riconoscimento della possibilità di eseguire operazioni in sequenza: in altre parole se, digitando per primo un operatore, viene o no automaticamente assunto come primo operando il risultato dell'operazione precedente. Questa possibilità è di solito presente anche nelle calcolatrici più economiche. A titolo di esempio si potrebbe far costruire una tavola delle potenze di due.

- Individuazione della possibilità di inserimento di numeri negativi, cioè dell'eventuale presenza del tasto di negazione (o "meno unario"). Sarà cura dell'insegnante rilevare le ambiguità che possono derivare dall'uso del simbolo "meno" e dai suoi diversi significati a seconda del contesto. E' interessante notare che i modelli più modesti di calcolatrici non permettono l'inserimento di numeri negativi, ma che comunque i risultati sono nell'insieme dei numeri relativi; l'eventuale risultato negativo di un'operazione è talvolta segnalato con un "meno" come suffisso anziché, come è uso, come prefisso. Ad esempio: $3 - 5 = 2-$.
- Individuazione delle priorità delle operazioni. Le calcolatrici di norma danno alle operazioni due tipi di priorità a seconda del modello:
 - Tradizionale (le operazioni sono eseguite secondo le normali priorità stabilite in algebra; ad esempio, in mancanza di parentesi, prima sono eseguiti i prodotti, poi le somme).
 - Cronologica (le operazioni sono eseguite nell'esatto ordine con il quale sono indicate).

Alcune delle calcolatrici meno evolute (es. le calcolatrici presenti come accessorio dei telefoni cellulari) talvolta non consentono di eseguire altro che una sola operazione alla volta. I tipi più evoluti hanno anche la possibilità di usare parentesi, anche su più livelli.

Possono essere proposti agli studenti i seguenti esempi:

$3 * 4 - 5$ che fornisce 7 su tutte le macchine: l'operazione che deve essere eseguita per prima è anche la prima ad essere digitata.

$2 + 4 * 5$ fornisce invece 22 sulle macchine più evolute, 30 sulle altre. Per ottenere lo stesso risultato, bisogna digitare $4 * 5 + 2$.

Questa è una buona occasione per parlare della priorità delle operazioni, della funzione delle parentesi, dell'arbitrarietà delle priorità assegnate alle operazioni...

Questa fase si conclude con l'esposizione da parte di ciascun gruppo dei risultati ottenuti. Data la grande varietà di modelli di calcolatrici e delle relative prestazioni, sarà interessante mettere a confronto i risultati.

Seconda fase:

Individuazione dei limiti di operatività dello strumento

Cura dell'insegnante è far osservare che l'insieme dei numeri gestibile dallo strumento è, per forza di cose, sempre finito.

Se lo ritiene utile, l'insegnante può anche accennare al fatto che i numeri sono rappresentati sempre secondo una codifica binaria. Può così parlare di rappresentazione dei numeri nelle diverse basi (in particolare in base 10 e in base 2) e proporre agli studenti di trovare quanti numeri naturali possono essere rappresentati, ad esempio, in un ottetto (Byte) di bit. Allo scopo gli studenti possono eventualmente utilizzare grafi ad albero. Può anche essere consigliabile mostrare, per esempio operando ancora in un singolo Byte, l'insorgere dell'"overflow" nel caso in cui il risultato di un'operazione superi le capacità di rappresentazione della macchina.

L'argomento è suscettibile di importanti approfondimenti, come gli algoritmi per il cambiamento di base e la rappresentazione interna dei numeri: ad esempio la complementazione a due per rappresentare i numeri interi negativi, la rappresentazione in virgola mobile per i numeri razionali ecc.; però, come si è detto nella Premessa, non è questo l'obiettivo dell'attività.

Anche in questa fase può essere opportuno operare con l'ausilio di una scheda di lavoro da compilare.

Queste sono alcune attività che potrebbero essere proposte:

- Individuazione del massimo numero intero gestibile dalla calcolatrice. A questo scopo si potrebbero lasciare gli studenti liberi di individuare la strategia da seguire; solo eccezionalmente

l'insegnante può suggerire di cercare per tentativi il numero intero tale che, aggiungendogli 1, dia origine a un messaggio di errore.

Sarà cura dell'insegnante, se non emerge prima dagli studenti stessi, far osservare che non vale (in determinate condizioni) la proprietà associativa: se ad esempio il massimo numero intero è 999999999, l'espressione $999999999 + 1 - 20$ non è calcolabile perché la prima operazione provoca un errore nella macchina; al contrario $999999999 - 19$ fornisce il risultato corretto.

- Individuazione della possibilità di rappresentare, nelle calcolatrici più evolute, i numeri in vari formati: "normale", scientifico, tecnico.

Ad esempio 987654321 potrebbe essere indicato dalla calcolatrice, nei tre diversi formati, come: 987654321, $9.87654321 \cdot 10^8$, $987.654321 \cdot 10^6$. È importante che siano gli studenti stessi a riconoscere l'equivalenza dei tre diversi formati e a ricavare, in un'ottica di lavoro in laboratorio, le "regole" di rappresentazione dei numeri nei diversi formati. Questa potrebbe anche essere una buona occasione per riflettere sulla rappresentazione decimale dei numeri e sulle proprietà delle potenze.

- Scoperta, attraverso operazioni come ad esempio $1/3$, $2/3$, $2/7$, del massimo numero di cifre decimali visualizzate dalla calcolatrice, e se questa opera un troncamento o un arrotondamento. In questo secondo caso gli studenti saranno invitati a indicare le modalità con le quali è realizzato l'arrotondamento.
- L'insegnante può poi proporre di eseguire un'operazione e immediatamente dopo la sua inversa: ad esempio $1/3 \cdot 3$ oppure il quadrato della radice quadrata di 2 ecc. e invitare gli studenti a commentare i risultati ottenuti.

Con alcune calcolatrici è riproposto il valore di partenza, con altre invece una sua approssimazione. Questa attività è molto utile soprattutto per rendere consapevoli gli studenti della non infallibilità degli strumenti di calcolo.

È facile capire il motivo della approssimazione: in fin dei conti (immaginiamo di usare una calcolatrice che opera con cinque cifre decimali) $0.33333 \cdot 3$ fa effettivamente 0.99999.

