

Il topo e l'elefante

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni, per affrontare problemi.</p> <p>Elaborare schematizzazioni utilizzando metodi simbolici ed interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata.</p> <p>Produrre soluzioni del problema attraverso una concatenazione delle azioni necessarie.</p> <p>Formulare congetture per esprimere le regolarità.</p>	<p>I polinomi e le loro operazioni.</p> <p>Equazioni e di primo grado in una incognita.</p> <p>Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.</p>	<p><u>Risolvere e porsi problemi</u></p> <p>Numeri ed algoritmi</p> <p>Relazioni e funzioni</p> <p>Argomentare e congetturare</p>	<p>Lingua italiana</p>

Contesto

Aritmetica: numeri razionali.

Il contesto è di tipo matematico e si colloca nell'ambito dell'aritmetica dei numeri interi e razionali. Si propone alla classe un semplice problema che presenta dei risvolti interpretativi e si può risolvere utilizzando più metodi. L'intenzione è anche quella di esaminare singolarmente i metodi risolutivi e poi confrontarli con opportune osservazioni.

Vediamo anzitutto alcuni esempi di problemi che presentano una stessa tipologia. Risolveremo in questa fase (quello che appare) il più semplice di essi invitando a seguire una analoga strada per gli altri.

Problema 1. *Al mercato di Rifredi, con 36 Euro si può comprare un maglione, una camicia e nove paia di calzini. Sapendo che due camicie costano quanto un maglione e quattro paia di calzini, quanto costa ogni singolo pezzo di vestiario?*

Problema 2. *Alvaro aveva avuto torroncini in regalo dalla nonna ma quando arrivò a casa li aveva persi tutti. Alla madre che gli chiese quanti torroncini aveva avuto, il nostro amico Alvaro rispose astutamente che la nonna gliene aveva dati in confezioni da tre, Che i torroncini erano prodotto da una famosa ditta di Cremona, che le confezioni erano un numero dispari e che lui aveva pensato che, suddividendole con i suoi quattro amici, ciascuno avrebbe mangiato lo stesso numero di torroncini e che a lui gliene sarebbero rimasti tre in più. Sono sufficienti questi dati per rispondere alla richiesta della madre oppure Alvaro si è dimenticato qualche informazione?*

Il problema precedente presenta tipicamente la richiesta relativa alla (eventuale) esaustività ed alla (eventuale) sovrabbondanza dei dati.

Limitiamoci, come detto a risolvere, come caso propedeutico più semplice, il seguente problema:

Problema. *Un elefante ed un topo pesano assieme una tonnellata ed un etto. L'elefante pesa una tonnellata in più del topo. Quanto pesa il topo?*

Descrizione dell'attività

Il problema viene proposto alla classe nella fase di formalizzazione di un testo e ciascun studente è libero di ragionare per trovare la soluzione. Spesso gli studenti procedono subito per tentativi, senza riflettere prima sull'uso di entrambe le informazioni contenute nel testo. I loro ragionamenti si sviluppano in funzione degli stimoli intellettivi. E' bene comunque sottolineare questo aspetto, che forse in questo caso può sembrare banale, ma che in generale serve ad abituare lo studente al corretto esame del testo.

Un modo empirico per risolvere il problema dato può essere il seguente, che acquista forse più significato se chiamato :

- “Per tentativi”

Si parte dalle osservazioni dei ragazzi che in molti casi rispondono affrettatamente “*un etto*” ma subito si accorgono che la cosa non funziona perché contraddicono la seconda informazione “*che l'elefante ed il topo pesano assieme una tonnellata ed un etto*”

Si può allora far notare che il topo non può pesare 0 gr (non esisterebbe) e neppure 100g perché se così fosse, assieme al peso dell'elefante, non rispetterebbe la seconda informazione.

Non è per risolvere un problema così semplice ma essenzialmente per avviare lo studente alla formalizzazione ed al calcolo letterale che si può costruire la seguente tabella (di lavoro):

<i>Peso del topo:</i> T	<i>Peso dell'elefante:</i> $E=k+T$	<i>Totale:</i> $P=.....$
0 g.	1 ton .	1 tonn
100 g.	1 ton e 100 g.	1 tonn e 200g

Tabella 1.a

Nota: È stata usata la lettera **k** per indicare la differenza di peso fra i due animali.

In questo modo si invitano gli studenti a tentare di avvicinarsi alla soluzione per successive approssimazioni ed a costruire la tabella in cui riassumere i risultati

<i>Peso del topo:</i> T	<i>Peso dell'elefante:</i> $E=k+T$	<i>Totale:</i> $P=.....$
<i>Peso del topo</i>	<i>Peso dell'elefante</i>	<i>Totale</i>
10 g.	1 ton e 10 g.	1 tonn e 20g
20 g.	1 ton e 20 g.	1 tonn e 40g
30 g.	1 ton e 30 g.	1 tonn e 50g
40 g.	1 ton e 40 g.	1 tonn e 80g
50 g.	1 ton e 50 g.	1 tonn e 100g

Tabella 1.b

Si può far notare che questo ragionamento è abbastanza spontaneo da parte degli studenti, ma che è facilitato dal fatto che si sono scelti dati interi.

Come sarebbe la situazione se, elefante e topo pesassero 1 tonn e 133, 5 g.? Tutto diventa più difficile ?

Oppure se l'elefante pesasse 1005 kg?

<i>Peso del topo:</i> T	<i>Peso dell'elefante:</i> $E=k+T$	<i>Totale:</i> $P=.....$
g.	1 ton e g.	1 tonn e 133,5 g

A queste domande si inizia a rispondere dicendo che sarà bene porre l'attenzione su un risultato importante che può essere dedotto direttamente dalla Tabella 1.b: il peso del topo è *sempre la metà* della differenza fra il peso complessivo topo-elefante e quello dell'elefante stesso. Tale osservazione ci permetterà poi di proporre una generalizzazione del problema ad altri dati possibili, ottenuta per via intuitiva ed empirica senza l'uso di strumenti sofisticati:

Ed ecco dunque una generalizzazione, attraverso l'uso del calcolo letterale, che giustifica l'intuizione ottenuta.

