

## Il biliardo

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche (formule, grafici, figure geometriche, ecc.) di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi.</p> <p>Produrre una soluzione del problema attraverso un'opportuna concatenazione delle azioni necessarie (costruzioni geometriche).</p> <p>Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie.</p>	<p>Isometrie nel piano: simmetrie e traslazioni.</p> <p>Proprietà delle figure geometriche.</p> <p>Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie.</p>	<p><u>Risolvere e porsi problemi</u></p> <p>Spazio e figure</p>	<p>Fisica</p> <p>Disegno</p>

### Contesto

Trasformazioni geometriche.

L'attività si colloca nell'ambito sia matematico sia extramatematico; per quest'ultimo aspetto riguarda la vita sociale.

Il problema proposto si colloca nel secondo biennio con l'obiettivo di applicare le isometrie, e non semplicemente definirle e descriverle, ad una situazione reale che è quella che si presenta nel gioco del biliardo, quando si vuole che la biglia colpita segua un certo percorso. Il problema si presta anche ad una soluzione analitica che, tuttavia, si presenta eccessivamente complessa. L'esempio vuole dimostrare l'importanza di una scelta di metodo conveniente per il problema posto. L'alunno deve conoscere le isometrie del piano, le loro composizioni, la disuguaglianza triangolare, e le equazioni e i sistemi lineari.

### Descrizione dell'attività

Il problema consiste nell'individuare la direzione di lancio della biglia, che si trova inizialmente in un punto  $P$  del biliardo, in modo che, dopo aver battuto successivamente contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il punto  $P$ .

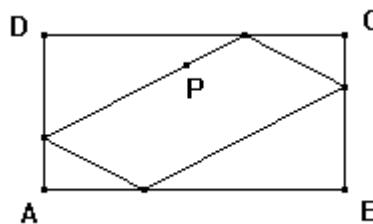


Figura 1

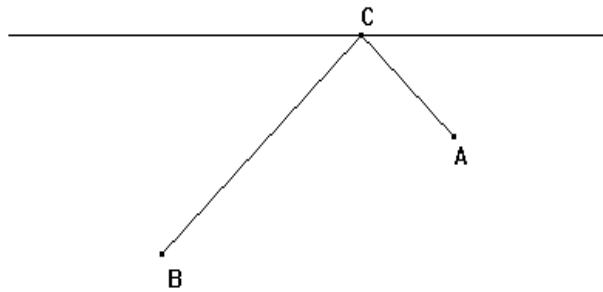
Conviene proporre dapprima dei problemi più semplici al fine di abituare lo studente all'utilizzo delle trasformazioni geometriche come metodo di risoluzione di problemi. Lo studente potrà in tal modo apprezzare la potenza di un metodo diverso da quelli consueti, più idoneo in taluni casi a fornire soluzioni rapide ed eleganti.

### Prima fase

L'insegnante propone agli studenti il problema noto come *Problema di Erone*, formulato con riferimento ad un contesto del mondo reale.

- Una persona che si trova in una posizione  $A$  deve andare a riempire dei secchi d'acqua, attingendo da un ruscello posto ad una certa distanza, e portarli ad una fattoria che si trova in un punto  $B$  dalla stessa parte di  $A$  rispetto al ruscello, facendo il cammino più breve. Si chiede di aiutare la persona ad individuarlo.

Lo studente intuitivamente comprende che il cammino deve essere rettilineo dal punto  $A$  al ruscello; poi, ancora rettilineo, dal fiume alla fattoria. Rappresentando il fiume con una retta  $r$  si può visualizzare la situazione con la seguente figura:



*Figura 2*

Il problema si presenta allora come un problema di minimo: dati due punti  $A$  e  $B$ , posti dalla stessa parte di una retta  $r$ , determinare su essa un punto  $C$  tale che  $\overline{AC} + \overline{CB}$  sia minimo. La risoluzione analitica è, dal punto di vista operativo, non semplice e utilizza strumenti matematici non ancora noti allo studente.

L'insegnante pone la seguente domanda alla classe.

“Se la fattoria stesse dall'altra parte del ruscello in un punto  $B'$  e non ci fossero problemi di attraversamento del ruscello, quale sarebbe il cammino più breve?”

La risposta è ovvia: “Il segmento  $AB'$ ”.

L'insegnante chiede ancora: “Dove deve stare il punto  $B'$ ?”

A questo punto gli studenti intuiscono che  $B'$  deve essere il simmetrico di  $B$  rispetto alla retta  $r$  e, facendo alcune considerazioni sulle proprietà di tale trasformazione (punti e segmenti corrispondenti), pervengono alla risposta corretta: il punto  $C$  è il punto d'intersezione del segmento  $AB'$  con la retta  $r$ .

E' chiaro che il procedimento scelto è rapido ed elegante, specialmente se confrontato con un eventuale procedimento analitico.

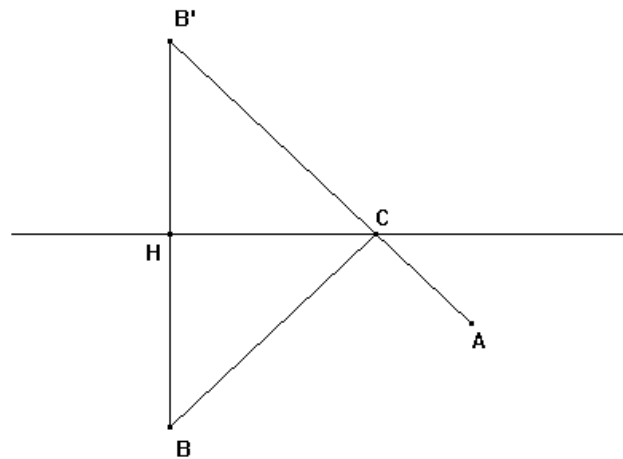


Figura 3

### Seconda fase

L'insegnante propone il seguente esercizio:

- Siano date due rette  $a$  e  $b$  perpendicolari tra loro in un punto  $P$  ed una retta  $r$  passante per  $P$ . Che relazione c'è tra le rette che si ottengono da  $r$  come corrispondenti nelle simmetrie assiali rispetto agli assi  $a$  e  $b$ ?

La risposta degli studenti è immediata: le rette coincidono. L'esercizio è però fondamentale per affrontare il problema del biliardo.

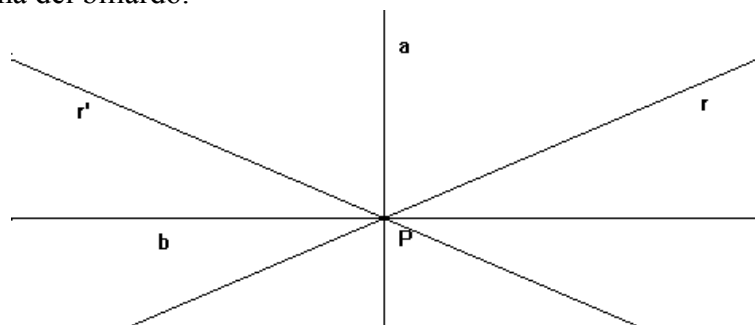


Figura 4

### Terza fase

Le considerazioni fatte per la soluzione analitica nel problema del ruscello valgono, a maggior ragione, per il problema del biliardo. Gli studenti hanno raggiunto la convinzione che il metodo analitico può condurre alla soluzione di un sistema lineare la cui soluzione appare subito piuttosto complessa.

L'insegnante invita gli studenti a concentrare l'attenzione sulla legge di riflessione nell'urto (elastico) di una biglia che, muovendosi sul piano del biliardo, batta contro una delle sponde del biliardo stesso. In tale fase egli può coinvolgere il collega di fisica.

Può essere conveniente, a questo punto, utilizzare un software di geometria simulando il percorso come nella figura 5, dove si è supposto che la prima sponda contro cui la biglia batte è il lato  $AD$ . Gli studenti possono variare la direzione di lancio in modo che la retta ottenuta dopo le quattro riflessioni passi per  $P$ . La congettura che gli studenti formulano è la seguente:

La direzione secondo cui va lanciata una biglia posta in un punto  $P$  del biliardo, affinché, dopo aver battuto contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il medesimo punto  $P$ , è quella della diagonale  $AC$  (o della diagonale  $BD$ ) del rettangolo che rappresenta il biliardo.

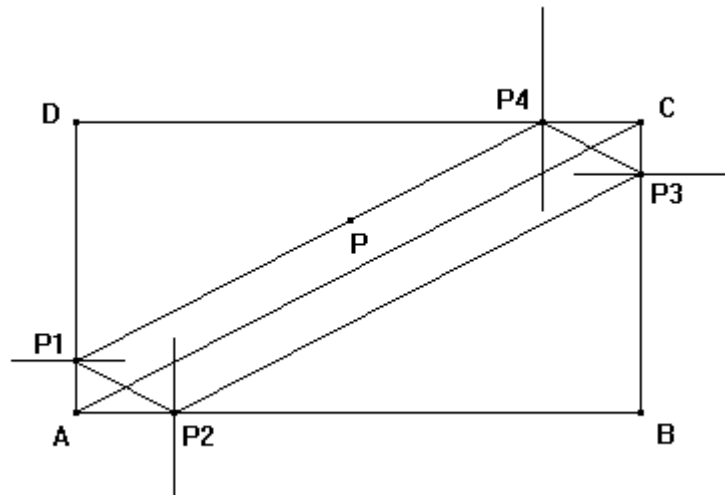


Figura 5

Occorre ora validare o confutare tale congettura.

Ricordando l'esercizio della seconda fase, gli studenti osservano che la retta riflessa della retta  $PP_1$  (cioè  $P_1P_2$ ) si ottiene non solo dalla simmetria rispetto alla perpendicolare alla sponda ma anche dalla simmetria rispetto alla sponda interessata (ovvero  $DA$ ). La costruzione si ripete quattro volte con riflessioni assiali rispetto alle quattro sponde del biliardo ottenendo le rette  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$  ed una quarta retta che si vuole passi per  $P$ .

La composizione delle prime due simmetrie assiali (in quanto gli assi sono ortogonali) dà luogo alla simmetria centrale di centro  $A$  (intersezione dei due assi di simmetria) e la composizione delle altre due dà la simmetria centrale di centro  $C$ . Quindi la composizione delle quattro simmetrie assiali equivale alla composizione delle due simmetrie centrali di centri  $A$  e  $C$  che, a loro volta, danno luogo ad una traslazione di un vettore avente come direzione la retta congiungente i due centri di simmetria, cioè la diagonale  $AC$  del rettangolo che rappresenta il biliardo.