È invece meno facile capire come faccia una calcolatrice a fornire il risultato 1 nel prodotto $0.33333 \cdot 3$. In questa attività è utile l'intervento diretto dell'insegnante che può rivelare un "trucco" molto seguito dalle calcolatrici: quello di eseguire i calcoli con un numero di cifre decimali maggiore di quelle visualizzate. Ad esempio il numero 0.33333 è considerato, internamente alla macchina, come 0.333333. Al momento di moltiplicarlo per 3, viene calcolato 0.999999. Quando la macchina dovrà scriverlo sul display, avendo a disposizione solo cinque cifre, dovrà operare un arrotondamento alla quinta cifra; ecco così che appare il risultato atteso: 1.

Possono anche essere proposte altre attività simili: nella Figura 1 viene calcolata su una calcolatrice evoluta la radice quadrata di 2, viene poi calcolato il quadrato della risposta precedente ottenendo così il risultato 2 e infine viene calcolato il quadrato del risultato che era stato indicato per la radice ricopiandolo, cifra per cifra. Si osserva che si ottengono due risultati diversi.

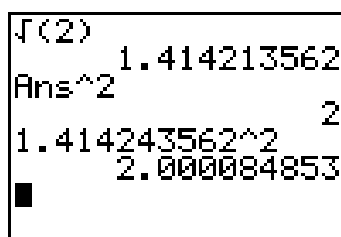


Figura 1

Al momento della sintesi, l'insegnante non mancherà di far notare che, quando si usa un numero n con uno strumento di calcolo, si ha in realtà a che fare con ben quattro diversi numeri:

- il numero n che intende l'utente;

- il numero n_1 che viene visualizzato dallo strumento di calcolo;
- il numero n_2 con il quale lo strumento di calcolo opera realmente;
- il numero n_3 che viene rappresentato internamente allo strumento, di norma secondo un codice binario.

Come si è visto, non è detto che questi quattro numeri coincidano.

A conclusione di questa attività gli studenti possono essere invitati a individuare in quali situazioni $n = n_1 = n_2$ e in quali situazioni invece ciò non avviene.

- Individuazione del minimo numero gestibile dalla macchina.

Con il termine *eps* (o *macheps*) si indica il più piccolo numero che, sommato a 1, fornisce un risultato più grande di 1. Il suo ordine di grandezza può facilmente essere determinato in vario modo, soprattutto se la calcolatrice con la quale si opera è di tipo evoluto, in grado di accettare in input un predicato. In questo caso, a seconda del modello o della marca, risponde *true* oppure *false*, oppure gli equivalenti 1 o 0. Nella Figura 2 appare lo schermo di una calcolatrice non simbolica che mostra come $1 + 0.000000001$ viene riconosciuto come uguale a 1, mentre $1 + 0.000000001$ no.

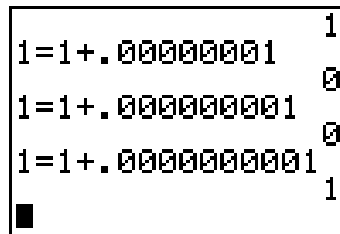


Figura 2

Come approfondimento di questa attività si può realizzare sulle calcolatrici più evolute un semplice programma per la determinazione dell'ordine di grandezza di *eps*; nelle Figure 3 e 4 appare il listato del programma e la schermata finale della sua esecuzione.

```

F1+  F2+  F3+  F4+  F5  F6+
Tools Control I/O Var Find... Mode
:eps()
:Prgm
:0→k: 1→x
:While 1+x>1
: x/2→x
: k+1→k
: Disp [[k,x]]
:EndWhile
:EndPrgm
MAIN          RAD APPROX SEQ
    
```

Figura 3

```

F1+  F2+  F3+  F4+  F5  F6+
Tools Control I/O Var Find... Mode
[39.  .000000000000002]
[40.  9.09494701773E-13]
[41.  4.54747350887E-13]
[42.  2.27373675443E-13]
[43.  1.13686837722E-13]
[44.  5.68434188608E-14]
[45.  2.84217094304E-14]
MAIN          RAD APPROX SEQ 3/30
    
```

Figura 4

- L'insegnante può invitare gli studenti a determinare "calcoli sbagliati" a causa di valori troppo piccoli da essere valutati dalla macchina; è opportuno far notare che in situazioni "estreme" anche la legge di annullamento del prodotto non è più valida: con una calcolatrice non molto evoluta (ad esempio con un convertitore Euro/Lira) $1/10000 * 1/10000$ dà come risultato 0.

Terza fase:

L'esplosione degli errori

In questa fase si può indagare sul fatto che l'errore che inevitabilmente uno strumento di calcolo numerico commette nel rappresentare numeri razionali periodici (o anche non periodici ma con un numero di cifre decimali "troppo grande" per le capacità della macchina) non necessariamente è limitato alle ultime cifre decimali visualizzate ma può, in situazioni particolari, facilmente "esplodere" in modo molto spettacolare.

La cosa non manca mai di meravigliare molto gli studenti e infondere in loro una certa diffidenza nei confronti delle macchine, tanto più benefica quanto più acritico e ingenuamente fiducioso è il loro atteggiamento nei confronti della tecnologia.

Un interessante esperimento potrebbe essere quello di esaminare il comportamento di un'opportuna successione definita ricorsivamente. Poiché queste attività sono consigliate in una classe prima, ovviamente è opportuno usare una terminologia ad hoc, ad esempio parlando di “un calcolo che si esegue a partire dal risultato di un calcolo precedente dello stesso tipo”.

Quasi tutte le calcolatrici hanno la possibilità di iterare un calcolo utilizzando un risultato precedentemente ottenuto. Ciò in alcuni tipi di calcolatrici si ottiene invocando con un apposito tasto ANS(1), cioè l'ultimo risultato ottenuto; in altre, come si è già visto in una precedente attività, basta premere un tasto di operatore per utilizzare automaticamente come primo operando l'ultimo risultato.

La stessa cosa può essere ottenuta in un foglio elettronico digitando il valore iniziale in una cella, poi digitando la formula nella cella sottostante facendo riferimento alla prima cella, poi copiando nelle celle in basso tante volte quante si vuole.

Tuttavia lo strumento ideale per questo tipo di attività probabilmente è una calcolatrice evoluta, perché consente di costruire la successione ricorsiva inserendo il valore iniziale, poi digitando la risposta precedente e la definizione della successione in una sola linea; a questo punto è sufficiente premere più volte il tasto di esecuzione (= oppure ENTER) per avere ad ogni pressione l'uno dopo l'altro i termini della successione. Per altro verso, anche il foglio elettronico non è privo di vantaggi: basterà, infatti, modificare il valore della cella più in alto (valore iniziale della successione) perché automaticamente siano modificati tutti i termini della successione che sono stati costruiti a partire da questo.

