La somma dei primi numeri naturali

Livello scolare: 2° biennio.

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Eseguire semplici fattorizzazioni di polinomi.	I polinomi e le loro operazioni.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Algoritmi numerici e calcolo algebrico.

Nell'ambito di questo contesto l'attività proposta favorisce la produzione di congetture e la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. Una particolare enfasi è data al principio d'induzione come strumento per dimostrare proprietà che riguardano i numeri naturali.
Quest'attività può essere introdotta, nella forma che qui è proposta, in una terza o in una quarta classe, quando gli alunni hanno già acquisito abilità nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni e di sistemi di equazioni lineari, nella risoluzione di problemi che richiedono la determinazione di leggi che regolano la generazione di alcuni dati numerici disponibili.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre, affrontare e approfondire nozioni come quelle di problema, di successione di numeri naturali, di serie numerica. Consente anche di comprendere e approfondire tecniche come quelle delle differenze finite per determinare leggi polinomiali, della risoluzione di sistemi lineari, dell'applicazione del principio di induzione come strumento per dimostrare proprietà nell'insieme dei numeri naturali. Consente, infine, di avviare una riflessione sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*. L'uso delle tecnologie informatiche, in particolare del foglio elettronico, è particolarmente indicato.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi di studenti, chiedendo loro di riferire sulla discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto tra le strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

<u>Prima fase</u>

L'insegnante propone la situazione–problema sotto riportata a gruppi formati da tre–quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).

Situazione – problema.

Situazione:

"Si consideri la somma dei primi due numeri naturali, poi la somma dei primi tre, poi quella dei primi quattro e così via …"

Problema:

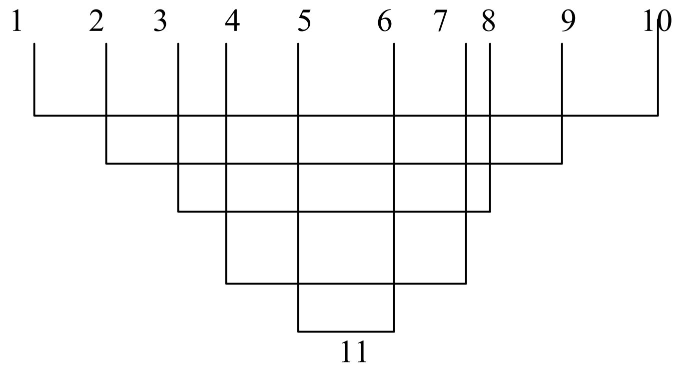
"Si determini una formula che esprima la relazione che lega la somma dei primi n numeri naturali al numero n di numeri naturali considerati."

L'insegnante può anche proporre, come suggerimento per quei gruppi di studenti che avessero difficoltà a capire che cosa s'intende per "somma dei primi n numeri naturali", la costruzione di una tabella del tipo:

n	Somma $S(n)$
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 2 + 3 = 6$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$…
5	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
…	…
n	…

Tabella 1

L'insegnante può ottenere preziose informazioni anche osservando il modo nel quale gli studenti organizzano i dati. In un problema come questo l'organizzazione dei dati può essere risolutiva. Per esempio, l'idea del piccolo Gauss[1] (che la soma dei termini della successione equidistanti dal termine mediano è costante) può essere favorita dalla seguente organizzazione dei dati:



Un'organizzazione dei dati di questo tipo suggerisce immediatamente la formula $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Talvolta gli studenti ritengono che questa formula valga solo nel caso in cui n sia un numero pari. In questo caso è opportuno che l'insegnante, con ragionamenti anche differenti, li aiuti a capire che la formula vale per ogni n (per esempio si può dire che se n é dispari, ci si può ricondurre al caso di n

[1] Si dice che Gauss determinò in poco tempo e in questo modo, durante le elementari, la somma dei primi 100 numeri naturali, rispondendo alla richiesta del suo maestro che lo voleva tenere impegnato per un po' di tempo per potersi dedicare anche agli altri bambini.

pari considerando che $S(n)$ può essere scritta come $\frac{(n-1)n}{2}+n$ e invitare gli studenti a semplificare tale somma: $\frac{(n-1)n}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$).
Altre volte alcuni gruppi di studenti trovano una formula corretta grazie ad attente osservazioni, senza però capire bene perché funzioni; inoltre, talvolta, questa formula è equivalente, ma non uguale, a quella costruita seguendo il ragionamento del piccolo Gauss. In questo caso è bene chiedere agli studenti di dimostrare l'equivalenza delle diverse formule trovate.
Un'organizzazione dei dati del tipo di quella della prima tabella proposta favorisce la definizione per ricorrenza della successione che esprime la somma dei primi n numeri naturali:

$$\begin{cases} S(2)=3 \\ S(n)=S(n-1)+n \end{cases}$$

La determinazione di una legge di questo tipo è sicuramente facilitata dal lavorare in un ambiente del tipo di quello dei fogli elettronici. In tal caso, infatti, è possibile (e naturale, per chi è abituato a utilizzare un foglio elettronico) organizzare il foglio come qui di seguito suggerito (nella prima colonna, ottenuta con la formula = A2 + 1, ci sono i primi 30 numeri naturali e nella seconda colonna, ottenuta con la formula = A3 + B2, a partire dalla terza cella, c'è la somma dei primi 2, primi 3, primi 4, fino alla somma dei primi 30 numeri naturali):

n	S(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136
17	153
18	171
19	190
20	210
21	231
22	253
23	276
24	300
25	325
26	351
27	378
28	406
29	435
30	465

Tabella 2

È anche possibile chiedere agli studenti, che hanno utilizzato una formula del tipo $\begin{cases} S(2)=3 \\ S(n)=S(n-1)+n \end{cases}$, di determinare programmi che calcolino sia iterativamente sia ricorsivamente i valori della successione $S(n)$.

Seconda fase

L'insegnante avvia una discussione matematica alla presenza dell'intera classe, invitando i rappresentanti di alcuni gruppi a presentare la propria strategia risolutiva.
Nel caso in cui non siano state presentate da alcun gruppo, l'insegnante può anche suggerire le seguenti due ulteriori strategie.
Approccio geometrico:

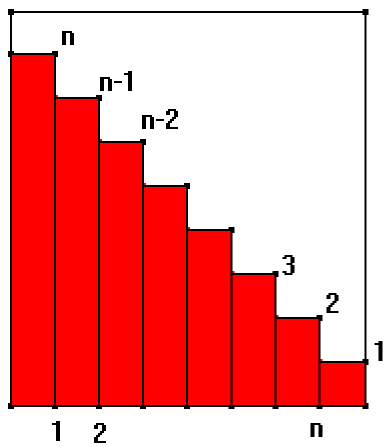


Figura 1

Organizzare i dati in questo modo consente di notare immediatamente, quasi senza bisogno di spiegare (almeno per alcuni studenti), che $1 + 2 + 3 + \ldots. + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ossia metà dell'area del quadrato di lato $n + 1$ rappresentato in Figura 1).