Le rette, corrispondenti in una traslazione, che passano per uno stesso punto ( $P$ ) sono quelle aventi la direzione del vettore-traslazione, per cui la direzione di lancio della biglia, affinché dopo le quattro riflessioni ripassi per la posizione iniziale  $P$ , è quella della diagonale  $AC$  del rettangolo che rappresenta il biliardo (lo stesso risultato si ha se si lancia la biglia nella direzione dell'altra diagonale).

## Quanto costa una pizza all'equatore

**Livello scolastico:** 2° biennio

<b>Abilità interessate</b>	<b>Conoscenze</b>	<b>Nuclei coinvolti</b>	<b>Collegamenti esterni</b>
<p>Scegliere, adattare, utilizzare schematizzazioni matematiche di situazioni e fenomeni matematici e non, per affrontare problemi. Elaborare tali schematizzazioni utilizzando metodi matematici opportuni e interpretare via via gli esiti di queste elaborazioni in relazione alla situazione problematica considerata. Confrontare i risultati con le aspettative. Individuare le cause delle inadeguatezze con opportuni elementi di controllo ritenuti importanti all'avvio del processo risolutivo. Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità.</p>	<p>Omotetie e similitudini nel piano.</p> <p>Lunghezza della circonferenza ed area del cerchio.</p> <p>Area e volume dei solidi.</p>	<p><u>Risolvere e porsi problemi</u></p> <p>Spazio e figure</p> <p>Argomentare, congetturare, dimostrare</p>	<p>Geografia astronomica</p> <p>Fisica</p>

### Contesto

Misure.

L'attività si colloca trasversalmente a varie conoscenze geometriche.

L'attività descritta rappresenta un buon esercizio sulle similitudini. I problemi proposti, in particolare i primi due, mettono in luce che l'intuizione è un aspetto importante nell'attività matematica, ma che è necessario supportarla con un corretto ragionamento ed una attenta analisi dei risultati. L'intuizione da sola può condurre ad affermazioni errate. Il terzo problema è di tipo aperto e invita a produrre delle congetture su un dato mancante e a sostenerle con ragionamenti pertinenti.

La serie di attività proposte richiede conoscenze che si acquisiscono durante il terzo e il quarto anno del corso di studi, per cui l'attività può essere suddivisa in tali anni. Per il suo svolgimento si utilizzano immagini del globo terrestre ed altre di oggetti tratti dall'esperienza quotidiana. Lo studente deve avere una buona conoscenza delle figure geometriche del piano e capacità di visione spaziale. Deve anche conoscere e sapere applicare le proprietà delle similitudini, nonché i concetti di peso e peso specifico.

### Descrizione dell'attività

L'attività prevede la risoluzione di tre problemi che, per la loro apparente semplicità, potrebbero indurre gli studenti a fornire soluzioni di tipo immediato. Esse richiedono, invece, una riflessione attenta sulle proprietà delle figure geometriche e sulle relazioni tra esse.

Primo problema

- Si stende un nastro intorno alla superficie terrestre lungo tutto l'equatore e si osserva che la sua lunghezza deve essere circa 40.076.000 m, essendo il raggio  $r$  della terra, se questa è assimilata ad una sfera, lungo 6.370.000 m. Se si allunga il nastro di  $2\pi$  metri (poco più di 6 metri e 28 centimetri), il nuovo nastro, disposto simmetricamente rispetto al centro della terra, si solleva abbastanza da consentire ad un cocodrillo di passarci sotto? (Nota: l'altezza media di un cocodrillo è di circa mezzo metro).

L'insegnante invita gli studenti a fornire una risposta e a giustificarla.

(Si avvia una discussione tra gli studenti: eccone una ragionevole sintesi, in una classe immaginaria).

Luca: *Non ci passa sicuramente perché, ben che vada, il nastro si alzerà di pochi millimetri; il nastro lungo quanto l'equatore non si accorge neppure dell'aggiunta di sei metri.*

Giovanni: *Hai ragione, al più ci potrà passare un foglio di carta sotto il nastro.*

Enrico: *Sono d'accordo, però mi piacerebbe sapere di quanti millimetri si solleva precisamente; facciamo il calcolo.*

Osservano allora che la lunghezza del nastro è  $2\pi r$  metri e, se si aggiunge un altro pezzo lungo  $2\pi$  metri, la lunghezza del nastro diventa  $2\pi r + 2\pi = 2\pi(r+1)$  metri.

La conversazione riprende:

Luca: *Il raggio della nuova circonferenza misura  $(r+1)$  metri. Allora si solleva di un metro!*

Giovanni: *Se mi accuccio ci passo anche io!*

Enrico: *Il risultato sembra strabiliante, ma se ci pensiamo, come sei metri sono pochissimi rispetto alla lunghezza dell'equatore, anche un metro è poco rispetto alla lunghezza del raggio della terra. Infatti, il rapporto tra lunghezza di una circonferenza e del suo raggio è costante e vale  $2\pi$ .*

Considerazioni matematiche.

Le circonferenze sono figure simili. Il rapporto delle lunghezze delle circonferenze è uguale al rapporto dei loro raggi.

Secondo problema

- Due amici, in pizzeria, ordinano due pizze napoletane: Andrea la prende normale, Paolo invece la sceglie "gigante". Quando glielie portano i due amici osservano che sono perfettamente circolari; la normale ha raggio 20 cm, la gigante 30 cm e sono anche dello stesso spessore. Quando portano il conto, Andrea deve pagare € 6,4 mentre Paolo, vedendo il suo conto, che è di € 12, si sorprende: "Come mai la mia pizza costa quasi il doppio, mentre il raggio è aumentato solo del 50%" ?

Affidiamo la risposta alla nostra solita classe immaginaria.

Luca: *Paolo ha ragione: avendo la pizza più grande il raggio una volta e mezzo quello della più piccola, basta aggiungere la metà di 6,4 € cioè 3,2 €. Il prezzo giusto dovrebbe essere 9,6 €.*

Giovanni: *Però con le pizze così grandi - le maxi pizze - ci si mangia in due e mi ricordo che si paga molto di più.*

Enrico: *Facciamo il calcolo di quanta pizza in più c'è. Calcoliamo l'area del cerchio della prima pizza e quello della maxi pizza e proviamo a fare il rapporto.*

L'area della prima pizza è  $\pi r^2$ ; l'area della maxi pizza è  $\pi \left(r + \frac{r}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{3}{2}r\right)^2 = \frac{9}{4}\pi r^2$ . Il rapporto tra l'area della maxi pizza e quella della pizza normale è  $\frac{9}{4} = 2,25$ .

Luca: *E' più che raddoppiata!*

Giovanni: *Ecco perché ci si mangia in due.*

Luca: *Che strano il raggio era aumentato solo della metà.*

Enrico: *Già, ma il rapporto tra le aree di due cerchi, che sono figure simili, è uguale al quadrato del rapporto tra i loro raggi. Perciò se si considerano due cerchi di raggi  $\frac{3}{2}r$  ed  $r$ , come sono le pizze considerate, il rapporto tra i loro raggi è  $\frac{3}{2}$  e il quadrato è  $\frac{9}{4} = 2,25$ . La maxi pizza deve costare  $6,4 \times 2,25 \text{ €} = 14,4 \text{ €}$ . Quindi a Paolo, il pizzaiolo, ha fatto addirittura lo sconto !*

Considerazioni matematiche

I cerchi sono figure simili. Il rapporto delle aree dei cerchi è uguale al quadrato del rapporto dei loro raggi.

Terzo problema

- Negli Stati Uniti le monete da 50 cent e da 10 cent sono entrambe d'argento ed hanno un peso proporzionale al loro effettivo valore. Proviamo a disporre delle monetine da 10 cent sulla moneta da 50 cent, senza che si sovrappongano e non debordino dal contorno della moneta grande. Quante monete da 10 cent riusciamo a mettere?

Luca: *Bisognerebbe fare un modellino delle monete.*

Giovanni: *Ritagliamole da un foglio di carta.*

Luca: *Prendo il compasso per disegnarle.*

Giovanni: *Ma che raggi diamo?*

Luca: *La più grande vale 50 cent, la più piccola 10 cent; perciò io darei alla più grande un raggio di 5 cm e alla più piccola di 1 cm.*

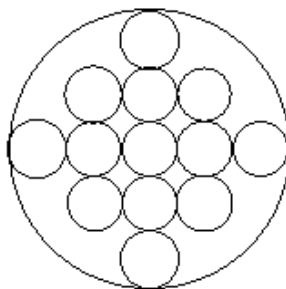


Figura 1

Enrico: *13 monetine mi sembrano troppe. Quando sono stato negli Stati Uniti ho visto le monete e quelle da mezzo dollaro non mi sembravano così grandi. Il problema afferma che le monete hanno un peso proporzionale al loro valore, ovvero la moneta da mezzo dollaro pesa 5 volte la moneta da 10 cent. Essendo entrambe d'argento anche i loro volumi sono nello stesso rapporto. E siccome le monete sono dei cilindri dobbiamo conoscere il loro spessore. Siccome non abbiamo questo dato possiamo tentare delle ipotesi.*

Giovanni: *Le monete potrebbero avere lo stesso spessore.*

Luca: *Mi sembra poco verosimile: ho sempre visto le monete di maggior valore più spesse.*

Giovanni: *Allora potrebbero avere altezze proporzionali.*

Insegnante: *Dovete dire proporzionali a che cosa e in che modo.*

Giovanni: *Potrebbero essere due cilindri simili.*

Insegnante: *Che cosa intendi?*

Giovanni: *Il rapporto tra le misure è costante.*

Insegnante: *Quali misure?*

Giovanni: *Ad esempio quelle dei raggi di base e delle altezze.*

Insegnante: *Questa ipotesi è sensata.*

Enrico: *Proviamo con questa ipotesi a calcolare questo rapporto. Chiamiamolo  $k$ . I raggi di base li chiamiamo  $r$  (10 cent) e  $R$  (50 cent); le altezze rispettivamente  $h$  e  $H$ . Il volume del cilindro della moneta da 10 cent è  $\pi r^2 h$  e quello della moneta da 50 cent è  $\pi R^2 H$ . Poiché  $R = k r$ ;  $H = k h$ , il volume della moneta da 50 cent diventa  $\pi (k r)^2 k h = \pi k^3 r^2 h$ . Il rapporto tra il volume della moneta da 50 cent e quello della moneta da 10 cent è dunque  $k^3$ . Allora il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto dei raggi di base e delle altezze. Siccome questo rapporto è 5, risulta  $k = \sqrt[3]{5} = 1,71$  circa. La moneta da 50 cent ha un raggio che non è neppure il doppio di quello della moneta da 10 cent.*

Giovanni: *Con questa ipotesi, dunque, non è possibile metterne neppure due, ma solamente una. Questa risposta mi convince perché lo stesso accade con le nostre monete da 50 e 10 centesimi di euro.*

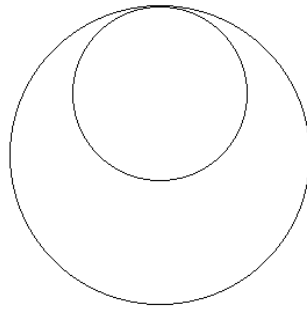


Figura 2

#### Considerazioni matematiche

I due cilindri, nella ipotesi fatta, sono figure simili (il docente può spiegare intuitivamente il significato di solidi simili). Il rapporto dei volumi è uguale al cubo del rapporto dei raggi di base oppure al cubo del rapporto delle altezze.