- Attraverso le equazioni.

Sia P il peso complessivo, topo-elefante, k la differenza -- che può essere scelta a seconda delle esigenze didattiche -- fra il peso dell'elefante e il peso del topo; e questi sono i nostri **dati iniziali**. Sia poi T il peso del topo e sia $E = k + T$ il peso dell'elefante. Si nota che da sola l'informazione data dall'uguaglianza $E = k + T$, non ci permette di trovare una soluzione univoca (per E e T) conoscendo solo il valore di k , senza aver fissato il valore di P . Occorrerà a questo punto introdurre uno strumento cognitivo più forte che potrà anche consentire agli studenti di avere la certezza di aver trovato (se c'è !) l'unica soluzione possibile del problema assegnato.

Facciamo allora notare che P può anche essere scritto come $(k + T) + T = P$ e quindi, usando il calcolo letterale, $P = k + 2T$; e ciò giustifica quello che abbiamo ottenuto per via intuitiva: ovvero **che $P - k = 2T$** , cioè **il peso complessivo meno la "differenza" data inizialmente** (lavorando dunque solo sui dati del problema) è sempre la metà di questa differenza e che questo ci dà pertanto il peso del topo avendosi $T = (P - k) / 2$.

Si devono invitare gli alunni a considerare la natura di queste grandezze, tutte positive, che occorre fissare rispettando dei limiti iniziali (i cosiddetti vincoli). Ciò abitua i ragazzi ad analizzare un testo ed a scoprire, oltre le regolarità, anche la presenza di limitazioni nei valori che possono essere assegnati.

Questo permette poi di generalizzare il risultato nelle situazioni problematiche esposte sopra.

Ad esempio, se insieme pesassero $P = 1$ tonn e 133, 5 g e $k = 1$ tonn, *quanto peserebbe in più del topo l'elefante?*

Possiamo dire subito che $2T = 133,5$ g. e quindi, il topo pesa 66,25g.

Si può anche invitare i ragazzi a provare a cambiare le informazioni iniziali; ad esempio, a trovare il peso dell'elefante sapendo quanto pesa *meno* del topo ed invitarli a fare prove con valori diversi, non interi, ed a trovare analoghe regolarità. Ciò è uno stimolo che può spingerli, motivati, ad usare il calcolo letterale, alla generalizzazione, al trovare relazioni sul problema e sulla natura delle grandezze coinvolte. Un ulteriore spunto interessante di questo problema è anche quello di essere un punto di avvio per la considerazione dei sistemi, qualora si volessero usare contemporaneamente entrambe le informazioni.

Uno strumento utile, per la ricerca empirica della soluzione, può infine essere la predisposizione del foglio elettronico per simulare il processo di soluzione con dati iniziali diversi.

Chi occupa il miliardesimo posto?

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Esplicitare le proprie aspettative in termini di possibilità di trovare una soluzione.</p> <p>Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni (simbolici, geometrici, numerici, ecc.) e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata.</p> <p>Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie.</p> <p>Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie.</p> <p>Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti.</p>	<p>I numeri decimali e il calcolo approssimato.</p> <p>L'insieme dei numeri reali.</p> <p>Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.</p>	<p><u>Porsi e risolvere problemi</u></p> <p>Numeri e algoritmi</p> <p>Argomentare, congetturare, dimostrare</p>	<p>Traffico automobilistico</p>

Contesto

Numeri naturali, approssimazione numerica.

Il contesto è matematico ed in particolare si rivolge all'ambito del lavoro con i numeri naturali, e delle equazioni in una variabile discreta. Il punto essenziale è la scoperta di regolarità e di analogie fra relazioni, che spinge verso la formalizzazione. Dal punto di vista della ricerca di soluzioni numeriche è altrettanto importante la capacità di cercare semplificazioni e approssimazioni adeguate e funzionali al problema trattato.

Descrizione dell'attività

Prima fase

Si inizia col proporre il seguente problema:

“Considera la successione di numeri naturali

1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6.....
 in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, ecc.”

Qual è il *miliardesimo* termine di questa successione?

La richiesta può apparire, a prima vista, cervelotica. Vediamo se, riflettendo sull'enunciato, si riesce a trovare un punto di partenza. Un suggerimento usuale (ad esempio, Polya, 1967) è quello di affrontare preliminarmente un problema analogo più semplice. Proponiamoci allora il seguente problema:

“Considera la successione di numeri naturali
 1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6.....
 in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, ecc.”

Qual è il *ventesimo* termine di questa successione?

Qui è sufficiente costruire la successione dei primi venti termini per dare la risposta “6”
 Facciamo un ulteriore passo (il 50° termine), e dopo aver trovato, solo un po' più laboriosamente, la soluzione 10, ci si chiede che collegamento esista, se esiste, tra il dato numerico della domanda e la risposta.

La regolarità della costruzione suggerisce che un collegamento deve esistere.

Già nel rispondere ai suoi primi due quesiti “semplificati” lo studente si sarà probabilmente accorto che scrivendo sei volte il numero 6 ha scritto 21 cifre e che, scrivendo dieci volte il numero 10, ha scritto addirittura 55 cifre.

Un'ulteriore semplificazione del problema, che ci porta un po' più avanti concettualmente, consiste nel cercare pertanto il collegamento non fra 20 e 6 o fra 50 e 10, ma fra 6 e 21 e fra 10 e 55.

Probabilmente gli studenti non sono ancora pronti per una formalizzazione del problema.

Conviene quindi continuare a trovare collegamenti fra coppie di numeri, ma è opportuno ricominciare dall'inizio.

Si può addirittura costruire una tabella che evidenzia i collegamenti:

1	2	3	4	5	6	7	...
1	3	6	10	15	21	28	...

Forse adesso si vede il collegamento: 21 è la somma dei primi 6 numeri. Verifichiamo che 55 è la somma dei primi 10 numeri.

Ma ci vuole un passo verso l'astrazione: qual è la somma dei primi n numeri?