- Costruzione della successione dei numeri pari. Per quest'attività è sufficiente una calcolatrice anche non evoluta, ma per le successive è opportuno operare con calcolatrici dei tipi più evoluti o con un foglio elettronico.

2

+2 = risultato 4

+2 = risultato 6

+2 = risultato 8 ecc.

Per consolidare l'operatività con le successioni ricorsive possono essere proposte anche altre attività analoghe come la costruzione della successione dei numeri dispari, la successione delle potenze di 5, una progressione geometrica di termine iniziale 1000 e ragione 1.04 (calcolo dell'interesse composto) ecc., eventualmente ponendo anche alcune domande accessorie come: “Dopo quanti anni un capitale è raddoppiato in regime di capitalizzazione composta all'interesse del 5 % ?”

- Costruzione della successione “delle radici quadrate” ovvero, $a_n := \sqrt{a_{n-1}}$ con il valore iniziale, ad esempio, di 10.

E' interessante osservare che, iterando questa successione un numero sufficiente di volte, si ottiene il valore costante 1. Gli studenti, grazie alle precedenti attività, dovrebbero essere in grado da soli di giustificare questo comportamento e di riconoscere se è corretto o meno.

- Costruzione della successione $a_n = a_{n-1} * 2 + 3$ con il valore iniziale $a_0 = 5$.

Nelle immagini riportate nelle figure qui di seguito appaiono i risultati ottenuti con due calcolatrici di diverso livello e con un foglio elettronico; a parte l'aspetto generale, si nota che i tre strumenti sono sostanzialmente equivalenti.

	A	B
1	5	Val. iniziale
2	13	+a1*2+3
3	29	
4	61	
5	125	

			A	B
		7	509	Val. iniziale
		8	1023	+a1*2+3
		9	2049	
			61	
			125	
Figura 5	Figura 6	6	253	Figura 7

- Determinazione del valore iniziale che costituisce una sorta di “punto fisso”, cioè di un valore che genera una successione costante.
Questo è un problema di facilissima risoluzione: gli studenti da soli possono scoprire che si tratta di $a_0 = -3$, soluzione dell’equazione $2x + 3 = x$. (vedi Figura 8)

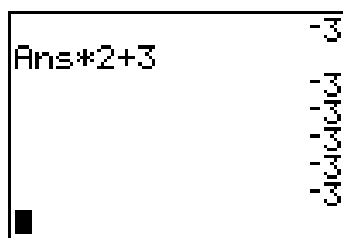


Figura 8

- Le precedenti attività (costruzione della successione e individuazione del valore iniziale che genera una successione costante) possono essere ripetute con le seguenti successioni:

$$a_n = a_{n-1} * 5 - 2 ; \quad a_n = a_{n-1} * 3 - 12.$$

E’ opportuno invitare gli studenti a costruire altre successioni analoghe individuando per ciascuna il relativo “punto fisso”.

Nella Figura 9 appaiono i primi 15 termini delle due successioni; il calcolo è stato eseguito con un foglio elettronico ma, come si è visto, anche una calcolatrice evoluta si comporta allo stesso modo.

	A	B
1	0.5000000000000000	6
2	0.5000000000000000	6
3	0.5000000000000000	6
4	0.5000000000000000	6
5	0.5000000000000000	6
6	0.5000000000000000	6
7	0.5000000000000000	6
8	0.5000000000000000	6
9	0.5000000000000000	6
10	0.5000000000000000	6
11	0.5000000000000000	6
12	0.5000000000000000	6
13	0.5000000000000000	6
14	0.5000000000000000	6
15	0.5000000000000000	6

Figura 9

- Quando si opera in “laboratorio” è opportuno che le “scoperte” siano fatte direttamente dagli studenti. Se per caso ciò non avviene potrà essere l’insegnante a suggerire qualche esempio

adatto. Nella seguente tabella appaiono alcune successioni particolarmente adatte alla “scoperta” che c’interessa:

$$a_n = a_{n-1} * 15 - 2 ; \quad a_n = a_{n-1} * 7 - 4 ; \quad a_n = a_{n-1} * 4 - 1$$

con i valori iniziali, rispettivamente, 1/7, 2/3 e 1/3.

	A	B	C
1	0.142857142857	0.666666666667	0.3333333333333333
2	0.142857142857	0.666666666667	0.3333333333333333
3	0.142857142857	0.666666666667	0.3333333333333333
4	0.142857142857	0.666666666667	0.3333333333333332
5	0.142857142857	0.666666666667	0.3333333333333329
6	0.142857142854	0.666666666672	0.3333333333333314
7	0.142857142809	0.666666666701	0.3333333333333258
8	0.142857142135	0.6666666666910	0.3333333333333030
9	0.142857132018	0.666666668373	0.3333333333332121
10	0.142856980264	0.666666678614	0.3333333333328483
11	0.142854703960	0.666666750296	0.3333333333313931
12	0.142820559398	0.666667252073	0.333333333255723
13	0.142308390965	0.666670764511	0.333333333022892
14	0.134625864475	0.666695351576	0.333333332091570
15	0.019387967125	0.666867461032	0.333333328366280
16	-1.709180493118	0.668072227226	0.333333313465118
17	-27.637707396772	0.676505590585	0.333333253860474
18	-416.565610951584	0.735539134096	0.333333015441895
19	-6250.484164273760	1.148773938670	0.333332061767578
20	-93759.262464106300	4.041417570691	0.333328247070312
21	-1406390.936961600000	24.289922994835	0.333312988281250
22	-21095866.054423900000	166.029460963844	0.333251953125000

Figura 10

In cosa consiste in questo caso la “scoperta”? Che, pur trattandosi di successioni che dovrebbero essere a valori costanti, si rivelano tutt’altro che costanti. Dopo un certo numero di termini nei quali il comportamento è quello atteso, i valori vanno via via modificandosi fino ad ottenere addirittura successioni che rapidamente divergono.

La cosa è particolarmente vistosa con una calcolatrice che calcola i termini della successione ad ogni pressione del tasto ENTER: l’ultima cifra visualizzata comincia presto a modificarsi, poi l’errore erode anche la penultima, poi contagia la terzultima e così via con una specie di spettacolare reazione a catena.