Approccio con le differenze finite:
La Tabella 2 costruita con un foglio elettronico e prima riportata può essere arricchita di importanti informazioni, fornite dalle colonne che riportano le differenze prime e seconde dei valori della successione $S(n)$:

N	S(n)	Diff. prime	Diff. seconde
1	1		
2	3	2	
3	6	3	1
4	10	4	1
5	15	5	1
6	21	6	1
7	28	7	1
8	36	8	1
9	45	9	1
10	55	10	1
11	66	11	1
12	78	12	1
13	91	13	1
14	105	14	1
15	120	15	1
16	136	16	1
17	153	17	1
18	171	18	1
19	190	19	1
20	210	20	1
21	231	21	1
22	253	22	1
23	276	23	1
24	300	24	1
25	325	25	1
26	351	26	1
27	378	27	1
28	406	28	1
29	435	29	1
30	465	30	1

Tabella 3

Poiché le differenze seconde sono costanti, allora $S(n)$ varia quadraticamente con n, ossia

$$S(n) = an^2 + bn + c$$

Si tratta di determinare a, b, c. Servono, quindi, tre condizioni, per esempio quelle date dalle prime tre righe della Tabella 3, che danno luogo al sistema lineare:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$$

Il sistema dà come soluzioni $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, in accordo con le altre soluzioni.

L'insegnante, dopo aver commentato le differenti strategie risolutive e dopo averne eventualmente suggerite altre, avendo cura di soffermarsi sui limiti e potenzialità di ciascuna (limiti e potenzialità che non valgono in assoluto, ma che in genere sono relative al risolutore), potrebbe passare a riflettere sulle diversità che caratterizzano i metodi di computazione per iterazione e per ricorsione[2].

[2] Vedere a questo proposito l'attività "Concentrazione di un farmaco nel sangue", presente nel nucleo Relazioni e funzioni.

Infine dovrebbe avviare una discussione–riflessione su cosa voglia dire giustificare la correttezza di un procedimento risolutivo in matematica: la discussione ha lo scopo di evidenziare l'importanza e la centralità in matematica della dimostrazione, che ha, fra le sue funzioni, certamente quella di esplicitare la relazione di conseguenza logica tra assiomi e teorema di una teoria. L'insegnante può far notare che nei procedimenti risolutivi presi in considerazione è ben chiara la tesi da dimostrare ($S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$), mentre è meno chiara qual è la teoria di riferimento, cioè quella nella quale avviene la dimostrazione (per esempio, quali sono gli assiomi da cui si parte e, addirittura, qual è il campo della matematica cui ci si riferisce, visto che si sono utilizzate anche conoscenze di geometria per risolvere un problema aritmetico).
Il tema è culturalmente ed epistemologicamente interessante (può essere fatto risalire al dibattito che fu particolarmente serrato agli inizi del Novecento tra dimostrazioni pure ed impure) e, secondo l'interesse e la partecipazione della classe, può essere approfondito, anche con il contributo di colleghi di altre discipline. Sicuramente, però, è l'occasione per una significativa e semplice applicazione del principio di induzione per dimostrare una proprietà dei numeri naturali.

Dimostrazione per induzione:
Base: $S(2) = 3$, infatti $1 + 2 = 3$
Passo induttivo:
Ipotesi: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ Tesi: $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Infatti: $S(n+1) = S(n) + n + 1$ (per definizione)

$S(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ (per Ipotesi)

Quindi: $S(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, che è la tesi

Allora, poiché vale la base e il passo induttivo, la proprietà vale per ogni $n > 1$ (ma anche per $n = 1$: basta porre per definizione $S(1) = 1$).

Possibili sviluppi
- Dimostrazioni, per induzione, di alcune proprietà che riguardano i numeri naturali.
- Riflessione sul significato di una teoria.
- Riflessione sul ruolo della dimostrazione nell'organizzazione, nella sistemazione e nella comunicazione delle conoscenze matematiche.

Elementi di prove di verifica

Congetture e dimostrazioni con i numeri naturali

1. Trova la somma dei primi 100 numeri dispari. Trova la somma dei primi n numeri dispari.

2. Trova la somma dei primi 100 numeri pari. Trova la somma dei primi n numeri pari.

3. Determina una formula che dia la somma dei primi n numeri naturali multipli di 3.

4. Determina una formula che dia la somma dei quadrati dei primi n numeri pari.

L'algoritmo per la divisione dei polinomi

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	La divisione dei polinomi.	<u>Numeri e algoritmi</u>	

Contesto
Calcolo algebrico.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del secondo biennio, quando gli alunni affrontano l'argomento della divisione dei polinomi.

Descrizione dell'attività
L'attività si propone di tradurre in un programma di calcolo l'algoritmo euclideo (delle sottrazioni successive) per la divisione dei polinomi. Tale algoritmo si basa sul seguente teorema:
"Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definiti su uno stesso campo numerico **F** (che solitamente è il campo **Q** dei numeri razionali o il campo **R** dei numeri reali), con $B(x) \neq 0$, esiste un'unica coppia di polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ (detti *quoziente* e *resto*, rispettivamente) tali che si abbia:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \qquad (1)$$

dove $R(x)$ ha grado minore del grado di $B(x)$."

Osservazione. Quando il grado di $A(x)$ è maggiore o uguale al grado di $B(x)$ il grado del quoziente $Q(x)$ è uguale alla *differenza* dei gradi di $A(x)$ e $B(x)$. Se il grado di $A(x)$ è minore del grado di $B(x)$, allora, banalmente, risulta $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$.

Si illustra innanzi tutto l'algoritmo con un esempio concreto che può essere il seguente. Si vuole eseguire la divisione con resto del polinomio:

$$A(x) = x^3 + 2x + 3$$

per il polinomio:

$$B(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Si esegue la divisione tra il termine di grado massimo di $A(x)$ e il termine di grado massimo di $B(x)$, chiamando $Q_1(x)$ il quoziente. Risulta:

$$Q_1(x) = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x\,.$$

Si calcola ora il primo resto parziale: si moltiplica $B(x)$ per $Q_1(x)$ e si sottrae il prodotto da $A(x)$; il polinomio ottenuto è il primo resto parziale $R_1(x)$. Nel caso in esame si ottiene:

$$A(x) - B(x) \cdot \frac{1}{2}x = x^3 + 2x + 3 - (2x^2 - 3x + 1) \cdot \frac{1}{2}x = x^3 + 2x + 3 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = R_1(x)$$

$R_1(x)$ non può essere il resto della divisione in quanto il suo grado *non* è minore del grado del polinomio divisore $B(x)$. Si possono, allora, ripetere, con le opportune modifiche, i passaggi precedenti. Si calcola il secondo quoziente parziale $Q_2(x)$, dividendo i termini di grado massimo di $R_1(x)$ e $B(x)$. Si ottiene:

$$Q_2(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2}{2x^2} = \frac{3}{4}\,.$$

Si determina poi il secondo resto parziale moltiplicando $B(x)$ per $Q_2(x)$ e sottraendo tale prodotto da $R_1(x)$. Si ottiene:

$$R_1(x) - B(x)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3 - (2x^2-3x+1)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}$$
$$= \frac{15}{4}x+\frac{9}{4} = R_2(x)$$

Ora il procedimento ha termine perché il grado di $R_2(x)$ è inferiore al grado di $B(x)$. Sommando membro a membro le due relazioni si ha:

$$A(x) - B(x)\cdot\frac{1}{2}x = R_1(x)$$
$$R_1(x) - B(x)\cdot\frac{3}{4} = R_2(x)$$

e semplificando, si ottiene:

$$A(x) - B(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right) = R_2(x) = \frac{15}{4}x+\frac{9}{4}.$$

È, pertanto, naturale assumere il polinomio $\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}$ come *resto* $R(x)$ e il polinomio $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$, somma dei quozienti parziali $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$, come *quoziente* $Q(x)$ della divisione di $A(x)$ per $B(x)$.