Qui l'insegnante può dare dei suggerimenti che vadano nella direzione dell'“intuizione” di Gauss: ad esempio, far scrivere la successione dei primi 50 numeri naturali, scrivendo soltanto i primi 5 e gli ultimi 5, nel modo seguente

1 2 3 4 5 46 47 48 49 50.

Adesso ci si accorge che la somma del primo e dell'ultimo numero, del secondo e del penultimo, ecc. è sempre la stessa. Questa somma si ripete per 25 volte (25 coppie).

Passando alla formalizzazione del problema, otteniamo la nota formula $n(n+1)/2$ che fornisce la somma dei primi n numeri naturali e dove $n/2$ indica il numero delle coppie.

Qualche studente potrebbe far notare che allora n deve essere un numero pari. L'insegnante farà allora verificare che la formula continua a valere anche se n è un numero dispari.

Senza altro ci si è allontanati dal problema di partenza, ma ci si ritorna subito con gli strumenti necessari.

Seconda fase

Cercando la miliardesima cifra della successione relativa al problema iniziale, ed utilizzando quanto appena detto, si arriva a modellizzare il problema nel modo seguente:

$$n(n+1)/2 = 10^9$$

Questa si presenta come un'equazione di 2° grado, che gli studenti non sanno ancora risolvere. Ma qui il problema può essere enunciato in modo più semplice: trovare due numeri consecutivi il cui prodotto è $2 \cdot 10^9$. A questo punto un'ulteriore, conveniente, approssimazione ci porta alla ricerca della radice quadrata di $2 \cdot 10^9$, che è circa $4.472136 \cdot 10^4$ ovvero 44721,36.

Una prima osservazione:

nell'effettuare i calcoli con una calcolatrice tascabile, è importante non fermarsi prima della quinta cifra decimale, altrimenti la moltiplicazione per 10^4 ci darebbe un valore intero, e ciò non sarebbe plausibile.

Come interpretare il valore decimale ottenuto? Gli studenti a questo punto dovrebbero ricordare che nei loro primi tentativi avevano scritto più termini della successione di quanti ne chiedeva il problema, per "esaurire" il numero considerato. Anche in questo caso il numero si "esaurisce" dopo il miliardesimo termine, ed il risultato è fornito quindi dall'approssimazione per eccesso del risultato, dunque da 44722.

Una seconda osservazione: l'aggiunta dello zero nella tabella iniziale non modifica nulla, in quanto dovrei scrivere zero volte "0". Ma qui si deve fare un po' di attenzione.

Possibili sviluppi

1. Porsi problemi: Cosa succede se la successione è formata, con le stesse regole, solo da numeri dispari?

Commento: i passi da seguire possono essere analoghi al caso trattato, osservando che in questo caso la formalizzazione riguarda la somma dei primi n numeri dispari, che risulta uguale a n^2 . In questo caso la regola di Gauss si generalizza in quella della somma dei primi n termini di una successione aritmetica (di differenza 2) ma può anche essere visualizzata graficamente.

Negli anni successivi l'insegnante potrà usare il *principio di induzione* per dimostrare in modo più rigoroso queste regole.

2. Una fila di automobili è ferma davanti a un semaforo. Supponiamo che la distanza fra le parti anteriori di due automobili, l'una dietro l'altra, sia in media di 6 metri e che, quando il semaforo diventa verde, ogni automobile parta a due secondi di tempo dalla precedente, muovendosi con la velocità media di 10 m/s (36 km/h) nel tratto che precede il semaforo. Se il verde dura 40 secondi, quante automobili passano?

I dati numerici forniti potrebbero essere anche decisi in classe collegialmente, chiarendo comunque che una schematizzazione è necessaria (supponendo, ad esempio, che le automobili siano a distanza fissa una dall'altra). Tale schematizzazione può richiedere, anche se a livello intuitivo, il concetto di media. Diamo una traccia di quelli che potrebbero essere i vari passaggi di un'attività guidata dall'insegnante:

Sia n il numero delle automobili che riescono a passare. L' n -esima automobile comincia a muoversi dopo $2(n - 1)$ secondi dallo scattare del verde (2 secondi per ogni automobile che la precede) e, se d è la distanza che la separa dal semaforo, impiegherà un tempo $t = d/v$ per raggiungerlo. Dal momento che vi è un'automobile ogni 6 metri, vale la relazione $d = 6(n - 1)$ (in

metri). Il tempo totale in cui l' n -esima automobile raggiunge il semaforo è quindi dato (in secondi) da: $2(n-1) + 6(n-1)/10 = 40$, da cui si ricava $n = 213/13 \cong 16.4$ automobili.

L'insegnante discuterà, come nel caso precedente, il significato da attribuire al risultato ottenuto che è un numero non intero. E' probabile che venga spontaneo dire che il risultato non è accettabile, oppure che deve essere arrotondato per difetto.

Nel problema, invece, si calcola il tempo in cui l' n -esima automobile raggiunge il semaforo con la parte anteriore. Se passano 16.4 automobili vuol dire che la sedicesima automobile non solo raggiunge il semaforo verde con la parte anteriore, ma lo supera per quasi la metà. È quindi il guidatore della diciassettesima automobile che per primo vede il semaforo non più verde.

Polli e conigli

Livello scolastico: primo biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Calcolo di base - sistemi Risolvere per via grafica e algebrica problemi che si formalizzano con equazioni. Analizzare semplici testi del linguaggio naturale e interpretarli in linguaggio simbolico. Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. Verificare una congettura usando con consapevolezza la verifica.	N e Q, ricorsività. Piano cartesiano. Sistemi e loro interpretazione geometrica. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	

Contesto

Aritmetica: numeri interi e razionali.

Il contesto è di tipo matematico e si colloca nell'ambito dell'aritmetica dei numeri interi e razionali. Si propone alla classe un semplice problema che può presentarsi come un rompicapo e si può risolvere utilizzando più metodi. L'intenzione è di esaminare singolarmente i metodi risolutivi e poi confrontarli con opportune osservazioni.