#### Sintesi matematica

Possono essere messe a confronto le tre situazioni, evidenziando la proporzionalità “lineare”, la proporzionalità “quadratica” e quella “cubica”.

## La moneta è truccata!

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare criticamente le informazioni. Selezionare, produrre ed usare appropriate distribuzioni grafiche.	Il ragionamento induttivo e le basi dell'inferenza.  Produrre grafici di relazioni.	Risolvere e porsi problemi  Dati e previsioni  Relazioni e funzioni  <u>Laboratorio di matematica</u>	Lingua italiana  Vita sociale

### Contesto.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale cercando di dare indicazioni di consapevolezza critica verso il mondo circostante. Giochi di sorte. Si propone alla classe un semplice problema che implica la necessità di una (forse prima) riflessione circa il modo di verificare se una congettura, o una ipotesi, è vera oppure è falsa. "Si gioca a Testa e Croce con una moneta di cui non si conosce la provenienza...magari per farci delle scommesse. Prima di fare delle puntate, si vorrebbe sapere, con una certa attendibilità, se essa è equilibrata o meno, cioè se si può attribuire la stessa probabilità alle 2 facce, Testa o Croce, cioè se  $P(T)=P(C)=1/2$  "

### Descrizione dell'attività.

Si propone inizialmente agli studenti di riflettere sul fatto che non sempre, quando sono di fronte a due eventi alternativi, devono pensare che tali eventi abbiano la stessa probabilità di verificarsi. Ciò perché in modo spontaneo, ma non sempre corrispondente alla realtà, gli studenti, messi a confronto con le prime considerazioni probabilistiche, sono portati a considerare equilibrata qualsiasi moneta, e quindi, ad attribuire la stessa probabilità alle due facce.

Per rendere più evidente la cosa facciamo notare che è senz'altro corretto attribuire un alto grado di fiducia, o "verità" a questa congettura, se ci troviamo fra le mani una moneta coniata dalla Zecca di Stato, mentre non sappiamo cosa si può dire se fra le mani ci è capitata una vecchia moneta o se, chi ci propone di usarla per il gioco, sia qualcuno che sospettiamo abbia truccato la moneta, ad esempio, in modo da far venire *mediamente* più Teste che Croci.

Un'altra possibile osservazione, che viene spontanea in classe, è sul significato di frequenza dell'evento: si può ragionevolmente ritenere che, anche se una moneta è equilibrata, in una serie limitata di osservazioni, ciò porti esattamente ad ottenere il 50% di Teste e 50% di Croci?

Prima conclusione che si raggiunge dalla discussione: un numero non molto grande di lanci può non essere sufficiente a scoprire, anche con monete equilibrate, se è attendibile l'ipotesi di equiprobabilità.

Ma vediamo cosa succede se facciamo crescere il numero di prove.

Un modo per “risolvere” il problema dato può essere chiamato “metodo empirico”, e risulta particolarmente significativo per la sua valenza didattica.

### “Metodo Empirico”

Per creare le premesse per il ragionamento induttivo, si propone ai ragazzi di usare una moneta di uso corrente, ad esempio da 2 Euro, per fare un numero di prove sempre più elevato ed osservare cosa succede della frequenza relativa di successo, ad esempio di Testa, costruendo il grafico che esprime l’andamento delle frequenze relative di successi  $F_i/N$  all’aumentare delle prove.

Sarà utile, infine, chiedersi se lo scostamento fra le Frequenze relative osservate, al variare del numero dei lanci, è lontano, in modo significativo da  $p = 1/2$ . Se ciò avviene diremo che la moneta è truccata.

1) Si invitano gli studenti a costruire una tabella delle osservazioni (*Tabella 1*), ripetendo più volte il lancio della stessa moneta. Si possono far fare, ad esempio, 60 lanci a ciascuno dei 20 studenti e poi raggruppare in un'unica tabella i dati ottenuti. Nella tabella che segue, dopo aver chiamato con  $N$  il numero complessivo dei lanci e con  $F_i$  e con  $F_i/N$  rispettivamente la frequenza cumulata e la frequenza cumulata relativa, si sono indicati gli estremi dell’intervallo con

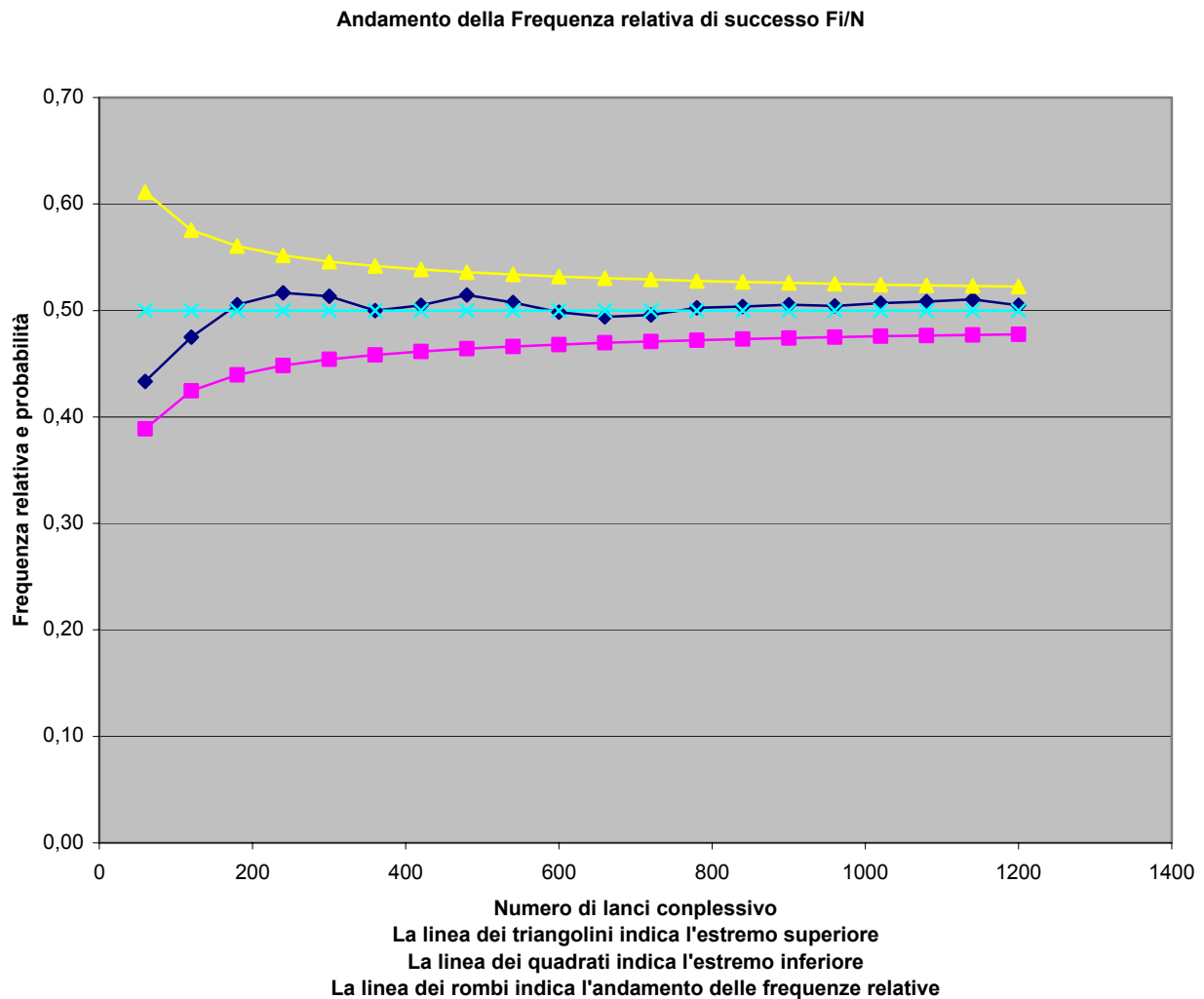
$$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1,5}{\sqrt{N}}. \text{ E' noto infatti che tale intervallo comprende statisticamente più del}$$

99% dei dati e che il centro di tale intervallo è la probabilità  $p$  richiesta. Diventa particolarmente significativo osservare dalla Tabella 1 la differenza fra la frequenza ottenuta  $F_i/N$  e la probabilità teorica indicata con  $p$  nell’ultima colonna.

Lanci complessivi	Freq. Cumulate	Frequenza relativa	Min	Max	Probabilità
N	$F_i$	$F_i/N$	$p - 1,5/\sqrt{N}$	$p + 1,5/\sqrt{N}$	$p$
60	31	0,52	0,39	0,61	0,5
120	65	0,54	0,42	0,58	0,5
180	98	0,54	0,44	0,56	0,5
240	121	0,50	0,45	0,55	0,5
300	151	0,50	0,45	0,55	0,5
360	183	0,51	0,46	0,54	0,5
420	216	0,51	0,46	0,54	0,5
480	246	0,51	0,46	0,54	0,5
540	271	0,50	0,47	0,53	0,5
600	301	0,50	0,47	0,53	0,5
660	331	0,50	0,47	0,53	0,5
720	367	0,51	0,47	0,53	0,5
780	400	0,51	0,47	0,53	0,5
840	430	0,51	0,47	0,53	0,5
900	460	0,51	0,47	0,53	0,5
960	489	0,51	0,47	0,53	0,5
1020	526	0,52	0,48	0,52	0,5
1080	561	0,52	0,48	0,52	0,5
1140	591	0,52	0,48	0,52	0,5
1200	619	0,52	0,48	0,52	0,5

Tabella 1

Si riportano i dati in un grafico su un foglio elettronico per vedere se la frequenza relativa si stringe attorno alla probabilità 0,5 in caso di moneta equilibrata.