Di solito a questi calcoli si dà un assetto che ne facilita l'esecuzione. L'esempio che è stato appena svolto può essere, infatti, così esposto:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\ 0\cdot x^2 & +\ 2x & +\ 3 & 2x^2-3x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ \frac{3}{2}x^2 & -\ \frac{1}{2}x & & \frac{1}{2}x+\frac{3}{4} \\ \cline{1-4}
 & \frac{3}{2}x^2 & +\ \frac{3}{2}x & +3 & \\
 & -\frac{3}{2}x^2 & +\ \frac{9}{4}x & -\ \frac{3}{4} & \\ \cline{1-4}
 & & \frac{15}{4}x & +\ \frac{9}{4} &
\end{array}$$

Alcuni programmi di calcolo simbolico, come DERIVE e MAPLE, possiedono delle funzioni che forniscono immediatamente il quoziente e il resto della divisione tra polinomi. In particolare, nel caso di DERIVE, sono presenti le funzioni QUOTIENT e REMAINDER che, applicate all'esempio precedente, forniscono il seguente risultato

```
            3               2
#1:   QUOTIENT(x  + 2·x + 3, 2·x  - 3·x + 1)

                                                    x     3
#2:                                                ─── + ───
                                                    2     4

             3               2
#3:   REMAINDER(x  + 2·x + 3, 2·x  - 3·x + 1)

                                                  15·x    9
#4:                                               ──── + ───
                                                   4      4
```

Risulta, comunque, interessante utilizzare tale programma (che resta uno dei più utilizzati a livello didattico) per simulare il procedimento che si esegue manualmente. Definendo opportune funzioni e utilizzandole nei passaggi, diventa più facile capire l'algoritmo della divisione. Ripetendo con DERIVE il precedente esempio, si ottiene come primo resto:

#1: $A(x) := x^3 + 2\cdot x + 3$

#2: $B(x) := 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$

#3: $Q1(x) := \dfrac{x^3}{2\cdot x^2}$

#4: $\dfrac{x}{2}$

#5: $B(x)\cdot Q1(x)$

#6: $x^3 - \dfrac{3\cdot x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$

#7: $R1(x) := A(x) - B(x)\cdot Q1(x)$

#8: $\dfrac{3\cdot x^2}{2} + \dfrac{3\cdot x}{2} + 3$

e, iterando il procedimento, si ottiene, come previsto:

#9: $Q2(x) := \dfrac{\frac{3}{2}\cdot x^2}{2\cdot x^2}$

#10: $\dfrac{3}{4}$

#11: $B(x)\cdot Q2(x)$

#12: $\dfrac{3\cdot x^2}{2} - \dfrac{9\cdot x}{4} + \dfrac{3}{4}$

#13: $R2(x) := R1(x) - B(x)\cdot Q2(x)$

#14: $\dfrac{15\cdot x}{4} + \dfrac{9}{4}$

#15: $Q(x) := Q1(x) + Q2(x)$

#16: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$

Si vuole ora vedere come tradurre in un programma per una calcolatrice grafico-simbolica l'algoritmo precedentemente illustrato. Si comincia con l'osservare che un polinomio di grado n:

$$a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

è univocamente determinato dalla sequenza ordinata dei suoi $n + 1$ coefficienti. L'algoritmo per la divisione dei polinomi opera appunto su tali sequenze, che in gergo informatico sono dette *liste*. Occorre dunque munirsi innanzi tutto di una funzione che prenda in ingresso un dato polinomio e fornisca in uscita la relativa lista dei coefficienti: la funzione *pcoef* provvede a tale compito. Le figure seguenti mostrano come costruire tale funzione utilizzando una calcolatrice grafico-simbolica, predisposta a lavorare in modalità esatta, onde evitare che la funzione entri in un ciclo infinito. Come si può notare, è trattato a parte il caso in cui sia introdotto il polinomio nullo, per evitare un funzionamento scorretto della funzione.

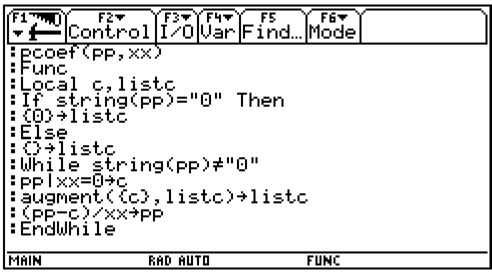


Figura 1

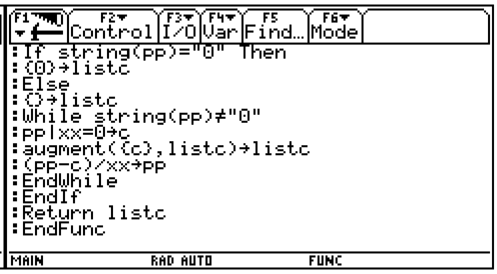


Figura 2

Dall'esame delle due figure si può osservare che i diversi coefficienti sono determinati uno alla volta partendo dal termine noto (che abbiamo precedentemente indicato con a_0). Infatti si comincia a porre uguale a zero il valore della variabile (che possiamo, per semplicità, indicare con x) e si determina in tal modo a_0. Poi si sottrae a_0 e si divide per x, ottenendo in tal modo un polinomio di grado $n - 1$. Nel polinomio così ottenuto si pone $x = 0$ e si determina a_1. Si procede, quindi, allo stesso modo fino ad aver determinato tutti i coefficienti.
Muniti della funzione *pcoef*, si può tradurre l'algoritmo cercato nella funzione *quores* che prende in ingresso i due polinomi *dividendo* e *divisore* e fornisce in uscita i due polinomi *quoziente* e *resto*. Il programma che realizza tale funzione è riportato nelle figure seguenti:

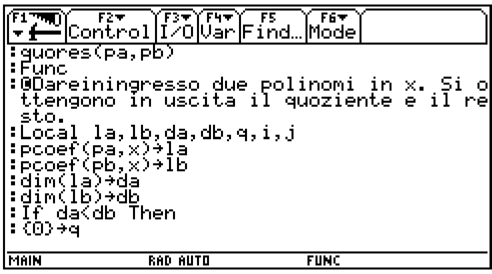


Figura 3

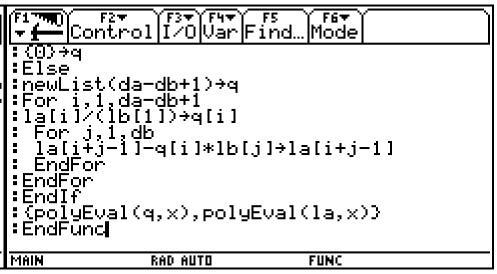


Figura 4

Come si può osservare i due cicli *For* innestati determinano sostanzialmente a ogni iterazione i quozienti e i resti parziali visti nel precedente esempio. Inoltre tale programma utilizza il comando *polyEval*, che interpreta gli n elementi di una lista come i coefficienti di un polinomio di grado $n - 1$. Nel caso dei polinomi precedentemente utilizzati si ottiene il seguente risultato:

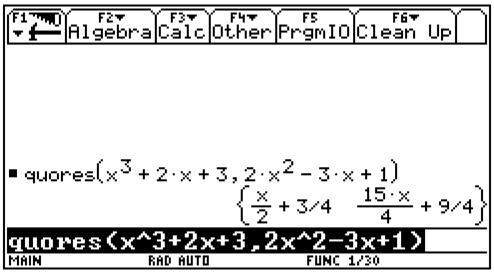


Figura 5

che, ovviamente, coincide con quanto ottenuto precedentemente.
Gli strumenti di calcolo simbolico producono il quoziente e il resto della divisione dei polinomi attraverso lo "sviluppo" della frazione polinomiale come somma di fratti semplici.