Talvolta i valori ottenuti sono diversi in relazione alla rappresentazione interna dei numeri nei diversi strumenti di calcolo, ma in questa attività è sufficiente che il comportamento di massima sia lo stesso.

Si potrebbe indagare sul fatto che solo in alcuni casi si ottiene una successione che dovrebbe essere costante ma non lo è; potrebbe essere interessante studiare il motivo profondo di tale comportamento; ciò coinvolge la rappresentazione interna dei numeri nei calcolatori o nelle calcolatrici e un approfondimento in questa direzione appare eccessivo per il livello scolastico (primo biennio) al quale si rivolge questa attività. Al momento ci si può accontentare di dare la seguente motivazione: i numeri molto spesso non possono essere memorizzati con il loro valore esatto ma in modo approssimato (ad esempio un numero razionale periodico come $1/3 = 0.3333\dots$ necessariamente avrà un numero finito di cifre decimali) e questo induce un errore

che, a causa dell'algorithmo iterativo, aumenta di entità fino a dare risultati molto diversi da quelli di partenza.

La cosa importante è riuscire a trasmettere agli studenti il messaggio che è bene non essere troppo fiduciosi sui risultati di un computer o di una calcolatrice e che i risultati possono essere affetti da errori non dovuti a guasti o “distrazioni della macchina” ma al modo stesso in cui i numeri sono memorizzati e trattati dallo strumento di calcolo.

L'algebra si sposa con la geometria

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolare somma, prodotto, quadrato di polinomi.	I polinomi e le loro operazioni (addizione e moltiplicazione). Polinomi in una indeterminata.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure	Storia

Contesto

Configurazioni geometriche.

Si vuole proporre un metodo grafico per la risoluzione di particolari equazioni. L'obiettivo è quello di spostare l'attenzione dal mero calcolo risolutivo al significato dell'equazione e alle relazioni che intercorrono tra i coefficienti dei suoi termini.

L'attività può essere proposta quale fase conclusiva delle attività sulle abilità di calcolo esercitate nei vari insiemi numerici e di quelle sulle equivalenze tra figure, coniugando i due aspetti attraverso la ricerca e la visualizzazione delle soluzioni intere positive di un'equazione.

Descrizione dell'attività

Il più grande dei matematici greci classici è stato Eudosso (408 a.C – 355 a.C.), secondo soltanto ad Archimede: il suo primo grande contributo alla matematica fu una nuova teoria delle proporzioni.

I nuovi rapporti incommensurabili, scoperti dai Greci, furono considerati anch'essi come numeri. Essi comparivano nei ragionamenti geometrici, mentre i numeri interi e i rapporti di numeri interi comparivano sia in geometria sia nello studio generale delle grandezze.

La teoria di Eudosso ebbe numerose conseguenze: da un lato favorì una netta separazione tra il numero e la geometria, dall'altro spinse i matematici greci verso la geometria. Come risolvevano i Greci il problema della necessità dei numeri nel lavoro scientifico, nel commercio e nelle altre attività pratiche? Certo è che la rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali e delle operazioni con essi non è, anche oggi, molto pratica. Può darsi che sia logicamente soddisfacente pensare a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ come all'area di un rettangolo, ma se si avesse bisogno di conoscere questo prodotto per comprare della "moquette", difficilmente si riuscirebbe a calcolarlo.

Nel periodo classico, le persone colte non si lasciavano coinvolgere in problemi pratici; si poteva pensare a tutti i rettangoli della geometria senza preoccuparsi minimamente della dimensione effettiva di alcun rettangolo. Il pensiero matematico fu in tal modo separato dai bisogni reali e i matematici non sentirono alcun bisogno di migliorare le tecniche aritmetiche e algebriche.

Nel periodo alessandrino (dal 300 a.C. fino al 600 d.C. circa) furono abbattute le barriere fra classi colte e schiavi e gli uomini colti cominciarono ad interessarsi degli affari pratici: anche la geometria divenne quantitativa. In altre parole, la matematica utilizzata nella vita quotidiana era una matematica fatta con i numeri interi e con frazioni di termini interi (cioè frazioni in cui numeratore e denominatore sono numeri interi).

Con la presente attività, a partire da semplici equazioni, traducendo in oggetti geometrici i suoi termini e procedendo con il metodo delle deduzioni locali, si vuole proporre un'ampia riflessione tra le equazioni e le loro soluzioni ricercate in insiemi numerici in cui non siano sempre possibili le operazioni fondamentali.

Si prenda in considerazione l'equazione di primo grado del tipo $c \cdot x = a \cdot b$. Si può pensare in questo modo: c per x è l'area di un rettangolo di base c e altezza x , allo stesso modo a per b è l'area di un rettangolo di base a e altezza b ; il segno di uguaglianza sta ad indicare che le due figure sono equivalenti. È bene riferirsi ad un esempio numerico del tipo:

$$2x = 3 \cdot 4 \quad (1)$$

L'equazione ci fornisce l'area di un rettangolo di base 4 e altezza 3. Si vuole sapere quanto vale la base di un rettangolo ad esso equivalente e avente l'altezza pari a 2.

La costruzione geometrica favorisce l'intuizione

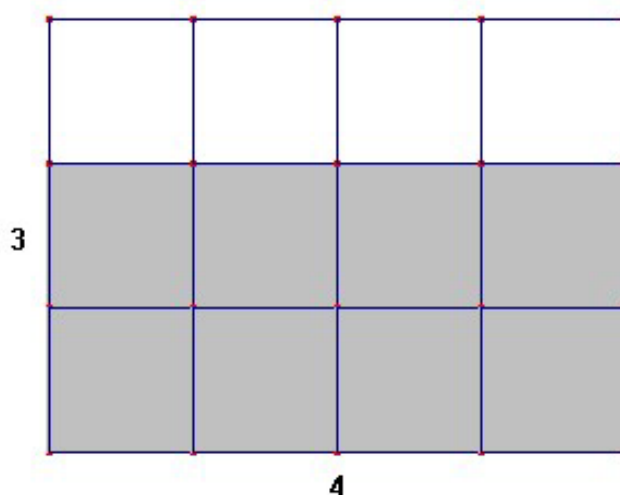


Figura 1

Si provi ora a costruire un rettangolo equivalente (significa usare lo stesso numero di quadrati) e con altezza pari a 2 (disponendoli in fila per due).