*Figura 1*

La verifica empirica è simulata, con i limiti dipendenti dalla non perfetta casualità della funzione di Excel usata, sul foglio elettronico allegato: [Lancio moneta TCA](#) (Per attivare la simulazione è sufficiente inserire un qualsiasi dato nella casella gialla e premere invio). E' anche possibile effettuare la verifica realmente in classe, usando lo stesso foglio e inserendo manualmente i risultati del lancio di 60 monete e il numero dei successi ottenuti da ciascuno dei venti studenti, sostituendo così la funzione casuale che si presenta nella seconda colonna.

Il grafico mostra la convergenza "empirica" della frequenza relativa  $F_i/N$  dei successi alla probabilità  $p$ , attraverso il cosiddetto "grafico ad imbuto" che evidenzia come questa approssimazione migliori all'aumentare di  $N$ .

*Osservazione:* come è noto, per un certo valore di  $N$ , la distribuzione di  $F_i/N$  ha media  $p$  e varianza  $p(1-p)/N$ . Si può perciò delimitare una banda di oscillazione attorno a  $p = 0,5$ , visualizzata dal grafico ad imbuto, che rappresenta il valore atteso minimo e massimo delle frequenze relative. Le bande hanno ampiezza  $3 \cdot \sqrt{p(1-p)/N}$  rispetto a  $p$  e contengono circa il 99,7% dei casi. Al

cumularsi dei lanci, cioè al crescere di  $N$ , si vede come la frequenza relativa dei successi tende a stare nel grafico ad imbuto e ad avvicinarsi a  $p$ .

*Osservazione (qualitativa):* all'aumentare del numero di prove, aumenta la probabilità che la frequenza empirica si avvicini al valore teorico  $p = 0,5$  e, quindi, aumenta la fiducia che  $Fi/N$  sia una "buona" stima della vera probabilità.

Naturalmente, nel caso si operi con una moneta equilibrata, si osserva che ciò è solo una verifica empirica di quanto già si sapeva: che la frequenza relativa stima bene la probabilità, al crescere di  $N$ .

Ma in una serie non numerosa di osservazioni, può accadere che la stima sia "lontana" da 0,5, anche in una moneta equilibrata.

Come possiamo, perciò, operando all'inverso, valutare l'attendibilità di tale congettura se non abbiamo una forte informazione iniziale sulla moneta?

*Ipotesi nulla:* La moneta è equilibrata  $p = 0,5$

*Ipotesi alternativa:* La moneta non è equilibrata  $p \neq 0,5$

Possiamo operare in questo modo:

Costruiamo un criterio di decisione (o Test statistico) basato sulla distribuzione Normale standardizzata dello stimatore della  $Fi/N$

$$z = \frac{\frac{Fi}{N} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}}$$

Tale variabile, nel caso in cui la moneta sia equilibrata, si distribuisce come una variabile casuale Normale standardizzata (0,1), di cui si dispone delle necessarie tavole numeriche.

Il procedimento per decidere è il seguente:

Si decide di effettuare un numero di lanci "abbastanza grande": per la ragione appena esposte la frequenza relativa tende alla probabilità  $p$  (ad es. si possono fare  $N = 100$  lanci).

Si sceglie un grado di attendibilità funzionale alla decisione che vogliamo prendere; se, ad es. fissiamo una attendibilità del 95%, vuol dire che, nel caso la moneta sia equilibrata, siamo pronti ad accettare una probabilità di sbagliare il giudizio, a causa del campionamento, del 5%.

Si determina empiricamente il valore di  $Fi/N$  nel caso esaminato.

Si determina il valore di  $z$ , se  $p=0,5$  e  $N=100$ .

Si osserva se  $z$  cade nell'intervallo standardizzato  $(-1,96, +1,96)$ ; è noto che tale intervallo contiene il 95% circa dei valori di  $z$ , nell'ipotesi che  $p=0,5$  e  $N=100$ .

In conclusione:

si accetta l'ipotesi di moneta equilibrata se  $z$  è compreso nell'intervallo considerato;

si conclude, invece, che la moneta è truccata se  $z$  cade fuori dell'intervallo considerato.

Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*Tabella 2*). I simboli  $\alpha$  e  $\beta$  indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata in presenza di ipotesi nulla e in presenza di ipotesi alternativa. Il grado di attendibilità  $1 - \alpha = 0,95$  è stato fissato preliminarmente e così pure, ovviamente,  $\alpha = 0,05$ , che rappresenta la probabilità di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi nulla. Rimane indeterminata la probabilità  $\beta$  di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi alternativa.

<b>Regola di decisione</b>	<i>Situazione effettiva</i>	
	Ipotesi nulla (moneta equilibrata) $p = \frac{1}{2}$	Ipotesi alternativa (moneta non equilibrata) $p \neq \frac{1}{2}$
$z$ cade nell'intervallo $(-1,96, +1,96)$ : si accetta l'ipotesi nulla	Decisione corretta $1 - \alpha = 0,95$	Decisione errata $\beta$
$z$ cade fuori dell'intervallo $(-1,96, +1,96)$ : si accetta l'ipotesi alternativa	Decisione errata $\alpha = 0,05$	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 2

## L'affondamento del Titanic

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Identificare situazioni che richiedono di rilevare lo stesso carattere su una unità statistica formata da 2 elementi, o 2 caratteri diversi sulla stessa unità statistica. Impostare una tabella a doppia entrata; classificare i dati secondo due caratteri e riconoscere in essa i diversi elementi individuabili. Selezionare, produrre ed usare appropriate rappresentazioni grafiche delle distribuzioni doppie.	Distribuzione doppia di frequenze e tabella a doppia entrata. Distribuzioni condizionate e marginali. Principali rappresentazioni grafiche per le distribuzioni doppie rispetto a caratteri di qualsiasi natura. Concetto e significato di modello: dipendenza e indipendenza stocastica. Probabilità semplice, condizionata e composta.	<u>Risolvere e porsi problemi</u>  Dati e previsioni  Argomentare, congetturare, dimostrare	

### Contesto

Dipendenza stocastica.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale e dell'attualità.

Questo esempio è riferito a dati reali che facilmente possono colpire lo studente nella vita quotidiana attraverso notizie provenienti da televisione e giornali. La parte didatticamente più importante è l'attenzione da porre a dati e percentuali che, a prima vista, potrebbero fuorviare.

### Descrizione dell'attività

Il Titanic trasportava passeggeri in tre classi: 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>. Dopo l'affondamento fu stilata la relazione relativa all'incidente ed a tutte le operazioni di salvataggio successive. Alcuni dati sono sinteticamente riportati nelle seguenti tabelle:

Classe dei viaggiatori	Viaggiatori alla partenza			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1 <sup>a</sup> Classe	175	144	6	325
2 <sup>a</sup> Classe	168	93	24	285
3 <sup>a</sup> Classe	462	165	79	706
Totale	805	402	109	1316

Tabella 1

Classe dei viaggiatori	Sopravvissuti			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1 <sup>a</sup> Classe	57	140	6	203
2 <sup>a</sup> Classe	14	80	24	118
3 <sup>a</sup> Classe	75	76	27	178
Totale	146	296	57	499

Tabella 2

Classe dei viaggiatori	Morti o Dispersi			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1 <sup>a</sup> Classe	118	4	0	122
2 <sup>a</sup> Classe	154	13	0	167
3 <sup>a</sup> Classe	387	89	52	528
Totale	659	106	52	817

Tabella 3

*Osservazione 1:* I passeggeri delle tre classi non viaggiavano tutti nelle stesse condizioni. Ad esempio, i passeggeri di terza classe erano in gran parte emigranti con famiglia e figli, probabilmente non tutti erano perfettamente padroni della lingua inglese (c'erano emigranti francesi, ma anche inglesi usi a parlare in dialetto) e, inoltre, gli alloggi di terza erano collocati in luoghi della nave da cui non era immediato l'accesso al ponte dove si trovavano le lance di salvataggio. Al contrario, i passeggeri di prima erano persone facoltose abituate a parlare in inglese, in generale coppie senza figli in viaggio di divertimento e gli alloggi di prima si affacciavano sul ponte o erano nelle vicinanze. Per dare forza all'osservazione che in terza classe c'erano molti più bambini che nelle altre classi, si può costruire la Tabella 4 con i dati relativi ai bambini alla partenza.

Classe	Viaggiatori alla partenza		
	Bambini	In totale	Percentuale
1 <sup>a</sup> Classe	6	325	1,8 %
2 <sup>a</sup> Classe	24	285	8,4 %
3 <sup>a</sup> Classe	79	706	11,2 %
Totale	109	1316	8,3 %

Tabella 4

Effettivamente, in terza classe i bambini erano molto più numerosi, rappresentavano l'11,2% dei passeggeri di quella classe, in seconda rappresentavano l'8,4% dei passeggeri e in prima rappresentavano solo l'1,8% dei passeggeri. Rivolghiamoci alcune domande atte a capire come stavano effettivamente le cose.

**Domanda:** Osservando i dati riportati nelle tabelle, sembra possibile affermare che, a causa delle maggiori difficoltà incontrate nel salvataggio dei passeggeri di terza classe (con famiglie, con bambini, alloggiati in luoghi poco agevoli, con difficoltà di linguaggio), sono stati salvati più passeggeri di seconda e prima classe che di terza. Questa è solo una impressione o può essere confermata da una analisi puntuale ed approfondita dei dati?

Vediamo alcune (possibili) risposte, suddivise per "categorie".

**Prima risposta (uomini):** Per rispondere alla domanda, si incominci a prendere in considerazione i soli maschi. A partire dalle Tabella 2 e 3 si costruisca la Tabella 5. Salta agli occhi che più della metà dei sopravvissuti maschi (il 51,4%) è di terza classe). Verrebbe da dire, ad una prima affrettata (e, come vedremo, errata) conclusione, che tra gli uomini si sono salvati soprattutto quelli di terza classe (51,4%), seguiti da quelli di prima (39%) e da quelli di seconda (9,6%).