Un fattore ha polli e conigli. Questi animali hanno 50 teste e 140 zampe. Quanti polli e quanti conigli ha il fattore?

Descrizione dell'attività

Il problema viene proposto alla classe come problem posing, in modo tale che ciascun studente sia libero di ragionare per trovare la risoluzione. Spesso gli studenti procedono subito per tentativi, senza riflettere prima sulla coerenza delle procedure. I loro ragionamenti si sviluppano in funzione degli stimoli intellettivi che genera il linguaggio naturale e delle esperienze personali; ad esempio, a nessuno può venire in mente di pensare che polli e conigli possono essere animali anche con due teste. E' bene comunque sottolineare questo aspetto, che forse in questo caso può sembrare banale, ma che in generale serve ad abituare lo studente alla corretta valutazione della situazione da esaminare.

Un modo empirico per risolvere il problema dato può essere il seguente, che acquista forse più significato se chiamato :

- “Brancolando”

Si parte dalla seguente considerazione : se ci sono 50 polli e nessun coniglio, quante zampe avremmo in tutto? E se ci sono 50 conigli e nessun pollo, quante zampe...? E ancora se metà teste sono polli e metà conigli

Per avere sotto mano una visione globale dei tentativi fatti, può essere opportuno tabellare i risultati come nella successiva tabella 1.

<i>Polli</i>	<i>Conigli</i>	<i>Totale zampe</i>
50	0	100
0	50	200
25	25	150
24	26	152
23	27	154
22	28	156

Tabella 1

Da una prima lettura della tabella, si può dire che, prendendo come riferimento il numero complessivo delle zampe (ovvero 140, *cfr. testo*), si è individuato un intervallo numerico in cui trovare la soluzione: sicuramente i polli ed i conigli non possono essere meno di 1 né più di 49.

Neanche la soluzione 25 polli, 25 conigli va bene.

Decidiamo allora di prendere un numero minore di polli ed incrementiamo quello dei conigli (rispettivamente 24 e 26) abbiamo 152 zampe; non va ancora bene ed allora, procedendo allo stesso modo, incrementiamo ancora di due il numero delle zampe.....

A questo punto si fa notare che il procedimento usato è da abbandonare, in quanto il totale si allontana progressivamente da 140; conviene allora proseguire scambiando il ruolo dei conigli con quello dei polli e si ottiene la seguente tabella 2 che contiene anche la soluzione.

<i>Polli</i>	<i>Conigli</i>	<i>Totale zampe</i>
26	24	148
27	23	146
28	22	144
29	21	142
30	20	140

Tabella 2

Osservazione: è bene porre l'attenzione sul fatto che con il diminuire del numero dei polli e aumentando quello dei conigli (di un "passo" 1), il numero complessivo delle zampe è incrementato con passo 2, allontanandosi così dal 140 (*cfr. tabella1*). Ecco perché si abbandona questo procedimento e si continua, incrementando il numero dei polli e diminuendo il numero dei conigli; in questo caso il numero delle zampe diminuisce con passo 2 ed è proprio quest'ultimo procedimento che conduce al risultato 140.

La soluzione è: 30 polli e 20 conigli.

Siamo sicuri che questa è una soluzione unica?

- *"Formalizzando"*

Si può introdurre uno strumento cognitivo più forte che consenta agli studenti di avere la certezza di aver trovato l'unica soluzione possibile del problema assegnato: decodificare il testo, passando dal linguaggio naturale a quello dell'algebra; dopo aver chiamato x il numero dei conigli ed y il numero dei polli, il sistema risolutivo risulta essere il seguente:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

La discussione circa le soluzioni di tale sistema può essere fatta sia analiticamente sia geometricamente.

Ad esempio, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, le due equazioni rappresentano due rette che si intersecano in un punto le cui coordinate sono la soluzione del problema (e tale soluzione coincide con quella ottenuta precedentemente).

Osservazione: premesso che il metodo algebrico offre la possibilità di generalizzare la soluzione, si deve invitare gli studenti a riflettere non sulla coincidenza numerica delle soluzioni ottenute seguendo due ragionamenti diversi, quanto sulla interpretazione geometrica del sistema, da cui è possibile stabilire che la soluzione è unica.

In generale, è bene sempre controllare che le soluzioni analitiche non portino a dei risultati in contraddizione con i dati del problema. In questo caso, ad esempio, i numeri negativi o non interi vanno esclusi.

Si può provare ora a mutare le condizioni di partenza utilizzando una problematica simile.

L'azione didattica può continuare proponendo agli studenti: “e se x è uguale a y ”?

Il nuovo problema si risolve algebricamente con il seguente sistema.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x = y \end{cases}$$

Sul piano cartesiano le due equazioni rappresentano due rette che si intersecano in un punto le cui coordinate $(x = y = \frac{70}{3})$ sono la soluzione del problema.

In questo caso le soluzioni analitiche portano a risultati in contraddizione con i dati del problema: il numero dei polli deve essere un intero positivo.

Adesso la soluzione che rispetta le condizioni del problema *non esiste*. Esiste però una soluzione approssimata da cercare in un intorno della soluzione analitica $\frac{70}{3} = 23, \bar{3}$

$Y=Polli$	$X=Conigli$	<i>Totale zampe</i>
23	24	140
24	23	142

Tabella 3

Alcune indicazioni per la verifica.

Problematiche di questo tipo, possono essere modificate contestualizzandole in modi diversi e con dati diversi, è chiaro che una risoluzione subordinata a numeri grandi è più complessa. Per accelerare il processo, si può pensare di utilizzare un foglio di calcolo.