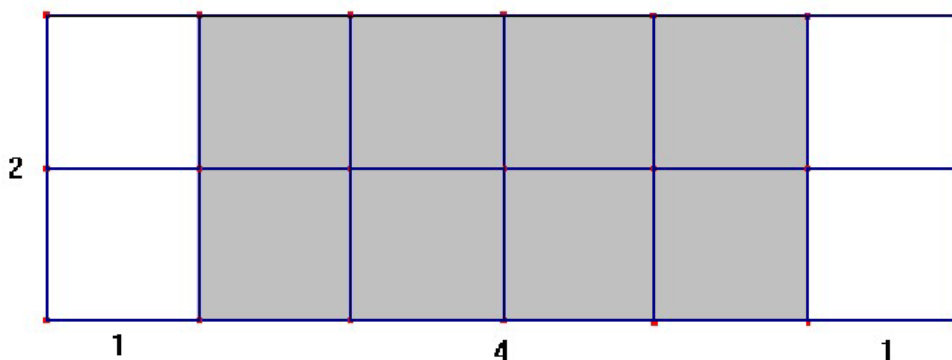


Figura 2

Dalla Figura 2 è facile intuire che la soluzione è 6.

Ha senso, a questo punto, a titolo di esercizio, applicare lo stesso metodo per l'equazione $2x = 3 \cdot 5$. Una costruzione analoga alla precedente non è, in questo caso, possibile. Si apre allora la discussione: le due equazioni, dal punto di vista formale, sono identiche, si diversificano però dalla relazione tra i coefficienti; nel primo esempio c è sottomultiplo di b , nel secondo il coefficiente c è primo con gli altri due. Si può concludere che un'equazione del tipo (1) ha soluzioni intere solo se $a \cdot b$ è multiplo di c .

E allora come ci si comporta nel caso in cui $a \cdot b$ e c sono primi tra loro?

Sicuramente non si possono avere soluzioni intere. Ha senso, tuttavia, porsi il problema di risolvere in generale un'equazione del tipo $c \cdot x = a \cdot b$

Si consideri la Figura 3.

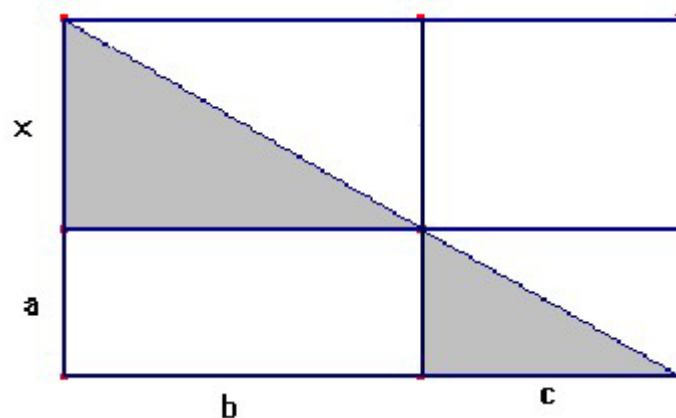


Figura 3

Dalla relazione di similitudine fra i triangoli rettangoli di cateti a , c e x , b consegue che $a:c=x:b$; essa rappresenta l'equazione assegnata (prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi), da cui si ricava $x = \frac{ab}{c}$. Mettendo a confronto i risultati dei due esempi, si può pensare che il secondo metodo sia quello più completo. Infatti se ab è multiplo di c , x è intero, diversamente x è razionale. Questo significa che nella generalizzazione del problema, si può discutere sull'importanza del concetto di gruppo per l'insieme \mathbf{Q} dei numeri razionali rispetto alla divisione e sulla relazione di inclusione tra l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali e l'insieme \mathbf{Q} .

Si passa ora alla ricerca delle soluzioni intere positive della seguente equazione di secondo grado ad una incognita ed a coefficienti interi:

$$x^2 + 10x = 39 \quad (2)$$

Si procede per via geometrica.

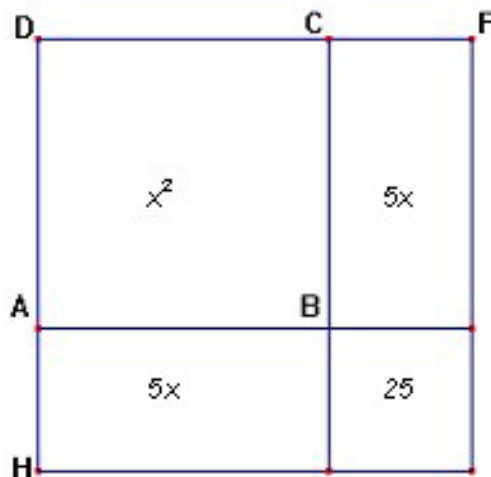


Figura 4

Sia la misura del segmento \overline{AB} il valore dell'incognita x e si costruisca su esso il quadrato $ABCD$. Si prolunghino DA e DC di 5 tali che siano $\overline{AH} = 5$ e $\overline{CF} = 5$. Costruendo il quadrato di lato DH si ottiene un quadrato la cui area è data dalla seguente relazione

$$x^2 + 10x + 25 .$$

Dal confronto con la (2) si ottiene:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$(x + 5)^2 = 8^2$$

due potenze che hanno lo stesso esponente sono uguali se e solo se sono uguali le basi. Si ha, dunque, che DH , lato del quadrato considerato nella Figura 4, misura 8 e x misura 3.

Ma le soluzioni non sono due?

Risolvendo algebricamente l'equazione, le soluzioni sono 3 e -13 , ma, avendo limitato la ricerca alle soluzioni appartenenti all'insieme numerico \mathbb{N} , si deve accettare 3 e non -13 .

In questi casi il metodo geometrico è efficace, in quanto a priori seleziona l'insieme numerico in cui si cerca la soluzione.

Questo metodo, proposto da Erone, va sotto il nome di metodo del completamento del quadrato; in effetti, si tratta di sommare ad ambo i membri quel numero, 25 nell'esempio, che consente di completare il quadrato a primo membro e di estrarre poi la radice quadrata. Se il radicando è un quadrato perfetto, si hanno soluzioni intere positive, diversamente no.

C'è da fare ancora un'osservazione: possiamo applicare sempre questo metodo?

La risposta è chiaramente negativa.

È sempre possibile risolvere l'equazione algebricamente, ma non sempre si può utilizzare il metodo geometrico.