Classe	Sopravvissuti i uomini	Ripartizione percentuale dei sopravvissuti uomini	Uomini alla partenza	Ripartizione percentuale degli uomini alla partenza	Percentuale di sopravvissuti sui partenti

1 <sup>a</sup> Classe	57	39,0	175	21,7	32,6
2 <sup>a</sup> Classe	14	9,6	168	20,9	8,3
3 <sup>a</sup> Classe	75	51,4	462	57,4	16,2
Totale	146	100,0	805	100,0	18,1

Tabella 5

Guardando con più cura la tabella, però, si nota che anche alla partenza ci sono più uomini in terza classe (57,4%), che non in seconda (20,9%) o in prima (21,7%).

A questo punto si può provare a dare una prima risposta (corretta): tra gli uomini, alla partenza i viaggiatori di terza classe sono il 57,4%; tra i sopravvissuti, invece, gli uomini di terza sono solo il 51,4%. In seconda classe, invece: gli uomini sono il 20,9% dei partenti, ma il 9,6% dei sopravvissuti. Diversa ancora la situazione in prima: gli uomini sono il 21,7% dei partenti ed il 39% dei sopravvissuti.

L'ultima colonna della Tabella 5 riporta, per i maschi, la percentuale di sopravvissuti sui partenti, classe per classe. Si vede bene, adesso, che in terza i sopravvissuti sono il 16,2% dei partenti, in seconda sono l'8,3% e in prima il 32,6%.

*Osservazione 2:* Con quanto detto finora, si può fare riferimento alle probabilità condizionate.

Si provi a immaginare di pescare a caso un nome dall'elenco dei viaggiatori: se si pesca tra i nomi di prima classe, la probabilità di trovare il nome di un sopravvissuto è 0,326; se si pesca tra i nomi di seconda classe la probabilità di trovare il nome di un sopravvissuto è 0,083; se si pesca tra i nomi di terza classe la probabilità è 0,162. Appare così evidente, come avevamo sottolineato prima, che è molto più facile trovare il nome di un sopravvissuto in prima classe che non in terza perché le probabilità condizionate di sopravvivenza sono diverse e dipendono dalla classe del viaggiatore.

Seconda risposta (donne): E per le donne?

Si cominci a costruire la Tabella 6, analoga alla 5 ma relativa alle donne. Tra le sopravvissute, il 47,3% è di prima classe, il 27% è di seconda e solamente il 25,7% è di terza. Alla partenza, però, le percentuali sono molto diverse: il 35,8% delle donne viaggia in prima, il 23,1% in seconda e il 41,1% in terza.

Se poi si va a vedere l'ultima colonna della Tabella 5, che riporta, per le donne, la percentuale di sopravvissute sulle partenti, classe per classe, si vede bene che in terza le sopravvissute sono il 46,1% delle partenti, in seconda classe sono l'86,0% e in prima sono state salvate praticamente tutte le passeggere (140 su 144, pari al 97,2%).

Classe	Sopravvissute donne	Ripartizione percentuale delle sopravvissute e donne	Donne alla partenza	Ripartizione percentuale delle donne alla partenza	Percentuale di sopravvissute e sulle partenti
1 <sup>a</sup> Classe	140	47,3	144	35,8	97,2
2 <sup>a</sup> Classe	80	27,0	93	23,1	86,0
3 <sup>a</sup> Classe	76	25,7	165	41,1	46,1
Totale	296	100,0	402	100,0	73,6

Tabella 6

Anche adesso si potrebbe dire che, se si pesca a caso un nome dall'elenco delle viaggiatrici, la probabilità di trovare il nome di una sopravvissuta è 0,972, se si pesca tra i nomi di prima classe; è

0,86, se si pesca tra i nomi di seconda classe; è infine 0,461, se si pesca tra i nomi di terza classe. Anche per le donne, è dunque molto più facile trovare il nome di una sopravvissuta in prima classe che non in terza.

*Osservazione 3:* Anche in questo caso si vede che le probabilità di sopravvivenza sono condizionate alla classe del viaggiatore.

Terza risposta (*tutti = uomini+donne+bambini*): Alla domanda di partenza, può essere risposto anche prendendo in considerazione tutti i passeggeri complessivamente considerati, maschi e femmine, compresi i bambini (*cf. Tabella 7*).

La domanda di partenza può essere riformulata nei seguenti modi alternativi fra loro equivalenti:

- i passeggeri delle tre classi hanno avuto le stesse opportunità di salvezza?
- la appartenenza a una classe ha modificato in meglio o in peggio le opportunità di salvezza?
- la conclusione favorevole del viaggio è dipesa dalla classe?

Se le opportunità di salvezza sono state (più o meno) eguali per tutti i passeggeri di tutte le classi, in tutte e tre le classi si deve trovare (più o meno) la stessa percentuale di sopravvissuti. Complessivamente, i sopravvissuti sono stati 499 su 1316 passeggeri, pari al 37,9%. La stessa percentuale di sopravvissuti si deve trovare in tutte tre le classi.

Per quanto riguarda la prima classe, il 37,9% di 325 è 123,7: questo è il numero atteso di sopravvissuti nella prima classe, nella ipotesi che questi passeggeri abbiano avuto le stesse opportunità di salvezza degli altri.

Per la seconda classe il 37,9% di 285 è 108,1: questo è il numero atteso di sopravvissuti in seconda, nella stessa ipotesi di indipendenza delle opportunità di salvezza dalla classe.

Analogamente, per quanto riguarda la terza classe, il 37,9% di 706 è 267,7: questo è il numero atteso di sopravvissuti in terza.

Si procede nello stesso modo al calcolo dei morti e dispersi classe per classe. Complessivamente, tra morti e dispersi ci sono stati 817 passeggeri su 1316, pari al 62,1%. La stessa percentuale di dispersi si dovrebbe trovare nelle tre classi.

I numeri attesi, così calcolati, di sopravvissuti e di morti e dispersi sono riportati in ogni casella della tabella 7, in basso a destra, in carattere corsivo.

Si vede che in prima classe i sopravvissuti sono 203, più di quanti (123,2) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. In terza classe, invece, i sopravvissuti sono 178, meno di quanti (267,7) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. Per quanto riguarda i dispersi, avviene il contrario. In prima classe i dispersi sono 122, meno di quanti (201,8) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. In terza classe, invece, i dispersi sono 528, più di quanti (438,3) risultano calcolati nella ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe.

Complessivamente, questi risultati permettono di affermare che effettivamente il numero di sopravvissuti, da un lato, e quello di morti e dispersi, dall'altro, sono in qualche modo collegati alla classe dei viaggiatori.

Classe dei viaggiatori	Sopravvissuti	Morti o Dispersi	Totale
1 <sup>a</sup> Classe	203 <i>123,2</i>	122 <i>201,8</i>	325
2 <sup>a</sup> Classe	118 <i>108,1</i>	167 <i>176,9</i>	285
3 <sup>a</sup> Classe	178 <i>267,7</i>	528 <i>438,3</i>	706
Totale	499	817	1316

*Tabella 7*

*Osservazione 4:* Si provi a generalizzare i ragionamenti fatti a riguardo dei dati della tabella 7 riguardo al calcolo delle frequenze attese nell'ipotesi di indipendenza tra esito del viaggio e classe. La tabella 8 è fatta come la 7, l'unica differenza è che si riferisce al caso generale di due variabili X con h modalità (h righe) e Y con k modalità (k colonne). Le frequenze osservate, riportate in ogni casella nella prima riga, sono indicate con  $f_{ij}$ ; le frequenze attese (calcolate nell'ipotesi di indipendenza tra classe e esito del viaggio), riportate in ogni casella nella seconda riga, sono indicate con  $\hat{f}_{ij}$ . Ricordando come sono state calcolate le frequenze attese della tabella 7, nella tabella 8 risulta, in ogni casella,  $\hat{f}_{ij} = T_i \cdot T_j / T_{..}$ .

*Osservazione 5:* Verificare che in una tabella a doppia entrata, come la 7 o la 8:

- in ogni riga la somma delle frequenze osservate risulta eguale alla somma delle frequenze attese:  $\sum_{j=1}^k f_{ij} = \sum_{j=1}^k \hat{f}_{ij} = T_i \quad (i=1,2,\dots,h)$ ;
- in ogni colonna la somma delle frequenze osservate risulta eguale alla somma delle frequenze attese:  $\sum_{i=1}^h f_{ij} = \sum_{i=1}^h \hat{f}_{ij} = T_j \quad (j=1,2,\dots,k)$ ;
- il totale generale delle frequenze osservate risulta eguale al totale delle frequenze attese:  $\sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k f_{ij} = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \hat{f}_{ij} = T_{..} \quad (i=1,2,\dots,h; j=1,2,\dots,k)$ .

*Osservazione 6:* Usando la tabella 7 come un'urna e prendendo in considerazione la prima casella si possono facilmente calcolare tre probabilità: quella di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe, quella di estrarre a caso il nome di un viaggiatore sopravvissuto, quella di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe sopravvissuto.

$P(T^a) = P(\text{di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe}) = 325/1316$

$P(S) = P(\text{di estrarre a caso il nome di un viaggiatore sopravvissuto}) = 499/1316$

$P(T^a \cap S) = P(\text{di estrarre a caso il nome di un viaggiatore di prima classe sopravvissuto}) = 203/1316$

Risulta facile verificare la non indipendenza tra i due eventi: *i*) viaggiatore di prima classe e *ii*) viaggiatore sopravvissuto:

$P(T^a) \cdot P(S) = (325/1316) \cdot (499/1316) = 0,09364 \neq P(T^a \cap S) = 203/1316 = 0,1543$

Variabile X	Variabile Y					Totale
	y <sub>1</sub>	...	y <sub>j</sub>	...	y <sub>k</sub>	
x <sub>1</sub>	$f_{11}$ $\hat{f}_{11}$	...	$f_{1j}$ $\hat{f}_{1j}$	...	$f_{1k}$ $\hat{f}_{1k}$	$T_{1.}$
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
x <sub>i</sub>	$f_{i1}$ $\hat{f}_{i1}$	...	$f_{ij}$ $\hat{f}_{ij}$	...	$f_{ik}$ $\hat{f}_{ik}$	$T_{i.}$
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
x <sub>h</sub>	$f_{h1}$ $\hat{f}_{h1}$	...	$f_{hj}$ $\hat{f}_{hj}$	...	$f_{hk}$ $\hat{f}_{hk}$	$T_{h.}$
Totale	$T_{.1}$	...	$T_{.j}$	...	$T_{.k}$	$T_{..}$

Tabella 8

*Osservazione 7:* Per valutare le distanze tra le frequenze osservate della tabella 7 (in carattere normale) e quelle attese nella ipotesi di indipendenza tra classe e esito del viaggio (in corsivo) è possibile utilizzare anche l'indice sintetico  $\chi^2$ .