Ma dove si azzera?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scrivere un numero in notazione scientifica. Stimare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Equazioni polinomiali, numero delle soluzioni e loro approssimazioni.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	Informatica

Contesto
Risoluzione delle equazioni algebriche.

Nell'ambito del contesto indicato si utilizza il foglio elettronico evidenziandone l'utilità al fine di rendere veloci calcoli laboriosi e consentire tempo per la riflessione e il confronto tra i dati ottenuti. Quest'attività può essere introdotta in un secondo biennio, dopo che gli studenti hanno acquisito familiarità con le funzioni e la loro rappresentazione grafica, nonché con la ricerca degli zeri di una funzione in relazione alle soluzioni delle equazioni associate.

Descrizione dell'attività
Si sa che l'approccio ai numeri irrazionali nel primo biennio è essenzialmente rivolto alla conoscenza della radice quadrata, alla sua costruzione geometrica e rappresentazione sull'asse reale. Nel secondo biennio, a partire da queste conoscenze, si vuole generalizzare l'argomento utilizzando un metodo di per sé intuitivo, che si serve della conoscenza del grafico di funzioni elementari quali ad esempio la parabola, e, procedendo per induzione, favorisce la comprensione del comportamento delle radici di indice $n > 2$.

Prima fase
È dedicata a considerazioni di carattere preliminare che richiamano i concetti matematici portanti, utili poi per la costruzione dell'algoritmo.
Lo studente, che ha già acquisito familiarità con la rappresentazione grafica di una funzione matematica e con le relative equazioni, è portato a rivolgere la sua attenzione a funzioni del tipo:

$$y = x^2 - 4, \qquad y = x^2 - 9,$$

e più in generale a:

$$y = x^3 - 1, \qquad y = x^3 - 8, \qquad y = x^3 - 27,$$

per arrivare a:

$$y = x^n - r, \qquad r > 0\ [1],\ n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Potrà disegnarne il grafico, utilizzando intervalli opportunamente scelti nella parte positiva del dominio della funzione.

[1] La limitazione $r > 0$ è necessaria, perché, com'è noto, è possibile calcolare la radice di ordine pari solo nel caso in cui il numero di cui si cerca la radice è non negativo.

Si consideri per esempio la funzione $y = x^2 - 4$; si sa che rappresenta una parabola con la seguente caratteristica: il semiasse positivo dell'asse delle x taglia il grafico della funzione esattamente nel punto $P(2;0)$.
Si ricorda, però, che i valori che annullano la funzione $y = x^2 - 4$ sono $\pm\sqrt{4} = \pm 2$, ovvero gli zeri sono 2 e –2.
Analoghe considerazioni più generali possono essere fatte per le funzioni del tipo:

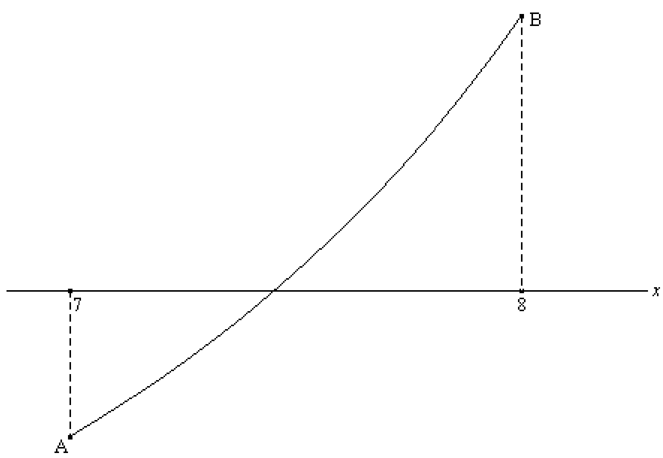
$$y = x^3 - r, \qquad y = x^4 - r, \qquad y = x^5 - r, \ldots, y = x^n - r$$

in cui la soluzione aritmetica è rispettivamente $\sqrt[3]{r}$, $\sqrt[4]{r}$, … , $\sqrt[n]{r}$.
Si può a questo punto capire per quale motivo si preferisca limitare la discussione solo alla parte positiva del dominio delle funzioni $y = x^n - r$:

- per n pari, la funzione è pari; infatti $f(-x) = f(x)$ e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y; in tal caso è sufficiente studiare la funzione per valori non negativi della x;
- per n dispari, $y = x^n - r$ assume valori sempre negativi per $x < 0$ e $r > 0$, pertanto non si annulla.

Per facilitare l'apprendimento delle questioni sopra esposte può essere utile l'uso di una calcolatrice grafico-simbolica o del programma Derive, che consentono di tracciare immediatamente il grafico di una funzione; in tal caso, facendo più tentativi relativi a funzioni di secondo grado e a quelle di terzo grado, è possibile cogliere l'andamento particolare riferito al primo quadrante all'aumentare dell'esponente, comunque sempre crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

<u>Seconda fase</u>
È dedicata alla descrizione del metodo di bisezione e alla scrittura dell'algoritmo.
Il problema della valutazione dello zero della funzione $y = x^n - r$ si pone quando r non è un quadrato perfetto (o un cubo perfetto, …).
Le considerazioni che seguono riguardano solo la funzione $y = x^2 - r$ con $r \in \mathbf{R}$, ma si può procedere analogamente per tutte le funzioni del tipo $y = x^n - r$ con $r \in \mathbf{R}$ e $n = 2, 3, \ldots$.
Si considera, a titolo di esempio, la funzione $y = x^2 - 56$. Trovare la soluzione positiva ossia lo zero della funzione $y = x^2 - 56$ relativo al semiasse positivo delle x, equivale a calcolare la $\sqrt{56}$, che è compresa tra 7 e 8. Si focalizza, allora, l'attenzione sul grafico nell'intervallo [7; 8], come indicato nella seguente figura.



L'intervallo considerato è piuttosto ampio e occorre restringerlo per fornire una migliore approssimazione. Si valuta l'ascissa del punto medio dell'intervallo [7; 8], che è precisamente $7{,}5$ e si calcola il valore della funzione $y = x^2 - 56$ nel punto di ascissa $7{,}5$. Si osserva che il segno di $f(7)$ è negativo. Se il segno di $f(7{,}5)$ è negativo, la funzione non si annulla nell'intervallo [7; 7,5], ma nell'intervallo [7,5; 8]. Nel caso specifico risulta $f(7{,}5) > 0$, per cui lo zero della funzione si trova nell'intervallo [7; 7,5], come mostrato nella Figura 2.