Elementi di prove di verifica

1. Si inventi un quesito di geometria che abbia come soluzione la seguente equazione $3x = 6 \cdot 5$ e la si risolva in \mathbb{N} .
2. Data la seguente equazione $6x = 2 \cdot 5$ è possibile stabilire, senza svolgere esplicitamente i calcoli, se la soluzione è intera o no? Giustificare la risposta.
3. È possibile applicare il metodo del completamento del quadrato alla seguente equazione $x^2 + x = 20$? Le soluzioni sono numeri interi o no? Giustificare le risposte.

Dentro o fuori il triangolo?

Livello scolastico: 1° biennio.

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	I polinomi e le loro operazioni.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	

Contesto

Geometria analitica.

L'uso del computer è sempre più facilitato da interfacce grafiche che aiutano l'utente nello svolgimento delle attività. Tali interfacce, se da una parte facilitano l'utente, dall'altra rischiano di renderlo inconsapevole delle problematiche, non solo tecniche, che stanno alla base delle attività. Si può discutere se questo sia un bene o un male; certamente può essere un elemento utile - anche per attirare l'attenzione e l'interesse degli allievi - a poter rivisitare argomenti della didattica tradizionale della matematica alla luce delle implicazioni che possono avere con le nuove tecnologie. Un esempio può essere lo studio del piano cartesiano con riferimento alla grafica del computer. Nell'attività presentata si propone lo studio delle disequazioni sul piano cartesiano come strumento per distinguere sullo schermo del computer, con un opportuno algoritmo, i punti interni da quelli esterni di un triangolo.

Descrizione dell'attività

Lo scopo dell'attività è la definizione di un algoritmo, e la relativa codifica in un linguaggio di programmazione, che riconosca quando un punto è interno, esterno o sul bordo di un triangolo. Il punto ed i vertici del triangolo sono dati attraverso le loro coordinate cartesiane. L'unità inizia mostrando come si possa riconoscere il semipiano d'appartenenza del punto rispetto alla retta determinata passante per due punti dati. Si discute poi come stabilire con una formula, che è una forma d'algoritmo, quando due punti appartengono allo stesso semipiano. La formula è la base dell'algoritmo che caratterizza i punti del piano rispetto ad un dato triangolo. L'unità si conclude con un gioco grafico: dato un triangolo si simula una passeggiata casuale all'interno del triangolo controllando che il punto in movimento, all'inizio coincidente con il baricentro, rimanga dentro.

Dentro o fuori il triangolo: che domanda è?

Preso un foglio di carta, disegnare un triangolo, segnare un punto e chiedere se è dentro o fuori il triangolo: questa sembra proprio la classica domanda che toglie agli alunni ogni dubbio sulla salute mentale del proprio insegnante. Eppure la domanda può avere un qualche interesse, anche per gli alunni più smaliziati. Il triangolo è dato sul piano cartesiano come terna di punti (i suoi tre vertici); ci si chiede come si colloca un punto, note le sue coordinate, rispetto al triangolo.

Si può anche dare al problema una veste più accattivante: "In un parco a forma di triangolo (Yellowstone) è stato introdotto un nuovo animale (Jogi), dotato di collare con radiocomando, che deve essere tenuto sotto controllo: quando Jogi è all'interno del parco (dentro il triangolo) va tutto bene, quando invece si avvicina al bordo in centrale si accende un lampeggiante giallo di avvertimento. Infine se Jogi esce dal parco scatta l'allarme".

Per far funzionare il sistema di controllo occorre un algoritmo che, a partire dalle coordinate dei tre vertici di un triangolo, calcoli quando un punto è interno, esterno o sul bordo dello stesso.

Segno di un punto rispetto ad una retta.

Una retta divide il piano in tre insiemi di punti: due semipiani (senza bordo) e la retta stessa. Dal punto di vista algebrico, i punti del piano cartesiano sono divisi nei tre insiemi per i quali il polinomio $P(x, y) = ax + by + c$ produce rispettivamente un valore positivo, negativo o nullo.

Dati due punti $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, l'equazione canonica (o implicita) della retta passante per i due punti è: $x(y_0 - y_1) - y(x_0 - x_1) + x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0$. Il polinomio, primo membro dell'equazione, si annulla sulla retta mentre darà valori positivi su un semipiano e negativi sull'altro.

Osservazione: nell'indicare i punti sul piano cartesiano si userà l'abituale notazione delle lettere latine maiuscole, come si è fatto nel precedente capoverso. Nei programmi invece le variabili, comprese quelle che indicano coppie di coordinate e quindi punti nel piano cartesiano, sono indicate per consuetudine con lettere minuscole. Nel seguito per i punti sarà usata indifferentemente l'una o l'altra notazione quando, in base al contesto, non ci sia ambiguità.

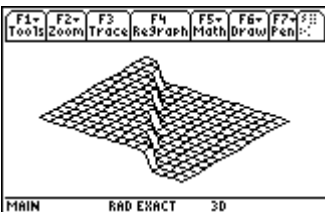
```

segno(a, b, p)
Func
Local c, t
10  $t = (-6) \rightarrow t$ 
p[1] * (a[2] - b[2]) - p[2] * (a[1] - b[1]) +
a[1] * b[2] - a[2] * b[1] \rightarrow c
If abs(c) < t Then
    Return 0
Else
    If c > 0 Then
        Return 1
    Else
        Return -1
    EndIf
EndIf
EndFunc
    
```

Possiamo definire una funzione usando l'equazione sopra descritta. Nella Figura 1 la funzione è descritta nel linguaggio di una calcolatrice grafica programmabile.

La funzione $segno(a, b, p)$ restituisce il valore 0 se il punto p è allineato con i punti a e b , mentre darà 1 se p appartiene ad un semipiano o -1 se appartiene a quello opposto. Si può anche osservare che il segno determina l'ordine della sequenza dei tre punti: se i punti si succedono (nel perimetro del triangolo di cui sono vertici) in verso antiorario allora la funzione $segno$ produce 1, altrimenti (verso orario) -1 . Se il triangolo è degenere il risultato è 0.

Figura 1



La Figura 2 mostra il grafico in 3 dimensioni della funzione $z1(x, y) = segno(a, b, \{x, y\})$, con a e b due punti fissati nel piano cartesiano. Nella figura si osserva che il piano è diviso in due semipiani: il primo a quota 1 e l'altro a -1 . Le coordinate del punto generico (x, y) sono introdotte nella funzione $segno$ come lista e, quindi nella calcolatrice, sono racchiuse in parentesi graffe.