Nel caso generale della tabella 8, l'espressione dell'indice è:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2}{\hat{f}_{ij}}$$

Nel caso particolare della tabella 7, l'indice risulta:

$$\chi^2 = (203-123,2)^2/123,2 + (122-201,8)^2/201,8 + (118-108,1)^2/108,1 + (167-176,9)^2/176,9 + (178-267,7)^2/267,7 + (528-438,3)^2/438,3 = 133,1.$$

Questo valore indica un allontanamento dalla situazione di indipendenza stocastica e, quindi, una dipendenza tra classe ed esito del viaggio.

*Osservazione conclusiva:* Si possono fare due ulteriori considerazioni sul risultato numerico del calcolo dell'indice  $\chi^2$ .

- Il valore di  $\chi^2$  è determinato, oltre che dalla eventuale dipendenza tra i due caratteri X e Y che si vuole misurare, anche dalla numerosità totale T. Infatti, se si moltiplicano tutte le frequenze della tabella 8, e quindi anche il totale T, per una costante  $k > 0$ , le proporzioni interne alla tabella rimangono invariate, ma si verifica facilmente che il nuovo indice risulta  $k\chi^2$

$$\sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(kf_{ij} - k\hat{f}_{ij})^2}{k\hat{f}_{ij}} = k\chi^2$$

- Per avere un indice che permetta confronti e giudizi, senza essere influenzato dal numero totale T dei casi osservati e della dimensione  $h \times k$  della tabella, si utilizza un indice normalizzato  $\tilde{\chi}^2$  compreso tra 0 (nel caso di indipendenza) ed 1 (nel caso di massima dipendenza, compatibile con la struttura della tabella: dimensione  $h \times k$  e numerosità T).

$$0 \leq \tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{T \min\{(h-1); (k-1)\}} < 1.$$

Nel caso della tabella 7, l'indice normalizzato risulta:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{133,1}{1316 \min\{(3-1); (2-1)\}} = \frac{133,1}{1316 \cdot 2} = 0,05.$$

Questo valore misura l'allontanamento dalla situazione di indipendenza e indica, quindi, una certa dipendenza tra classe ed esito del viaggio.

## E che sia negativa!

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Riconoscere situazioni problematiche affrontabili con metodi matematici analoghi: riconoscere fenomeni riconducibili ad uno stesso modello matematico ai fini di attività di interpretazione o di previsione. Porsi problemi aperti ed esplicitare le possibilità che esistano formalizzazioni matematiche diverse di uno stesso problema.	Equazioni polinomiali: numero delle soluzioni e algoritmi di approssimazione.  Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali.  Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.	<u>Porsi e risolvere problemi</u>  Numeri e algoritmi  Relazioni e funzioni  Argomentare, congetturare, dimostrare	

### Contesto

Polinomi.

Il contesto è matematico e, più precisamente, riguarda i polinomi, e le equazioni polinomiali in una variabile.

Il punto essenziale è l'utilizzo di proprietà importanti delle funzioni per avere informazioni su particolari richieste. Nella soluzione del problema posto si possono seguire due procedure risolutive diverse, una di tipo esclusivamente concettuale, una di tipo grafico e dunque più pragmatica, per ottenere la stessa risposta.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Si chiede inizialmente di rispondere alla seguente domanda:

L'equazione  $x^3 + \pi x^2 + 1,763 = 0$  può avere una soluzione negativa?

I coefficienti sono stati scelti ovviamente in modo tale da dissuadere gli studenti dal fare i calcoli, anche se è probabile che qualcuno ci provi lo stesso.

Inizia a questo punto la discussione su come si possa rispondere alla domanda. E' probabile che emergano due diverse indicazioni. Una che privilegia l'aspetto computazionale, l'altra che privilegia l'aspetto grafico. In entrambi i casi si procederà in un primo momento per tentativi, ma l'insegnante farà attenzione a sottolineare quei tentativi che si basano, anche inconsapevolmente, sul concetto di continuità.

Si analizza l'aspetto computazionale. Sicuramente si inizierà col valutare la funzione in corrispondenza di  $x = 0$ ; qui la funzione assume chiaramente un valore positivo. Altrettanto facilmente ci si rende conto che lo stesso accade per ogni valore positivo di  $x$ . Gli studenti cominceranno allora a dare a  $x$  valori anche negativi; il primo di essi potrebbe essere  $x = -1$ , il valore è ancora positivo. Per  $x = -4$  si trova "finalmente" un valore negativo della funzione. A questo punto non solo ci si rende conto che nell'intervallo  $[-4; -3]$  ci sarà sicuramente una soluzione, ma che non ce ne saranno altre in quanto il polinomio si mantiene negativo per ogni valore minore di  $-4$ .

Il secondo metodo, quello grafico potrebbe, un primo momento, mettere in crisi gli studenti, per la difficoltà di tracciare il grafico di una funzione polinomiale di 3° grado della quale non è noto calcolare gli zeri, se non ricorrendo di nuovo al computo di alcuni valori. L'insegnante suggerirà allora di trasformare l'equazione in un'altra equivalente, ma con un diverso significato concettuale.

La scrittura  $x^3 + \pi x^2 = -1,763$  può essere pensata come l'intersezione di una retta di valore costante e di un polinomio di 3° grado, più semplice del precedente. L'insegnante può comunque approfittare dell'occasione per far riprendere agli studenti, a livello qualitativo, l'andamento di una funzione polinomiale, il suo comportamento per valori che tendono all'infinito, il numero massimo dei suoi zeri.

La funzione  $y = x^3 + \pi x^2$ , a meno della traslazione, può essere scritta  $y = x^2(x + \pi)$ ; essa tocca l'asse  $x$  in  $x = 0$  e in  $x = -\pi$ . Le considerazioni sul segno fanno anche capire che la funzione si mantiene negativa per valori di  $x < -\pi$ , mentre è sempre positiva per tutti gli altri valori.

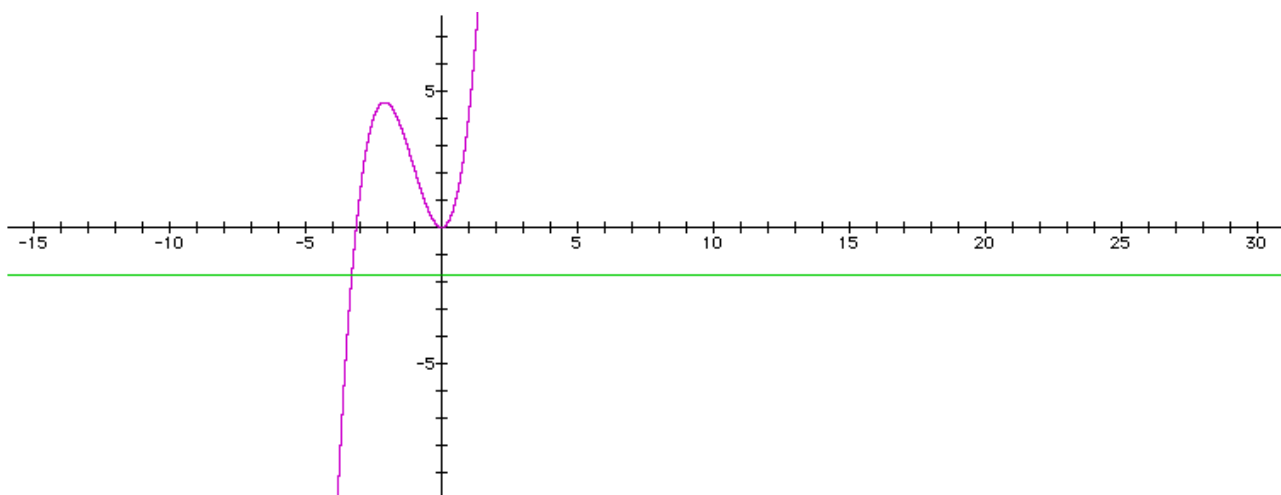


Figura 1

Il grafico fa capire che le due funzioni hanno una sola intersezione, che in questo caso è negativa, e – se disegnato con una certa accuratezza – ci da anche una stima numerica della soluzione.

### Seconda fase

Si considera adesso l'equazione  $x^3 + ax^2 + b = 0$  a cui si vogliono applicare i due metodi proposti nell'esempio precedente. È interessante sottolineare subito come la nozione di continuità sia l'elemento fondamentale che consente di portare avanti con successo le due procedure, anche da un punto di vista generale.

Procedendo per casi gli studenti si renderanno conto che se  $a$  e  $b$  sono positivi, la situazione ricalca del tutto quella precedente. Gli altri casi prevedono però la considerazione di ulteriori sottocasi che portano a rendere complessa la discussione generale dell'equazione. Tuttavia si possono trovare altre condizioni: l'intersezione del polinomio con l'asse  $x$ , il fatto che per  $x$  che tende a meno infinito il polinomio ha sicuramente segno negativo e che per  $x$  tendente a più infinito il polinomio ha segno positivo. Quindi si può affermare che c'è sempre almeno una soluzione reale, di cui però è necessario discutere il segno.