Nella pagina successiva si trova l'esempio di foglio elettronico costruito per simulare passo passo la ricerca della soluzione. Può essere rielaborato dal docente per dati iniziali differenti. Se si vuole attivare il foglio elettronico basta caricarlo dal file (in questo caso Excel) già predisposto: [POLLI_CONIGLI.xls](#)

Con questo foglio elettronico si può simulare per tentativi il problema dei polli e dei conigli inserendo i dati

iniziali										
	Matrice Unitaria	teste	zampe	teste	zampe		Partenza			
	DATI	50	140	T	Z	x=	50	massimo		
x	conigli	1	4	a1	b1	y=T-x	0	minimo		
y	polli	1	2	a2	b2	passo	1			
Per tentativi		conigli		polli		animali				
n. conigli	n. polli	T	Z	T	Z	TESTE	ZAMPE	teste	zampe	
x	y	teste:a1*x	zampe:b1*x	teste:a2*y	zampe:b2*y	a1*x+a2*y	b1*x+b2*y	Soddisfa ?	Soddisfa ?	
50	0	50	200	0	0	50	200	SI	NO	
49	1	49	196	1	2	50	198	SI	NO	
48	2	48	192	2	4	50	196	SI	NO	
47	3	47	188	3	6	50	194	SI	NO	
46	4	46	184	4	8	50	192	SI	NO	
45	5	45	180	5	10	50	190	SI	NO	
44	6	44	176	6	12	50	188	SI	NO	
43	7	43	172	7	14	50	186	SI	NO	
42	8	42	168	8	16	50	184	SI	NO	
41	9	41	164	9	18	50	182	SI	NO	
40	10	40	160	10	20	50	180	SI	NO	
39	11	39	156	11	22	50	178	SI	NO	
38	12	38	152	12	24	50	176	SI	NO	
37	13	37	148	13	26	50	174	SI	NO	
36	14	36	144	14	28	50	172	SI	NO	
35	15	35	140	15	30	50	170	SI	NO	
34	16	34	136	16	32	50	168	SI	NO	
33	17	33	132	17	34	50	166	SI	NO	
32	18	32	128	18	36	50	164	SI	NO	
31	19	31	124	19	38	50	162	SI	NO	
30	20	30	120	20	40	50	160	SI	NO	
29	21	29	116	21	42	50	158	SI	NO	
28	22	28	112	22	44	50	156	SI	NO	
27	23	27	108	23	46	50	154	SI	NO	
26	24	26	104	24	48	50	152	SI	NO	
25	25	25	100	25	50	50	150	SI	NO	
24	26	24	96	26	52	50	148	SI	NO	
23	27	23	92	27	54	50	146	SI	NO	
22	28	22	88	28	56	50	144	SI	NO	
21	29	21	84	29	58	50	142	SI	NO	
20	30	20	80	30	60	50	140	SI	SI	

RISOLVERE E PORSI PROBLEMI

19	31	19	76	31	62	50	138	SI	NO
18	32	18	72	32	64	50	136	SI	NO
17	33	17	68	33	66	50	134	SI	NO
16	34	16	64	34	68	50	132	SI	NO
15	35	15	60	35	70	50	130	SI	NO
14	36	14	56	36	72	50	128	SI	NO
13	37	13	52	37	74	50	126	SI	NO
12	38	12	48	38	76	50	124	SI	NO
11	39	11	44	39	78	50	122	SI	NO
10	40	10	40	40	80	50	120	SI	NO
9	41	9	36	41	82	50	118	SI	NO
8	42	8	32	42	84	50	116	SI	NO
7	43	7	28	43	86	50	114	SI	NO
6	44	6	24	44	88	50	112	SI	NO
5	45	5	20	45	90	50	110	SI	NO
4	46	4	16	46	92	50	108	SI	NO
3	47	3	12	47	94	50	106	SI	NO
2	48	2	8	48	96	50	104	SI	NO
1	49	1	4	49	98	50	102	SI	NO
0	50	0	0	50	100	50	100	SI	NO

La condanna dell'astrologo

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	<i>Nuclei coinvolti</i>	Collegamenti esterni
<p>Adattare o costruire opportune schematizzazioni matematiche (con l'uso di formule, grafici, grafi, figure geometriche, e (ove pertinente e possibile) interpretare situazioni e fenomeni ed effettuare previsioni e stime.</p> <p>Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili.</p> <p>Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi; fenomeni riconducibili a uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione e previsione.</p>	<p>Eventi e operazioni con gli eventi.</p> <p>Eventi incompatibili; eventi esaustivi.</p> <p>Significato della probabilità e sue valutazioni.</p> <p>Successioni e limiti di successioni (2° biennio).</p>	<p><u>Risolvere e porsi problemi</u></p> <p>Dati e previsioni</p> <p>Relazioni e funzioni</p>	

Contesto

Mondo delle fiabe.

L'attività si colloca nell'ambito probabilistico ed è intesa a dare le prime indicazioni di ricerca di strategie. Il problema può essere affrontato a livello di primo biennio quando si conosca la definizione di probabilità e si sappia dare una valutazione di probabilità per eventi indipendenti. Si vuole portare gli studenti a rendersi consapevoli che, analizzando passo per passo una procedura e valutandone volta per volta la convenienza, si può arrivare a definire la strategia migliore possibile.

Descrizione dell'attività

Si pone il seguente problema:

“Un astrologo era stato condannato a morte. Il re decise di lasciargli un'ultima possibilità. Diede all'astrologo la facoltà di mettere in due urne due palline bianche e due nere. Il re doveva poi scegliere a caso una delle due urne e estrarre a caso una pallina: se fosse uscita nera, l'astrologo sarebbe stato ucciso; se fosse uscita bianca avrebbe avuto salva la vita.

Come conveniva all'astrologo inserire le quattro palline nelle due urne, per avere la maggiore probabilità di sopravvivenza?”

Il problema si presenta qui come un indovinello e può essere perciò accattivante. Gli studenti cercheranno di dare subito una risposta.

Di solito la risposta più frequente è quella di proporre di mettere le due bianche in un'urna e le due nere nell'altra.

Si inviteranno gli studenti a considerare tutte le possibili configurazioni.

Per far ciò occorre una prima schematizzazione del problema.