Figura 2

Data la retta AB , due punti P e Q (non allineati con A, B) appartengono allo stesso semipiano se la funzione $segno$ produce lo stesso valore. Per stabilire se i due punti sono nello stesso semipiano basta studiare il prodotto delle funzioni $segno(a, b, p) \times segno(a, b, q)$.

Dentro o fuori del triangolo?

La funzione $test(a, b, c, p)$ controlla se un punto p è esterno, sul bordo o interno al triangolo di vertici a, b e c . Si descrive dapprima l'algoritmo della funzione con un diagramma di flusso.

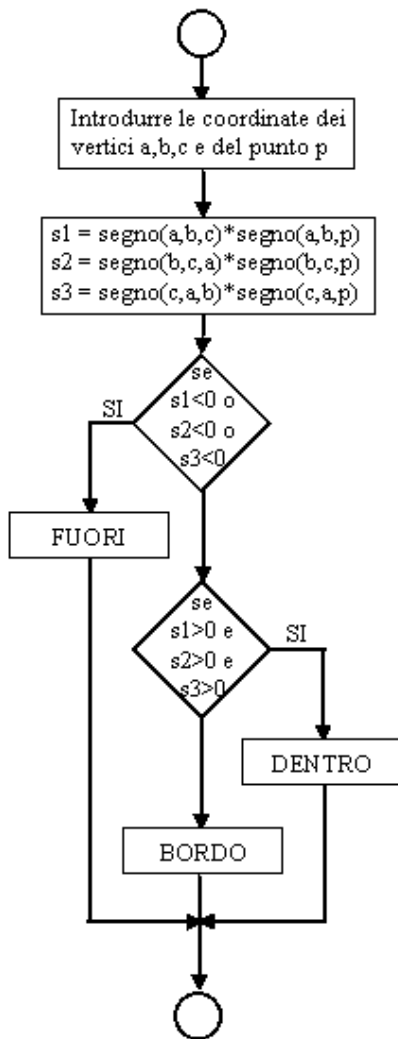


Figura 3

La funzione *test* riceve come argomenti le coordinate dei vertici *a*, *b*, *c* del triangolo e quelle del punto *p* da controllare.

Con la funzione *segno*, definita in precedenza, si verifica se il punto *p* appartiene in ogni caso allo stesso semipiano che contiene il terzo vertice rispetto alla retta che passa per gli altri due: il prodotto è positivo quando *p* e il terzo vertice appartengono allo stesso semipiano. Le variabili *s1*, *s2*, *s3* contengono la posizione di *p* rispetto ai tre lati.

Se il valore delle variabili di controllo è in almeno un caso negativo, il punto *p* è esterno al triangolo.

Se i valori di controllo sono tutti positivi, il punto è interno al triangolo.

Infine, quando nessun valore è negativo, ma in qualche caso è nullo, il punto si trova sul bordo del triangolo.

Figura 3

Si passa ora alla stesura dell'algorithm, sotto forma di funzione, nel linguaggio di una calcolatrice grafica programmabile.

```

test (a, b, c, p)
Func
Local c, s1, s2, s3
If segno(a, b, c)=0 Then
  Return "Triangolo degenere"
Else
  segno(a, b, c)*segno(a, b, p)→s1
  segno(b, c, a)*segno(b, c, p)→s2
  segno(c, a, b)*segno(c, a, p)→s3
  If s1<0 or s2<0 or s3<0 Then
    Return "FUORI"
  Else
    If s1=0 or s2=0 or s3=0 Then
      Return "BORDO"
    Else
      Return "DENTRO"
    EndIf
  EndIf
EndFunc

```

La funzione inizia controllando se i tre punti sono allineati: in tal caso dichiara *degenere* il triangolo.

Per un triangolo non degenere, il programma corrisponde esattamente al diagramma di flusso della Figura 3: i prodotti delle funzioni *segno*, registrati nelle variabili di controllo *s1*, *s2* e *s3*, sono poi usati per stabilire la posizione del punto *p* rispetto al triangolo di vertici *a*, *b* e *c*. Il risultato è riportato sotto forma di *stringa*.

Figura 4

Si può dare il risultato della funzione *test* in forma grafica. Il programma *tri(a,b,c,p)* disegna il triangolo di vertici *a*, *b* e *c* e disegna il punto *p*. Poi riporta nella parte inferiore dello schermo la posizione del punto *p* rispetto al triangolo.

```

tri(a, b, c, p)
Prgm
setGraph("Axes", "Off")
C1rGraph: C1rDraw
76→ymax: 8→ymin
158→xmax: 8→xmin
1→yscl: 1→xscl

@Triangolo
PxlLine a[2], a[1], b[2], b[1], 1
PxlLine b[2], b[1], c[2], c[1], 1
PxlLine c[2], c[1], a[2], a[1], 1
@Punto
PxlLine p[2]-1, p[1], p[2]+1, p[1], -1
PxlLine p[2], p[1]-1, p[2], p[1]+1, -1

PxlText test(a, b, c, p), ymax-28, xmax-58

Pause
setGraph("Axes", "On")
DispHome
EndPrgm
    
```

La prima parte del programma *tri* predispose la finestra grafica ed imposta le dimensioni dello schermo.

Lo schermo è visto come ‘matrice’ di punti individuati da coppie di numeri interi (riga,colonna), con coordinate ‘scambiate’ rispetto all’ordinaria disposizione nel piano cartesiano di ascissa e ordinata.

Gli argomenti del programma sono dati come coordinate nell’ordine usuale. L’istruzione grafica nella Figura 5 (*PxlLine r0,c0,r1,c1,-1*) disegna il segmento delimitato dai punti (riga0,colonna0) e (riga1, colonna1) invertendo il ‘colore’ dei punti dello schermo.

Il punto da testare rispetto al triangolo è disegnato, per renderlo più evidente, come crocetta centrata nelle coordinate del punto.

La risposta del test è scritta in basso sulla destra dello schermo.

Figura 5

Ecco due esempi di esecuzione del programma:

tri({5,5},{140,30},{85,70},{100,50})

tri({5,5},{140,30},{85,70},{40,50})

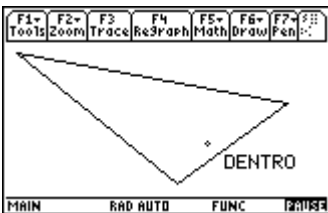


Figura 6

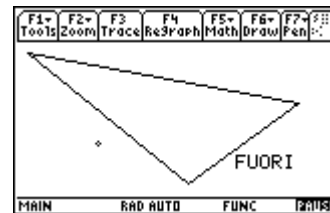


Figura 7

Jogi nel parco di Yellowstone.