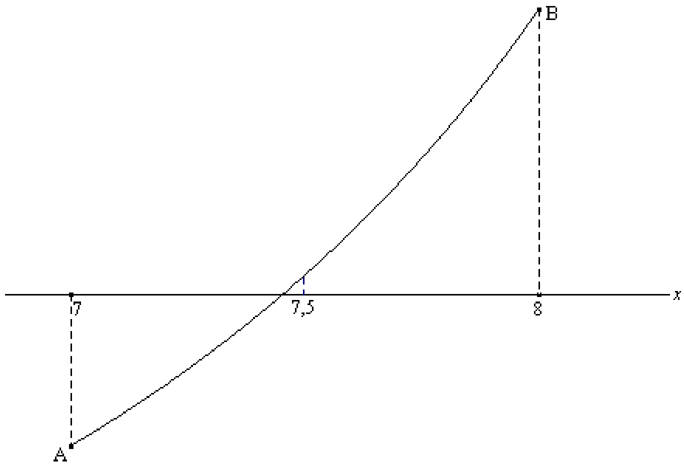


Figura 2

Una volta individuato l'intervallo "più stretto" in cui si è certi che la funzione si annulla, si calcola l'ascissa del suo punto medio, che nel caso considerato è $7{,}25$. Si valuta nuovamente la funzione in quel punto e, a seconda del segno di $f(7{,}25)$, si "restringe" nuovamente l'intervallo. Stabilito il nuovo intervallo, se ne calcola l'ascissa del punto medio, si trova il valore della funzione in quel punto e così via …

Ad ogni iterazione si approssima $\sqrt{56}$ al valore dell'ascissa del punto medio considerato.

Alla *n*-esima iterazione, il risultato appartiene ad un intervallo di ampiezza $\frac{b-a}{2^n}$ (dove *a* e *b* sono i valori degli estremi dell'intervallo relativi alla *n*-esima iterazione).

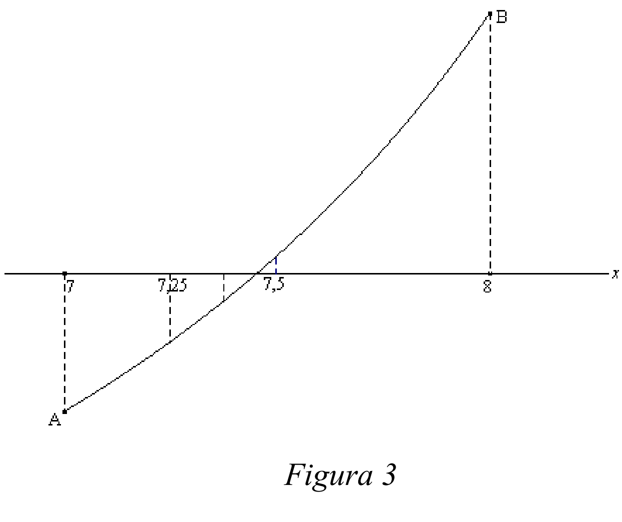


Figura 3

Terza fase

Ha senso, a questo punto, fornire anche un semplice esempio di processo di calcolo, come quello precedentemente illustrato, eseguito con il Programma Excel.
Il programma proposto mostra il calcolo della radice di un numero attraverso successive iterazioni, utilizzando il metodo di bisezione.

Esempio:
Utilizzo del foglio elettronico per risolvere l'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ con il metodo di bisezione.
Si ricorda, in primo luogo, che il metodo di bisezione consente di risolvere equazioni della forma $f(x) = 0$ e che, per poterlo applicare, bisogna conoscere un intervallo $[a, b]$ in modo tale che la $f(x)$ assuma, negli estremi a e b, valori di segno opposto: questo garantisce che nell'intervallo è contenuta almeno una radice.
Nel caso in esame un intervallo opportuno è [1, 2] in quanto:
$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$
$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$
Si organizza il foglio elettronico in 5 colonne: la colonna *A* contiene l'indice n degli elementi a_n e b_n delle successioni delle approssimazioni della soluzione; tali elementi, a loro volta, sono contenuti nelle colonne *B* e *C*. In particolare, si pongono nella colonna *B* le approssimazioni a_n tali che $f(a_n) < 0$ e nella colonna *C* le approssimazioni b_n tali che $f(b_n) > 0$.
Si osserva, inoltre, che ai fini dell'applicazione del metodo non ha alcuna importanza sapere se risulta $a_n < b_n$ oppure $a_n > b_n$.
Nella colonna *D* compare il valore m del punto medio dell'intervallo (a_n, b_n) e nella colonna *E* il valore di $f(m)$. Nella colonna *G*, infine, sono posti i valori delle approssimazioni iniziali a_0, b_0.
Per realizzare la tabella sopra descritta occorre procedere per passi:

- Aprire un foglio elettronico (Microsoft Excel)
- Scrivere le intestazioni
- Scrivere 0 nella cella *A3*
- Nella cella *A4* occorre scrivere la formula:

  = A3 + 1

  e copiarla nelle sottostanti celle appartenenti tutte alla colonna *A*.
- Nella cella *B3* bisogna, invece, far comparire il valore a_0, immesso in precedenza in *G1*, cioè bisogna scrivere la formula:

  = G1
- Nella cella *C3* deve, invece, comparire il valore b_0, immesso in precedenza in *G2*, cioè bisogna scrivere la formula:

  = G2
- In *D3* si vuol far comparire la media m dei valori contenuti nelle corrispondenti celle delle colonne *B* e *C*. Si scrive, pertanto, la formula:

  = (B3 + C3)/2
- In *E3* si vuol inserire il valore che la funzione assume quando alla variabile x si dà il valore m contenuto in *D3*. Si scrive, cioè, la formula:

  = (D3)^3 – D3 – 1
- Se il valore $f(m)$, calcolato in cella *E3*, è negativo, allora nella cella *B4* va immesso il valore di m presente in *D3*, mentre in *C4* va immesso il valore di b_n contenuto nella cella soprastante.
  Se, invece, il valore $f(m)$, calcolato in cella *E3*, è positivo, allora nella cella *B4* va immesso il valore di a_n contenuto nella cella soprastante, mentre in *C4* va immesso il valore di m presente in *D3*.
- Si utilizza, pertanto, nelle celle *B4* e *C4* la funzione SE del foglio elettronico, che ha la seguente sintassi: SE(condizione; formula 1; formula 2). Il foglio elettronico verifica se sussiste la

condizione specificata come primo argomento: se ciò è vero allora, nella cella in cui è scritta tale funzione, compare il valore dato dalla *formula 1*, altrimenti il valore dato dalla *formula 2*.
Si scrive, pertanto, in *B4* la seguente formula: = SE (E3 < 0; D3; B3)
e in *C4* la seguente formula: = SE (E3 > 0; D3; C3)

– Per completare il foglio è ora sufficiente copiare tali formule nelle sottostanti celle delle colonne *B* e *C*: appaiono, così, le approssimazioni successive desiderate.
– Se poi si vuole risolvere un'altra equazione è sufficiente immettere nelle celle *G1* e *G2* i nuovi valori di a_0 e b_0, scrivere in *E4* la nuova espressione di $f(x)$ e copiarla nelle celle della colonna *E*.