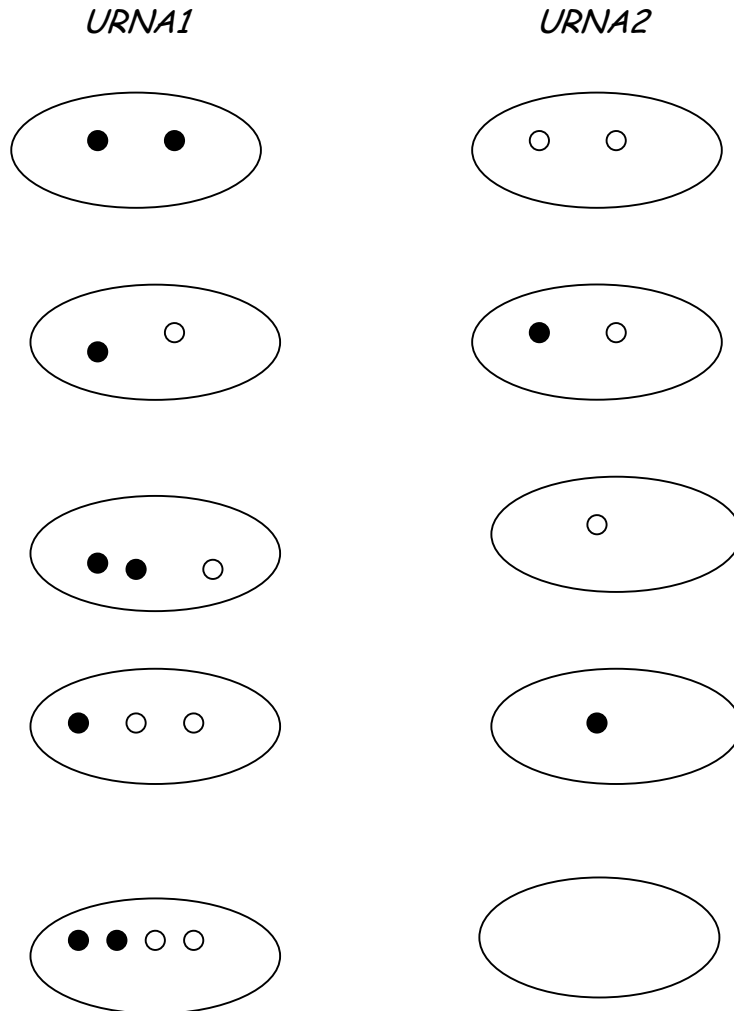


Figura 1

Le palline possono essere disposte due in un'urna e due in un'altra (in tal caso i modi diversi sono due nere e due bianche oppure una nera e una bianca) oppure tre da una parte e una dall'altra oppure tutte e quattro nella stessa urna.

Una possibile schematizzazione è quella che usa i diagrammi di Venn, ma naturalmente se ne possono trovare altre; essa però non ci dice quale di queste combinazioni dia maggiore probabilità di sopravvivenza al nostro astrologo.

Intuitivamente si può prevedere che nel primo caso la quantità delle palline è ininfluyente, tutto sta nell'indovinare l'urna giusta, mentre nel secondo caso è l'urna ad essere ininfluyente.

Per arrivare ad una valutazione quantitativa può essere opportuna la schematizzazione con un grafo ad albero.

Si può agevolmente calcolare che nei primi due casi la probabilità di sopravvivenza è $1/2$.

Nel terzo caso si ha:

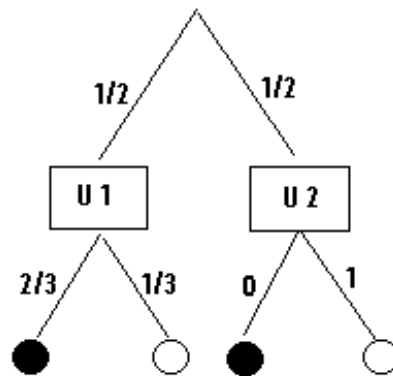


Figura 2

La probabilità che viva è dunque $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Nel quarto caso si ha:

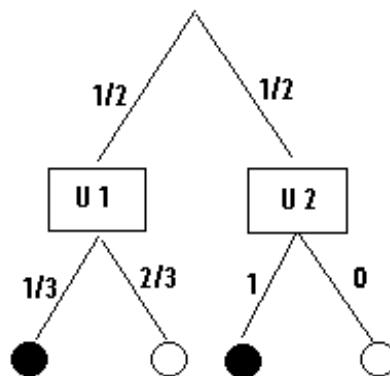


Figura 3

La probabilità che viva è adesso: $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{3}$

Nel terzo caso, dunque, la probabilità è superiore al 50% ed è quindi la strategia più conveniente. Nell'ultimo caso la probabilità di sopravvivenza si riduce a 1/4.

Il problema si può anche generalizzare. Se disponiamo di due urne e di tre palline per ogni colore, quale sarà la configurazione più conveniente?



Figura 4

In questo caso avremo:

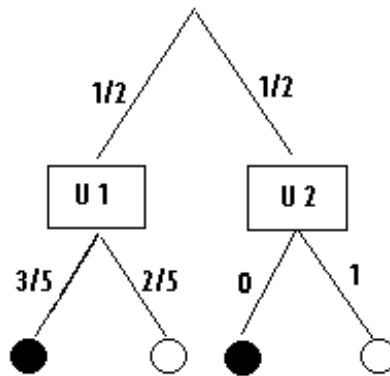


Figura 5

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{10}$$

La probabilità è salita al 70%!!

Seguendo lo schema del primo esempio, abbiamo scelto subito la configurazione con una sola pallina bianca in una delle due urne. Ovviamente gli studenti arriveranno gradualmente a questa conclusione, magari analizzando altri casi.

Ulteriori sviluppi (porsi problemi)

E se le palline sono n bianche e n nere?

Il “solito” grafo ci dà:

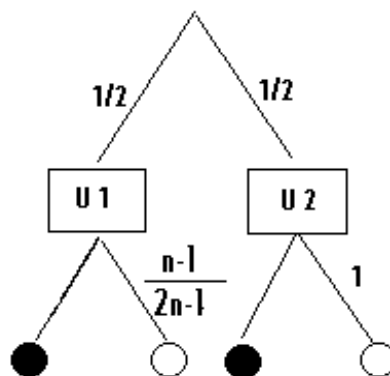


Figura 6

Calcoliamo:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3n-2}{2n-1}$$

Si è ormai capito che la strategia ottimale consiste nel mettere in una delle due urne una sola pallina bianca. Si può osservare che, al crescere di n , questa strategia fornisce probabilità di salvezza crescente. Lo studente potrà verificarlo studiando la crescita della successione $p=p(n)$ appena definita.