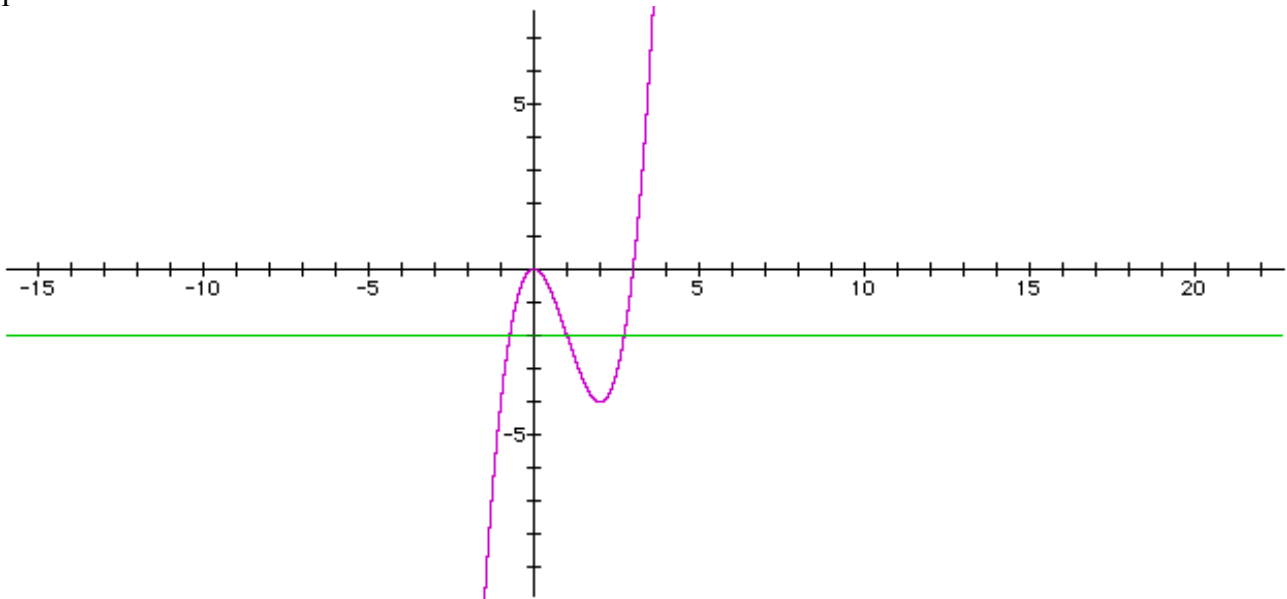
Il metodo grafico visto in precedenza porta invece un po' più avanti. Scriviamo ancora l'equazione come  $x^3 + ax^2 = -b$ , riferendoci dunque all'intersezione delle due funzioni

$$y = -b, \text{ e } y = x^3 + ax^2 = x^2(x+a).$$

La prima è una retta parallela all'asse delle ascisse, nel semipiano inferiore o superiore a seconda che  $b$  sia positivo o negativo. La seconda interseca l'asse  $x$  in  $x = 0$  e in  $x = -a$ , è positiva per  $x > -a$ , e negativa per  $x < -a$ .

Se  $a$  è positivo si ha un grafico con lo stesso andamento di quello visto nell'esempio precedente, ovvero c'è una soluzione negativa per  $b$  positivo e una o tre soluzioni se  $b$  è negativo.

Se  $a$  è negativo, il grafico ha un andamento del tipo indicato in figura (in cui abbiamo posto  $a = -3$ ).  
 Se  $b$  è positivo,  $c$  è sicuramente una soluzione negativa, se  $b$  è negativo  $c$  è solo una soluzione positiva.



*Figura 2*

### **Possibili sviluppi**

Il metodo utilizzato, che consiste nell'interpretare un'equazione come intersezione di due funzioni, portando opportunamente alcuni termini a secondo membro, può essere utilizzato vantaggiosamente in molte situazioni, anche per funzioni non polinomiali. Si provi ad esempio a determinare gli intervalli in cui si trovano gli zeri dell'equazione  $2\ln(x+2) - x = 0$ .

Senza riferirsi alle funzioni, ma utilizzando considerazioni teoriche in modo analogo a quanto fatto nel primo esempio, si può rispondere subito alla domanda, apparentemente mostruosa:

L'equazione  $x^5 - 7\text{Log}(x + 1) + \sin x - (x + 1)^{1/2} = 0$  ha radici reali? La risposta è sì (infatti per  $x = 0$  il primo membro assume valore  $-1$ , mentre per  $x = 9$  l'espressione è abbondantemente positiva).

## La moneta è truccata!

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Confrontare schematizzazioni matematiche diverse di uno stesso fenomeno o situazione in relazione ai loro limiti di validità, alle esigenze (in particolare di descrizione o di interpretazione o di previsione), e alle risorse (tempo, conoscenze, mezzi tecnologici) disponibili. Valutare criticamente le informazioni. Selezionare, produrre ed usare appropriate distribuzioni grafiche.	Il ragionamento induttivo e le basi dell'inferenza.  Produrre grafici di relazioni.	Risolvere e porsi problemi  Dati e previsioni  Relazioni e funzioni  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Statistica.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; per quest'ultimo aspetto si colloca nell'ambito della vita sociale cercando di dare indicazioni di consapevolezza critica verso il mondo circostante. Giochi di sorte. Si propone alla classe un semplice problema che implica la necessità di una (forse prima) riflessione circa il modo di verificare se una congettura, o una ipotesi, è vera oppure è falsa. "Si gioca a Testa e Croce con una moneta di cui non si conosce la provenienza...magari per farci delle scommesse. Prima di fare delle puntate, si vorrebbe sapere, con una certa attendibilità, se essa è equilibrata o meno, cioè se si può attribuire la stessa probabilità alle 2 facce, Testa o Croce, cioè se  $P(T)=P(C)=1/2$  "

### Descrizione dell'attività

Si propone inizialmente agli studenti di riflettere sul fatto che non sempre, quando sono di fronte a due eventi alternativi, devono pensare che tali eventi abbiano la stessa probabilità di verificarsi. Ciò perché in modo spontaneo, ma non sempre corrispondente alla realtà, gli studenti, messi a confronto con le prime considerazioni probabilistiche, sono portati a considerare equilibrata qualsiasi moneta, e quindi, ad attribuire la stessa probabilità alle due facce.

Per rendere più evidente la cosa facciamo notare che è senz'altro corretto attribuire un alto grado di fiducia, o "verità" a questa congettura, se ci troviamo fra le mani una moneta coniata dalla Zecca di Stato, mentre non sappiamo cosa si può dire se fra le mani ci è capitata una vecchia moneta o se, chi ci propone di usarla per il gioco, sia qualcuno che sospettiamo abbia truccato la moneta, ad esempio, in modo da far venire *mediamente* più Teste che Croci.

Un'altra possibile osservazione, che viene spontanea in classe, è sul significato di frequenza dell'evento: si può ragionevolmente ritenere che, anche se una moneta è equilibrata, in una serie limitata di osservazioni, ciò porti esattamente ad ottenere il 50% di Teste e 50% di Croci?

Prima conclusione che si raggiunge dalla discussione: un numero non molto grande di lanci può non essere sufficiente a scoprire, anche con monete equilibrate, se è attendibile l'ipotesi di equiprobabilità.

Ma vediamo cosa succede se facciamo crescere il numero di prove.

Un modo per “risolvere” il problema dato può essere chiamato “metodo empirico”, e risulta particolarmente significativo per la sua valenza didattica.

### “Metodo Empirico”

Per creare le premesse per il ragionamento induttivo, si propone ai ragazzi di usare una moneta di uso corrente, ad esempio da 2 Euro, per fare un numero di prove sempre più elevato ed osservare cosa succede della frequenza relativa di successo, ad esempio di Testa, costruendo il grafico che esprime l’andamento delle frequenze relative di successi  $F_i/N$  all’aumentare delle prove.

Sarà utile, infine, chiedersi se lo scostamento fra le Frequenze relative osservate, al variare del numero dei lanci, è lontano, in modo significativo da  $p = 1/2$ . Se ciò avviene diremo che la moneta è truccata.

1) Si invitano gli studenti a costruire una tabella delle osservazioni (*Tabella 1*), ripetendo più volte il lancio della stessa moneta. Si possono far fare, ad esempio, 60 lanci a ciascuno dei 20 studenti e poi raggruppare in un’unica tabella i dati ottenuti. Nella tabella che segue, dopo aver chiamato con  $N$  il numero complessivo dei lanci e con  $F_i$  e con  $F_i/N$  rispettivamente la frequenza cumulata e la frequenza cumulata relativa, si sono indicati gli estremi dell’intervallo con

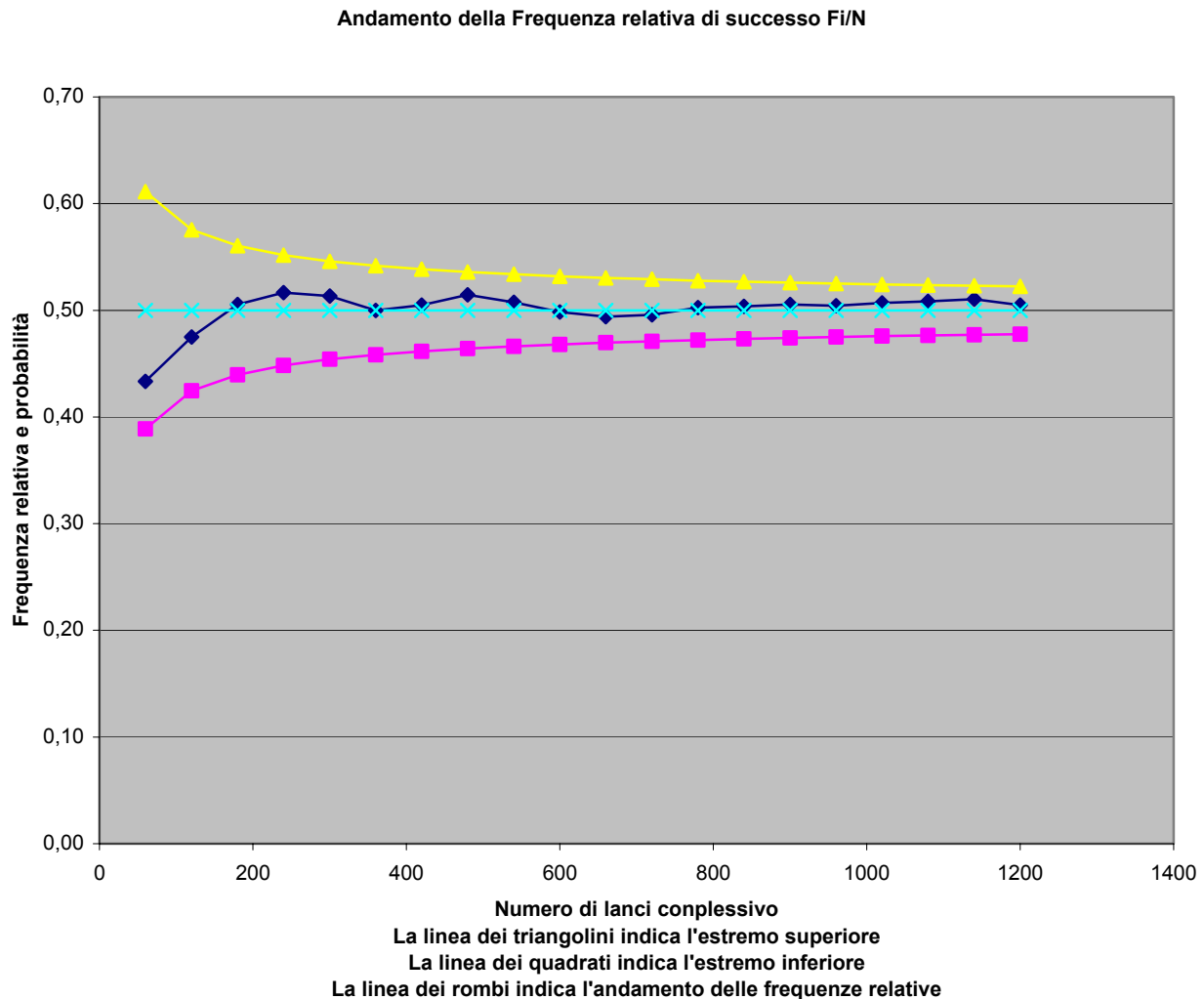
$p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1,5}{\sqrt{N}}$ . E’ noto infatti che tale intervallo comprende statisticamente più del