A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***
n	a_n ***(f(x)<0)***	b_n ***(f(x)>0)***	***m***	***f(m)***	$a_0 \bullet f(a_0)<0;\ a_0 =$	***1***
					$b_0 \bullet f(b_0)>0;\ b_0 =$	***2***
0	1	2	1,5	0,875		
1	1	1,5	1,25	-0,296875		
2	1,25	1,5	1,375	0,224609375		
3	1,25	1,375	1,3125	-0,051513672		
4	1,3125	1,375	1,34375	0,082611084		
5	1,3125	1,34375	1,328125	0,014575958		
6	1,3125	1,328125	1,3203125	-0,018710613		
7	1,3203125	1,328125	1,32421875	-0,002127945		
8	1,32421875	1,328125	1,326171875	0,00620883		
9	1,32421875	1,326171875	1,325195313	0,002036651		
10	1,32421875	1,325195313	1,324707031	-4,65949E-05		
11	1,324707031	1,325195313	1,324951172	9,94791E-04		

Tabella 1

Elementi di prove di verifica

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali le coordinate del punto medio *M* del segmento *AB*, *A*(8,25; 0) e *B*(8,5; 0), sono:

a) *M*(8,45; 0) b) *M*(8,4; 0) c) *M*(8,35; 0) d) *M*(8,375; 0)

2. Osserva il grafico della funzione di secondo grado rappresentato nella Figura 4 e stabilisci qual è la sua equazione fra quelle elencate. Esso rappresenta una delle equazioni indicate nelle risposte. Quale?

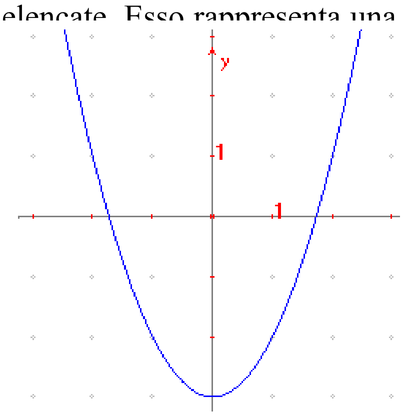


Figura 4

a) $y = x^2 - 1$ *b)* $y = x^2 - 3$ *c)* $y = x^2$ *d)* $y = x^2 + 1$

3. Osserva la seguente tabella che rappresenta le successive approssimazioni della radice quadrata di 74, ottenute col metodo di bisezione mediante il foglio elettronico.

Scrivi nella cella A5 l' indice della radice da calcolare
Puoi scrivere un numero intero positivo da 2 a 30
2
Scrivi nella cella A8 la radice da calcolare
Puoi scrivere un numero positivo minore o uguale a 1000000000
74
risultato del p.c.
8,602325267

				radice		
a	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*(a+b)/2*	*f[(a+b)/2]*	Iter.
8	9	-10	7	8,5	-1,75	1
8,5	9	-1,75	7	8,75	2,5625	2
8,5	8,75	-1,75	2,5625	8,625	0,390625	3
8,5	8,625	-1,75	0,390625	8,5625	-0,68359375	4
8,5625	8,625	-0,68359375	0,390625	8,59375	-0,14746094	5
8,59375	8,625	-0,14746094	0,390625	8,609375	0,121337891	6
8,59375	8,609375	-0,14746094	0,121337891	8,6015625	-0,01312256	7
8,6015625	8,609375	-0,01312256	0,121337891	8,60546875	0,054092407	8
8,6015625	8,60546875	-0,01312256	0,054092407	8,603515625	0,02048111	9
8,6015625	8,603515625	-0,01312256	0,02048111	8,602539063	0,003678322	10
8,6015625	8,602539063	-0,01312256	0,003678322	8,602050781	-0,00472236	11
8,602050781	8,602539063	-0,00472236	0,003678322	8,602294922	-0,00052208	12
8,602294922	8,602539063	-0,00052208	0,003678322	8,602416992	0,001578107	13
8,602294922	8,602416992	-0,00052208	0,001578107	8,602355957	0,000528011	14
8,602294922	8,602355957	-0,00052208	0,000528011	8,602325439	2,96626E-06	15
8,602294922	8,602325439	-0,00052208	2,96626E-06	8,602310181	-0,00025956	16

Tabella 2

Il valore di $\sqrt{74}$, fornito dall'algoritmo all'iterazione n° 9, è 8,603515625. Il numero 8,6015625:

a) approssima la $\sqrt{74}$ per difetto,
b) approssima la $\sqrt{74}$ per eccesso,
c) è la radice quadrata esatta di 74,
d) approssima la $\sqrt{74}$ con un errore $e < 10^{-4}$.

4. Osserva la tabella dell'esercizio 3 e stabilisci qual è la posizione, a destra della virgola, dell'ultima cifra decimale esatta dell'iterazione n° 12.
a) la seconda b) la quarta c) la terza d) la prima

5. Osserva la tabella dell'esercizio 3. Se dico che $\sqrt{74}$ = 8,60229 e confronto questo valore con quello fornito dal computer $\sqrt{74}$ = 8,602325267, commetto un errore *e:*
a) $e < 10^{-7}$ b) $e < 10^{-6}$ c) $e < 10^{-5}$ d) $e < 10^{-4}$

6. Osserva la tabella dell'esercizio 3 ed in particolare l'iterazione n° 13, che attribuisce a $\sqrt{74}$ il valore 8,602416992; tenendo conto che la colonna **a** dà le approssimazioni per difetto e la colonna **b** quelle per eccesso, l'approssimazione migliore di $\sqrt{74}$ è:
a) quella per eccesso b) quella per difetto c) nessuna delle due d) non si può dire

Una regola pazza e geniale

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale, prodotto scalare.	Numeri e algoritmi Lo spazio e le figure Argomentare, congetturare e dimostrare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Geometria analitica.

Nell'ambito del contesto indicato l'attività proposta presenta i vettori come "semplificatori di problemi geometrici", specialmente dal punto di vista del calcolo. Sottolinea, inoltre, la dualità tra le regole del calcolo letterale e le proprietà geometriche, indotta dalle coordinate cartesiane.

Descrizione dell'attività
Si risolvono dei problemi elementari nel piano cartesiano, con i vettori proposti come differenza tra lettere: punto medio di un segmento, baricentro di un triangolo, quarto vertice di un parallelogramma. Poi si propongono alcuni problemi nello spazio che con questa tecnica si risolvono agevolmente.

"Se si indicano i punti con delle lettere e si fanno i calcoli con queste lettere secondo le regole dell'algebra classica, i risultati che si ottengono hanno un significato geometrico" (Grassmann)

Prima fase

Nel piano il vettore $\overrightarrow{AB}$ è la differenza tra il vettore $\overrightarrow{OB}$ ed il vettore $\overrightarrow{OA}$: più semplicemente possiamo scrivere $B - A$.

- Cerchiamo le coordinate del punto medio del segmento AB.

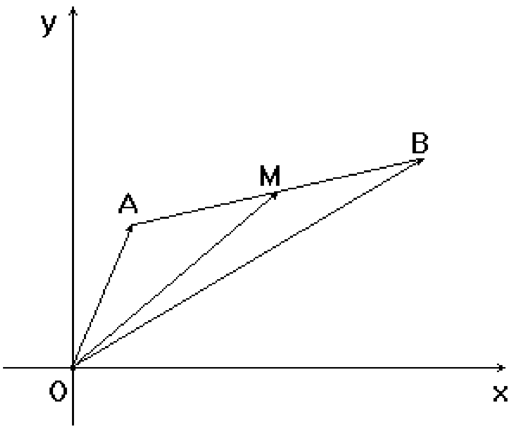


Figura 1

$B-O=M-O+\frac{B-A}{2}$; $B=M+\frac{B-A}{2}$; $M=B-\frac{B-A}{2}$; $M=\frac{2B-B+A}{2}$; $M=\frac{B+A}{2}$
che è la relazione tra le coordinate del punto medio e quelle degli estremi.

- Cerchiamo le coordinate del baricentro di un triangolo.