A livello di secondo biennio ci si può porre un'ulteriore domanda: al crescere di n potremo avere la certezza che il nostro astrologo si salvi?

Si ha anche euristicamente:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{4}$$

Dunque, anche se non si vuole introdurre la notazione di limite, si potrà arrivare intuitivamente a definire una stima superiore di questa successione e si ritroverà che in ogni caso la probabilità di salvezza per il nostro astrologo non può, in nessun caso, superare il 75% (e questo dato potrà essere fonte di varie discussioni).

Ciliegie rosse e ciliegie gialle

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti. Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione. Usare in varie situazioni linguaggi simbolici.	Eventi e operazioni con gli eventi. Probabilità totale, condizionata e composta. Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Variabili e quantificatori. Legami tra connettivi e quantificatori.	<u>Risolvere e porsi problemi</u> Dati e previsioni Argomentare congetturare, dimostrare	Lingua italiana Vita sociale

Contesto

Statistica: decisioni.

L'attività si colloca in ambito sia matematico sia extramatematico: per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito probabilistico e statistico, volto ad indicare capacità di decisione. Questo esempio è riferito ad una situazione reale nella quale molto spesso si possono trovare gli studenti. È un primo esempio di avvio alla riflessione, criticità e decisione.

Descrizione dell'attività.

Il padre di Luigi dice: "...voi giovani non capite ancora l'importanza dello studio, pensate solo al divertimento! Beh ti voglio fare questa proposta: domenica andrai allo stadio a vedere la partita della Roma, a condizioni però che prima superi con voto sufficiente il compito di matematica". Luigi aveva programmato anche di andare al cinema, ma sa bene che per superare il compito di matematica in modo sufficiente, dovrà studiare tutto il pomeriggio, e quasi certamente dovrà rinunciare al cinema. Capisce cioè che se vuole aumentare la probabilità di avere un buon voto nel compito di matematica diminuirà, altrettanto inevitabilmente, la sua probabilità di andare al cinema. Che decisione dovrà (o potrà) prendere ?

In generale, la lettura di un problema con riferimento alla vita reale, può disorientare inizialmente lo studente che spesso è portato a distinguere un testo matematico da uno letterario per la sola presenza di numeri. Quello, sopra riportato, è un esempio di problema senza numeri, in cui interviene il concetto di probabilità da un punto di vista che potremo chiamare qualitativo: se Luigi decide di studiare nel pomeriggio, vedrà aumentare la probabilità di vedere la partita e, contestualmente, diminuire la probabilità di andare al cinema.

Un problema di questo genere è considerato "*un problema aperto*", nel senso che non presenta dati numerici; essi si possono inserire di volta in volta, proponendo anche alcune variazioni dipendenti dal contesto. Inoltre, la descrizione della situazione richiede, da parte dello studente, anche una serie

di conoscenze linguistiche ed epistemologiche che gli consentano di sfrondare il testo dalle parti descrittive se quest'ultime non alterano la dinamica degli eventi.

Un esempio di problema, analogo a quello precedente di Luigi, del cinema e della partita, in cui compaiono però i numeri può essere il seguente:

“Siano dati due cestini di ciliegie A e B. Il cestino A contiene 19 ciliegie rosse e 1 ciliegia gialla e il cestino B contiene 4 ciliegie gialle e 1 rossa. Viene presentato uno dei due cestini nascosto da un drappo, si deve decidere di quale cestino si tratta.”

Si propone di operare seguendo la seguente regola di decisione:

si pesca dal cestino una ciliegia:

- se è rossa si afferma che si tratta del cestino A,
- se è gialla si afferma che si tratta del cestino B.

Seguendo questa regola, qual è la probabilità di prendere una decisione *corretta* circa il cestino che è stato presentato?

Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*vedi Tabella 1*.) I simboli α e β indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata quando viene presentato (all'insaputa di tutti, naturalmente) il cestino A e la probabilità di prendere una decisione errata quando viene presentato (all'insaputa di tutti) il cestino B.

Regola di decisione	Situazione effettiva (sconosciuta)	
	<i>Viene presentato il cestino A</i>	<i>Viene presentato il cestino B</i>
<i>Si pesca una ciliegia rossa e si afferma di avere avuto il cestino A</i>	Decisione corretta $1 - \alpha$	Decisione errata β
<i>Si pesca una ciliegia gialla e si afferma di avere avuto il cestino B</i>	Decisione errata α	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 1

Si possono immaginare tre possibili soluzioni riferite a tre possibili specificazioni della domanda:

❖ Sotto il drappo c'è il cestino A. Qual è la probabilità di una decisione corretta?

Si pesca una ciliegia: se è rossa, la regola impone di dichiarare A e porta a una decisione corretta.

$$\begin{aligned}
 P(\text{prendere una decisione corretta avendo avuto il cestino A}) &= \\
 &= P(\text{pescare una ciliegia rossa da A}) = \frac{19}{20} = 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

❖ Sotto il drappo c'è il cestino B. Qual è la probabilità di una decisione corretta?

Si pesca una ciliegia: se è gialla, la regola impone di dichiarare B e porta a una decisione corretta.

$$\begin{aligned} P(\text{prendere una decisione corretta avendo avuto il cestino B}) &= \\ &= P(\text{pescare una ciliegia gialla da B}) = \frac{4}{5} = 1 - \beta \end{aligned}$$

❖ Sotto il drappo c'è un cestino, ma non si sa quale. Qual è la probabilità di una decisione corretta? Si pesca una ciliegia e, seguendo la regola, se è rossa si dichiara A se è gialla si dichiara B.