La funzione *test2*, è la funzione *test* modificata in modo che restituisca un numero in base alla posizione del punto rispetto al triangolo: 1 se il punto è interno, 0 se è sul bordo oppure -1 se è esterno. Nel programma che segue la funzione *test2* è usata per un gioco grafico che offre l’occasione di qualche riflessione sulla programmazione.

Si immagina che il triangolo sia il recinto del parco di Yellowstone nel quale è rinchiuso l’orso Jogi. Jogi passeggia nel recinto, ma non può uscire. Il programma *jogi* simula la passeggiata dell’orso, che si muove a caso all’interno del recinto.

```

jogi(a,b,c)
Prgm
Local x,y,p1,p2,k,l
setGraph("Axes","Off")
ClrGraph:ClrDraw
76→ymax:0→ymin
158→xmax:0→xmin
1→yscl:1→xsc1
@Triangolo (recinto)
Px1Line a[2],a[1],b[2],b[1],1
Px1Line b[2],b[1],c[2],c[1],1
Px1Line c[2],c[1],a[2],a[1],1
@Punto (jogi all'inizio)
int((a[1]+b[1]+c[1])/3+0.5)→x
int((a[2]+b[2]+c[2])/3+0.5)→y
Px1On y,x
Px1Line y-2,x,y+2,x,-1
Px1Line y,x-2,y,x+2,-1
1→p1:1→p2
0→k
While k=0
  rand(10)-1→l
  While l>0
    If test2(a,b,c,{x+p1,y+p2})=1 Then
      Px1On y,x
      Px1Line y-2,x,y+2,x,-1
      Px1Line y,x-2,y,x+2,-1
      x+p1→x:y+p2→y
      Px1Line y-2,x,y+2,x,-1
      Px1Line y,x-2,y,x+2,-1
    EndIf
    l-1→l
  EndWhile
  If rand(2)-1=0 Then
    -1*p1→p1
  Else
    -1*p2→p2
  EndIf
  getKey()→k
EndWhile
setGraph("Axes","On")
DispHome
EndPrgm

```

Il programma *jogi* ha come argomenti i tre vertici del triangolo.

Dopo aver disegnato, come nel programma *tri* descritto prima, i lati del triangolo, si pone nel baricentro del triangolo (calcolato come media dei vertici) la posizione iniziale dell'orso.

La direzione di marcia dell'orso è data dall'incremento delle coordinate, che può essere -1 o 1 e che è registrato nelle due variabili $p1$ e $p2$. All'inizio la direzione è fissata, successivamente varierà in modo casuale. La variabile k registra il codice del tasto premuto e rimane 0 finché non si tocca la tastiera: serve ad interrompere l'esecuzione del programma premendo un tasto qualsiasi della calcolatrice.

La variabile l indica il numero di passi dell'orso, data la direzione: il numero di passi è un numero a caso tra 0 e 9 .

Ad ogni passo, si controlla (funzione *test2*) se Jogi resta dentro al recinto: in questo caso si segna il punto in cui si trova, si cancella la 'crocetta' della posizione attuale, si fa il passo e si disegna la crocetta nella nuova posizione.

Finiti i passi nella direzione attuale, si calcola la nuova direzione: a questo scopo si inverte, dopo averlo scelto a caso, l'incremento in ascisse o in ordinate. In questo modo il cammino casuale dell'orso sarà sempre in direzione 'diagonale' rispetto allo schermo.

Figura 8

Le figure seguenti mostrano qualche percorso casuale, ma rigorosamente dentro al recinto, di Jogi.

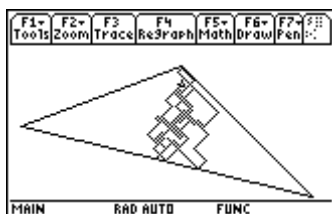


Figura 9

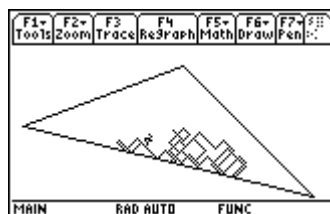


Figura 10

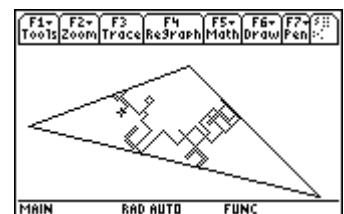


Figura 11

Possibili sviluppi

- Come si è detto, e come si vede nelle figure, il programma *jogi* fa muovere il punto in diagonale sullo schermo. Si può proporre di estendere il programma in modo che il punto si muova anche nelle direzioni nord-sud e est-ovest.
- Un secondo problema 'banale' se pensato *carta e penna*, ma più interessante se realizzato *al computer*, è il seguente: stabilire se due segmenti si intersecano o meno. I due segmenti sono

dati come coppie di punti (gli estremi) sul piano cartesiano. Una prima soluzione consiste nel calcolare l'intersezione delle rette sostegno e nel verificare se questa appartiene ad entrambi i segmenti. È questa la soluzione migliore, cioè quella che richiede meno calcoli? Una soluzione alternativa può essere trovata esprimendo i segmenti in forma parametrica: si ottiene un risultato migliore come complessità di calcolo?

- Un algoritmo è, in casi fortunati, esprimibile con una formula: un esercizio bello di geometria analitica può essere il calcolo della formula della simmetria assiale, rispetto ad una retta espressa nella forma $y = m x + q$. Indicati con $P(x_0, y_0)$ e $P'(x_1, y_1)$ i punti corrispondenti nella simmetria, le condizioni che danno le equazioni da porre a sistema sono che il punto medio di PP' appartenga alla retta e che la retta PP' sia perpendicolare a quella data. Avendo a disposizione un sistema di calcolo simbolico, la determinazione delle equazioni della simmetria assiale è a questo punto immediata. Con le formule ottenute, si possono poi dimostrare, per via algebrica, le ben note proprietà della composizione della simmetrie assiali.

Elementi di prove di verifica

Funzioni o programmi?

1. Qual è la differenza tra un algoritmo descritto da una funzione e quello descritto da un programma?

Se ... allora ... quando.

2. A cosa servono le strutture di controllo negli algoritmi? Quali sono quelle fondamentali?

Formule e algoritmi.

3. In quali condizioni un algoritmo può essere espresso da una formula?