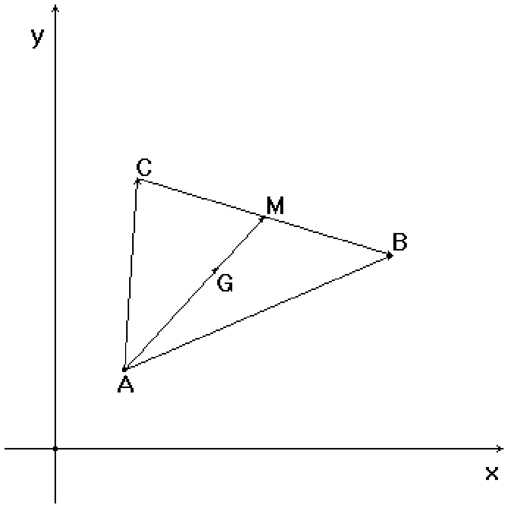


Figura 2

$G-A=\frac{2}{3}(M-A)=\frac{2}{3}(B-A-\frac{B-C}{2})$; $G=\frac{2}{3}(\frac{2B-2A-B+C}{2})+A$; $G=\frac{B-2A+C}{3}+A$;
$G=\frac{B-2A+C+3A}{3}$; $G=\frac{A+B+C}{3}$.
Quest'ultima uguaglianza fornisce la relazione tra le coordinate del baricentro e quelle dei vertici.

- Cerchiamo le coordinate del quarto vertice di un parallelogramma di cui sono note quelle dei primi tre.

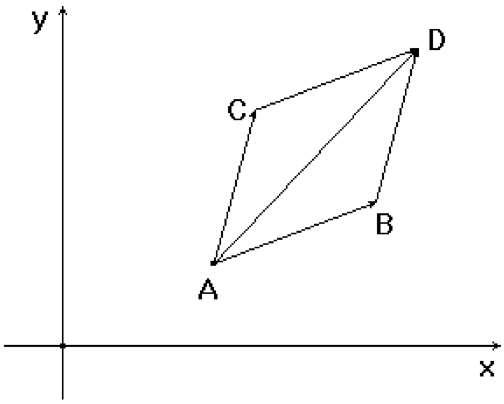


Figura 3

$B-A+C-A=D-A$; $B-A+C=D$.
Quest'ultima uguaglianza fornisce la relazione tra le coordinate del quarto vertice e quelle degli altri tre.

Elementi di prove di verifica

1. *OABCDE* è un prisma a base triangolare (vedi Figura 4) con:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

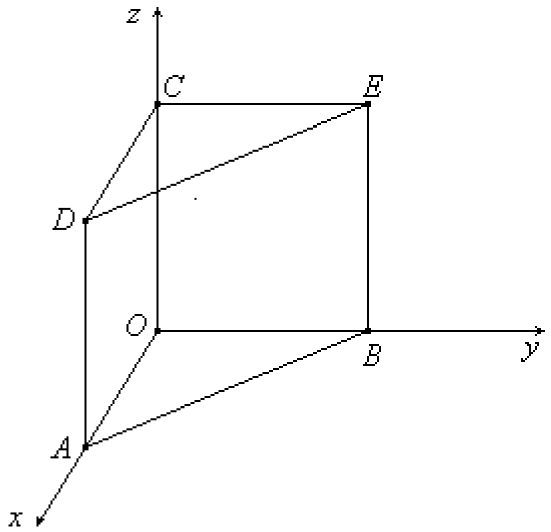


Figura 4

(*a*) *i*) Determinare i vettori posizione dei punti *D* ed *E*.
ii) Determinare i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{DE}$.

(*b*) Indicato con *M* il punto medio del segmento *AB* a con *N* il punto medio del segmento *DE:*
i) Determinare i vettori posizione dei punti *M* ed *N*.
ii) Determinare i vettori $\overrightarrow{AN}$ ed $\overrightarrow{ME}$.
iii) Spiegare cosa notate nei risultati ottenuti.

Griglia di soluzione

(*a*) (*i*) $\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ (*ii*) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

(*b*) (*i*) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (*ii*) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

(*iii*) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ME}$, che è quanto ci si deve aspettare poiché *AN* è parallelo a *ME* e di uguale lunghezza.

2. *OABCDE* rappresenta il tetto di una casa (vedi Figura 5). *OABC* è un rettangolo con il lato *OA* di lunghezza 8 m e il lato *OC* di lunghezza 10 m. Lo spigolo *DE* è disposto in modo simmetrico 3 metri sopra il rettangolo.
(*a*) Con gli assi disposti come in Figura 5, determinare i vettori posizione dei punti *A*, *B*, *C*, *D* ed *E*.
(*b*) Determinare i vettori $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{CE}$, che rappresentano gli spigoli inclinati del tetto.
(*c*) Dire qual è la lunghezza di uno spigolo inclinato.

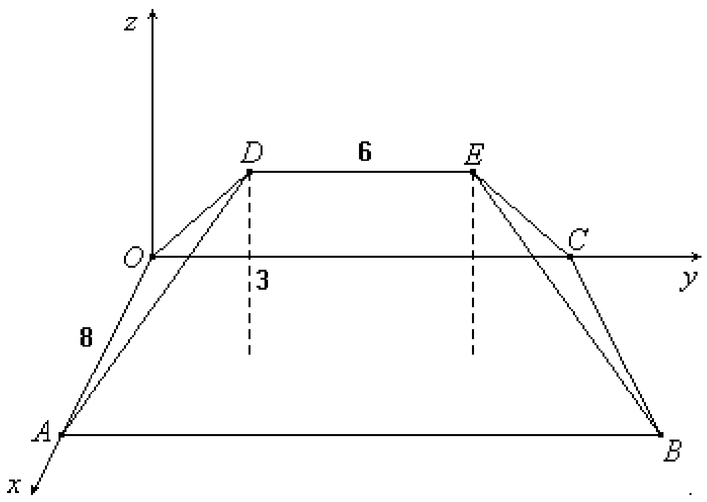


Figura 5

3. *OAB* è un triangolo le cui altezze condotte dai vertici *A* e *B* si intersecano in *H* come indicato in Figura 6. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OH}$ si indicano con **a**, **b** e **h**.

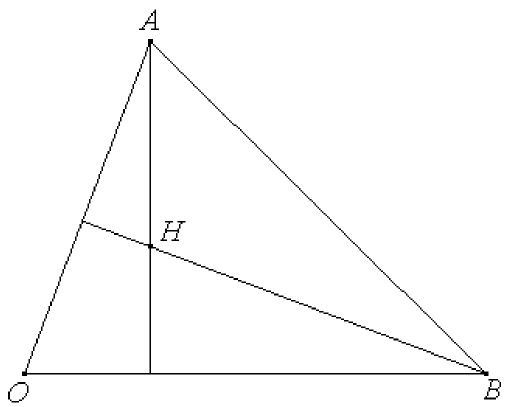


Figura 6

(*a*) Perché risulta $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{h}) = 0$?
(*b*) Scrivere un'equazione analoga che coinvolga $\mathbf{a} - \mathbf{h}$.
(*c*) Formalizzare il fatto che le altezze di un triangolo sono concorrenti.

Segui la freccia

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale.	<u>Numeri e algoritmi</u> Lo spazio e le figure Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Geometria analitica.