Come si è appena visto ai punti 1 e 2, si può prendere una decisione corretta in due modi:

- viene offerto (all'insaputa di tutti) il cestino A: si pesca una ciliegia rossa e si dichiara A;
- viene offerto (all'insaputa di tutti) il cestino B: si pesca una ciliegia gialla e si dichiara B.

Le due alternative (o si pesca da A o si pesca da B) sono tra loro incompatibili (se si pesca da A non si è pescato da B).

Sia indicata con P_A la probabilità che venga presentato il cestino A e con P_B la probabilità che venga presentato il cestino B. La probabilità di una decisione corretta risulta:

$$\begin{aligned} P(\text{prendere una decisione corretta}) &= P(\text{avere il cestino A e di pescare una ciliegia rossa}) + \\ &\quad + P(\text{avere il cestino B e di pescare una ciliegia gialla}) = \\ &= P(\text{avere il cestino A}) \cdot P(\text{pescare una ciliegia rossa da A}) + \\ &\quad + P(\text{avere il cestino B}) \cdot P(\text{pescare una ciliegia gialla da B}) = \\ &= P_A (1 - \alpha) + P_B (1 - \beta) = 1 - (P_A \alpha + P_B \beta) \end{aligned}$$

Si può anche ragionare in modo diverso, partendo dalle probabilità di prendere una decisione errata:

$$\begin{aligned} P(\text{prendere una decisione corretta}) &= 1 - P(\text{prendere una decisione errata}) = \\ &= 1 - [P(\text{avere il cestino A e di pescare una ciliegia gialla}) + \\ &\quad + P(\text{avere il cestino B e di pescare una ciliegia rossa})] = \\ &= 1 - [P(\text{avere il cestino A}) \cdot P(\text{pescare una ciliegia gialla da A}) + \\ &\quad + P(\text{avere il cestino B}) \cdot P(\text{pescare una ciliegia rossa da B})] = \\ &= 1 - (P_A \alpha + P_B \beta) \end{aligned}$$

Si rileggano adesso le conclusioni precedenti nel caso del nostro amico Luigi, inserendo anche "personali" valutazioni di probabilità (che potranno, naturalmente, essere oggetto di discussione).

Regola di decisione	Situazione effettiva (alternative possibili)	
	<i>A - Studio (si rinuncia al cinema)</i>	<i>B - Non studio (si va al cinema)</i>
<i>Si prende 8 al compito di matematica e si va allo stadio.</i>	Conclusione coerente (e felice) $1 - \alpha = \frac{8}{10}$	Conclusione particolarmente fortunata $\beta = \frac{3}{10}$
<i>Non si riesce a prendere 8 al compito di matematica e non si va allo stadio.</i>	Conclusione particolarmente sfortunata $\alpha = \frac{2}{10}$	Conclusione coerente (ma infelice) $1 - \beta = \frac{7}{10}$

Tabella 2

Qual è la probabilità di andare allo stadio?

▪ Si decide di studiare e si rinuncia al cinema. La probabilità di prendere 8 al compito di matematica e di andare allo stadio è

$$1 - \alpha = \frac{8}{10} = 0,8$$

▪ Si decide di non studiare e di andare invece al cinema. La probabilità di prendere 8 al compito di matematica e di andare allo stadio è

$$\beta = \frac{3}{10} = 0,3$$

▪ Si lancia la monetina, se viene testa si opta per l'alternativa A (lo studio), se viene croce si decide per l'alternativa B (il cinema), con $P_A = P_B = \frac{1}{2}$.

Come si è appena visto ai primi due punti precedenti, si può andare allo stadio in due modi:

- si studia, si rinuncia al cinema, si prende 8 al compito di matematica e, finalmente, si va allo stadio;
- non si studia, si va al cinema, si riesce ciò nonostante a prendere 8 al compito di matematica e si va allo stadio.

Le due alternative (A e B) sono tra loro incompatibili (o si resta a casa a studiare o si va al cinema rinunciando allo studio).

La probabilità di andare allo stadio risulta:

$P(\text{andare allo stadio}) =$

$$\begin{aligned} &= P(\text{studiare, rinunciando al cinema, e prendere 8 al compito di matematica}) + \\ &+ P(\text{andare al cinema, rinunciando allo studio, e prendere 8 al compito di matematica}) = \\ &= P(\text{studiare}) \cdot P(\text{prendere 8 al compito di matematica avendo studiato}) + \\ &+ P(\text{non studiare}) \cdot P(\text{prendere 8 al compito di matematica non avendo studiato}) = \\ &= P_A (1 - \alpha) + P_B \beta = \frac{1}{2} \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \frac{3}{10} = \frac{11}{20} = 0,55 \end{aligned}$$

Osservazione

Con un ragionamento analogo, si invita lo studente a risolvere problemi simili in rapporto alle esperienze personali riferite al suo quotidiano, suggerendogli anche di “inventare” personalmente le misure di probabilità di cui dovrà servirsi.

Nota: Come già abbiamo visto in alcune attività del nucleo Dati e Previsioni, è opportuno fare una piccola considerazione sulla necessità della *Probabilità a priori*. Si tratta cioè di dover completare i dati del problema con valutazioni di probabilità (nel caso in oggetto “andare al cinema” o “studiare tutto il pomeriggio”) da assegnare, non attraverso formule prestabilite ma in modo soggettivo-coerente-razionale. Ciò potrà essere fatto esaminando razionalmente il problema *alla luce* di tutte le informazioni a disposizione, discuterne in classe con la guida attenta dell'insegnante che dovrà vigilare perché “soggettivo” non diventi “arbitrario”, rendendosi conto della necessità dell'inserimento, fra i dati del problema, anche di tale dato per affrontare compiutamente il problema stesso. Anche nel caso in cui non si abbia alcuna informazione ci si convincerà, presto e facilmente, che tale situazione di *ignoranza* potrà essere significativamente tenuta presente attraverso il concetto di equiprobabilità: se non sappiamo niente non possiamo certo affermare che un evento è più probabile di un altro... Ed allora diamo a tutti la stessa probabilità pronti a considerare gli eventuali futuri aggiornamenti, in seguito ad esperimenti o altro tipo di informazione.