Nell'ambito del contesto indicato è presentata un'applicazione dei vettori in matematica, assai diversa dalle applicazioni in fisica, che mette in evidenza, senza formalizzare troppo, la loro caratteristica di classe di equivalenza. Apre anche una finestra sullo spazio dove il metodo classico non è più utilizzabile, mentre l'equazione vettoriale si estende senza difficoltà.
Questa attività può essere proposta nella terza o nella quarta classe sia come complemento alla teoria classica sia come teoria principale.

Descrizione dell'attività
Partendo dal piano si ricava l'equazione vettoriale di una retta per l'origine; con la regola del parallelogrammo si passa in modo naturale alla retta che non passa per l'origine. Si pone l'accento sul vettore che indica la direzione della retta. Usando le coordinate dei punti si trova l'equazione parametrica e da questa, con semplici passaggi algebrici, quella cartesiana. A questo punto si ricorda che una retta è individuata da due punti. Si chiede agli studenti di individuare il vettore che indica la direzione della retta che passa per i punti dati: si ritrovano così le equazioni precedenti osservando la formula classica della retta per due punti da un nuovo angolo. L'estensione allo spazio avviene in modo naturale, semplicemente aggiungendo una coordinata.

<u>Prima fase</u>
Si scrive l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $A(3;2)$. Essa è fatta da multipli del vettore $A - O = \boldsymbol{v}$, per cui la sua equazione può essere scritta $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{v}$.
Se una retta non passa per l'origine, ma è parallela alla retta precedente (ovvero ha la stessa direzione del vettore $\boldsymbol{v}$), la regola del parallelogrammo ci fa intuire che un suo qualsiasi punto ha come vettore posizione $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, dove $\boldsymbol{w}$ è un vettore posizione di un qualsiasi punto della retta.
Ad esempio:

Se $\boldsymbol{v} = (3;2)$ e $\boldsymbol{w} = (4;5)$, l'equazione $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ diventa il seguente sistema $\begin{cases} x = 3k + 4 \\ y = 2k + 5 \end{cases}$

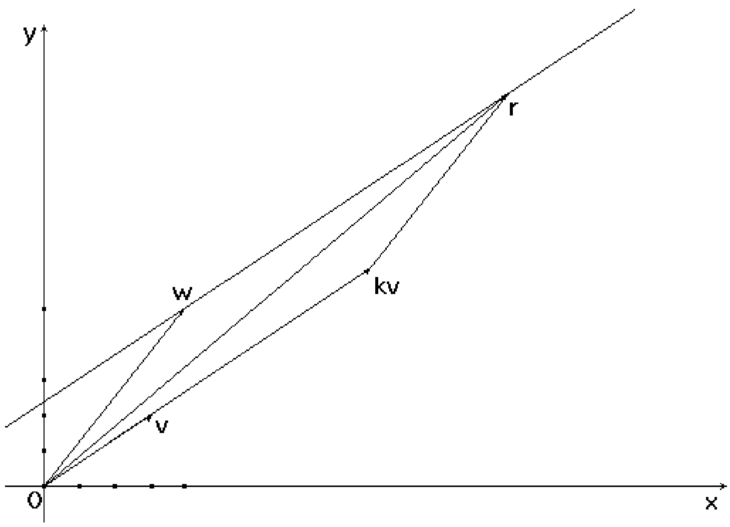


Figura 1

Seconda fase

Si sa che una retta è individuata da due punti. Si vuole trovare l'equazione cartesiana della retta individuata dai punti $A(2; 4)$, $B(3; 7)$. È importante far notare che questa retta ha la direzione del vettore $B - A = \boldsymbol{v} = (1; 3)$ e passa per il punto A.
Si può verificare che cambiando l'ordine di A e B l'equazione della retta non cambia.
Si scriva ora l'equazione cartesiana esprimendo k in funzione di x e di y ed uguagliando.
Cosa c'è al denominatore di queste due frazioni?
Si può generalizzare la questione mettendo coordinate generiche di punti, $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$, e arrivando così alla formula della retta per due punti, letta in un modo diverso.

Possibili sviluppi

1. Si può trasferire la questione allo spazio: i punti sono individuati da tre coordinate, i vettori hanno, rispetto alla base canonica, 3 componenti.
Che cosa cambia?
2. Si possono ripetere gli esercizi della parte precedente nello spazio semplicemente estendendo le formule ad una terza coordinata.

Elementi di prove di verifica

1. Trovare l'equazione della retta che ha la direzione del vettore $\boldsymbol{v} = (-1;5)$ e passa per il punto $B(-2;4)$.
2. Trovare l'equazione della retta parallela alla retta $\begin{cases} x = k + 2 \\ y = -2k - 3 \end{cases}$ e passante per il punto $C(1; -4)$.
3. Trovare l'equazione della retta perpendicolare alla retta $\begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = k - 3 \end{cases}$ e passante per il punto $D(-2; -3)$.
4. Nei casi precedenti trovare l'equazione cartesiana delle rette (basta ricavare k e sostituire)
5. L'equazione cartesiana della retta è del tipo $ax + by + c = 0$. Che relazione c'è tra il vettore di componenti $a;b$ e il vettore direzione della retta? Qual è la distanza della retta $ax + by + c = 0$ dall'origine? Qual è la distanza della retta $ax + by + c = 0$ da un punto $P(x_0; y_0)$?

Riferimenti bibliografici

Barozzi, G.C. (1997). *Aritmetica, un approccio computazionale*, Ed. Zanichelli, Bologna.

Barozzi, G.C. (1996-97) *Applicazioni informatiche e Analisi numerica*, MIUR, Quaderni della Direzione Classica, Analisi matematica, 24, 36-69.

Barozzi, G.C. (2001). *Polinomi e liste*, MIUR, Quaderni della Direzione Classica, Labclass, 45, 15-22.

Barozzi, G.C., Cappuccio, S. (1997). *Le calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, Pitagora, Bologna.

Boieri P. (1986). *Rappresentazione dei numeri e operazioni in virgola mobile: un'applicazione del calcolatore nell'insegnamento della matematica,* Periodico di matematiche, Mathesis, 4.

Boieri, P. (2003). *Derive, Laboratorio informatico per la matematica,* Loescher, Torino.

Boieri, P., Blunda, N., Gobetto, M. (2003). *Excel, Laboratorio informatico per la matematica,* Loescher, Torino.

Di Bona, L. (1958). Enciclopedia dello studente Vol. I, Confalonieri M., Milano.

Dissoni, A., Salsa, S. (1989). *Antico algoritmo benedettino* - Matematica e Laboratorio 1, teoria algoritmi e applicazioni per computer,1, Ghisetti e Corvi, Padova.

Impedovo, M. (1999). *Matematica: insegnamento e computer algebra,* Springer, Milano.

Santarossa, R. (2000). *Questioni didattiche sul calcolo scientifico,* Atti del Convegno Nazionale Mathesis.

Scaglianti, L., Varagnolo, L., Zwirner, G. (1987). *Lezioni di Matematica, Algebra Informatica*, 1, CEDAM, Milano.

Siti Web (2003)

Songia Eugenio - http://space.tin.it/edicola/esongi/calenda.htm

Il Calendario - http://www.ciaoumbria.it

Frequently Asked Question about Calendars - http://www.tondering.dk/claus/calendar.html

Il Calendario - http://www.cosediscienza.it/tempo.htm
http://www.apav.it/eugeninfo2003/
http://matmedia.it

Laboratorio a distanza "Matmedia", MIUR - www.matmedia.it