99% dei dati e che il centro di tale intervallo è la probabilità  $p$  richiesta. Diventa particolarmente significativo osservare dalla *Tabella 1* la differenza fra la frequenza ottenuta  $F_i/N$  e la probabilità teorica indicata con  $p$  nell’ultima colonna.

Lanci complessivi	Freq. Cumulate	Frequenza relativa	Min	Max	Probabilità
N	$F_i$	$F_i/N$	$p - 1,5/\sqrt{N}$	$p + 1,5/\sqrt{N}$	$p$
60	31	0,52	0,39	0,61	0,5
120	65	0,54	0,42	0,58	0,5
180	98	0,54	0,44	0,56	0,5
240	121	0,50	0,45	0,55	0,5
300	151	0,50	0,45	0,55	0,5
360	183	0,51	0,46	0,54	0,5
420	216	0,51	0,46	0,54	0,5
480	246	0,51	0,46	0,54	0,5
540	271	0,50	0,47	0,53	0,5
600	301	0,50	0,47	0,53	0,5
660	331	0,50	0,47	0,53	0,5
720	367	0,51	0,47	0,53	0,5
780	400	0,51	0,47	0,53	0,5
840	430	0,51	0,47	0,53	0,5
900	460	0,51	0,47	0,53	0,5
960	489	0,51	0,47	0,53	0,5
1020	526	0,52	0,48	0,52	0,5
1080	561	0,52	0,48	0,52	0,5
1140	591	0,52	0,48	0,52	0,5
1200	619	0,52	0,48	0,52	0,5

*Tabella 1*

Si riportano i dati in un grafico su un foglio elettronico per vedere se la frequenza relativa si stringe attorno alla probabilità 0,5 in caso di moneta equilibrata.



*Figura 1*

La verifica empirica è simulata, con i limiti dipendenti dalla non perfetta casualità della funzione di Excel usata, sul foglio elettronico allegato: [Lancio moneta TCA](#)

(Per attivare la simulazione è sufficiente inserire un qualsiasi dato nella casella gialla e premere invio). E' anche possibile effettuare la verifica realmente in classe, usando lo stesso foglio e inserendo manualmente i risultati del lancio di 60 monete e il numero dei successi ottenuti da ciascuno dei venti studenti, sostituendo così la funzione casuale che si presenta nella seconda colonna.

Il grafico mostra la convergenza "empirica" della frequenza relativa  $F_i/N$  dei successi alla probabilità  $p$ , attraverso il cosiddetto "grafico ad imbuto" che evidenzia come questa approssimazione migliori all'aumentare di  $N$ .

*Osservazione:* come è noto, per un certo valore di  $N$ , la distribuzione di  $F_i/N$  ha media  $p$  e varianza  $p(1-p)/N$ . Si può perciò delimitare una banda di oscillazione attorno a  $p = 0,5$ , visualizzata dal grafico ad imbuto, che rappresenta il valore atteso minimo e massimo delle frequenze relative. Le bande hanno ampiezza  $3 \cdot \sqrt{p(1-p)/N}$  rispetto a  $p$  e contengono circa il 99,7% dei casi. Al cumularsi dei lanci, cioè al crescere di  $N$ , si vede come la frequenza relativa dei successi tende a stare nel grafico ad imbuto e ad avvicinarsi a  $p$ .

*Osservazione (qualitativa):* all'aumentare del numero di prove, aumenta la probabilità che la frequenza empirica si avvicini al valore teorico  $p = 0,5$  e, quindi, aumenta la fiducia che  $Fi/N$  sia una "buona" stima della vera probabilità.

Naturalmente, nel caso si operi con una moneta equilibrata, si osserva che ciò è solo una verifica empirica di quanto già si sapeva: che la frequenza relativa stima bene la probabilità, al crescere di  $N$ .

Ma in una serie non numerosa di osservazioni, può accadere che la stima sia "lontana" da 0,5, anche in una moneta equilibrata.

Come possiamo, perciò, operando all'inverso, valutare l'attendibilità di tale congettura se non abbiamo una forte informazione iniziale sulla moneta?

*Ipotesi nulla:* La moneta è equilibrata  $p = 0,5$

*Ipotesi alternativa:* La moneta non è equilibrata  $p \neq 0,5$

Possiamo operare in questo modo:

Costruiamo un criterio di decisione (o Test statistico) basato sulla distribuzione Normale standardizzata dello stimatore della  $Fi/N$

$$z = \frac{\frac{Fi}{N} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}}$$

Tale variabile, nel caso in cui la moneta sia equilibrata, si distribuisce come una variabile casuale Normale standardizzata (0,1), di cui si dispone delle necessarie tavole numeriche.

Il procedimento per decidere è il seguente:

Si decide di effettuare un numero di lanci "abbastanza grande": per la ragione appena esposte la frequenza relativa tende alla probabilità  $p$  (ad es. si possono fare  $N = 100$  lanci).

Si sceglie un grado di attendibilità funzionale alla decisione che vogliamo prendere; se, ad es. fissiamo una attendibilità del 95%, vuol dire che, nel caso la moneta sia equilibrata, siamo pronti ad accettare una probabilità di sbagliare il giudizio, a causa del campionamento, del 5%.

Si determina empiricamente il valore di  $Fi/N$  nel caso esaminato.

Si determina il valore di  $z$ , se  $p=0,5$  e  $N=100$ .

Si osserva se  $z$  cade nell'intervallo standardizzato  $(-1,96, +1,96)$ ; è noto che tale intervallo contiene il 95% circa dei valori di  $z$ , nell'ipotesi che  $p=0,5$  e  $N=100$ .

In conclusione:

si accetta l'ipotesi di moneta equilibrata se  $z$  è compreso nell'intervallo considerato;

si conclude, invece, che la moneta è truccata se  $z$  cade fuori dell'intervallo considerato.

Il processo di decisione può essere schematizzato in una tabella a doppia entrata (*Tabella 2*). I simboli  $\alpha$  e  $\beta$  indicano, rispettivamente, la probabilità di prendere una decisione errata in presenza di ipotesi nulla e in presenza di ipotesi alternativa. Il grado di attendibilità  $1 - \alpha = 0,95$  è stato fissato preliminarmente e così pure, ovviamente,  $\alpha = 0,05$ , che rappresenta la probabilità di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi nulla. Rimane indeterminata la probabilità  $\beta$  di sbagliare nel caso sia vera l'ipotesi alternativa.

<b>Regola di decisione</b>	<i>Situazione effettiva</i>	
	Ipotesi nulla (moneta equilibrata) $p = \frac{1}{2}$	Ipotesi alternativa (moneta non equilibrata) $p \neq \frac{1}{2}$
$z$ cade nell'intervallo $(-1,96, +1,96)$ : si accetta l'ipotesi nulla	Decisione corretta $1 - \alpha = 0,95$	Decisione errata $\beta$
$z$ cade fuori dell'intervallo $(-1,96, +1,96)$ : si accetta l'ipotesi alternativa	Decisione errata $\alpha = 0,05$	Decisione corretta $1 - \beta$

Tabella 2

## Elementi di prove di verifica

### 1. Bisogna essere precisi

Se abbiamo un cubo di lato  $\sqrt{2}$  cm ed una sfera in esso inscritta, di quante cifre decimali esatte di  $\sqrt{2}$  e di  $\pi$  abbiamo bisogno per esprimere il volume del solido differenza con due cifre decimali esatte? E se volessimo 4 cifre decimali esatte per il risultato finale?

### 2. In gita scolastica

Un pulmino per una gita scolastica può trasportare 36 passeggeri. Se in una scuola ci sono 1129 studenti e 53 professori, quanti pulmini sono necessari?

E se si prendono pullman grandi da 61 posti?

Rispondere alle stesse domande tenendo conto anche che un pullman costa  $\frac{2}{3}$  in più di un pulmino.

### 3. Al cinema dove? E con chi?

Andrea, Beppe, Carlo, Dario ed Elena vanno al cinema e si siedono in una fila di 10 poltroncine. Supponendo che altre 5 persone si siedano nella stessa fila, qual è:

- la probabilità che Andrea e Beppe siano seduti accanto?
- la probabilità che Carlo, Dario ed Elena siano seduti accanto?
- la probabilità che Carlo, Dario ed Elena siano seduti accanto con Andrea e Beppe lontani?
- la probabilità che Carlo sia seduto fra Dario ed Elena (ma non necessariamente adiacente)?

Nota: Ci si deve porre il problema di come si siedono (*a caso* oppure no?): anche questo problema può essere affrontato in più modi diversi.

E se ci si chiedesse:

- la probabilità che Andrea e Beppe siano seduti accanto ad una ragazza col maglione rosso?
- la probabilità che Andrea e Tiziana non siano seduti accanto?
- la probabilità che Dario decida di non andare al cinema?

di quali altre informazioni avremmo bisogno?

### 4. Chi è più la più grande?

Se tagliamo una sfera con un piano è facile vedere che la più grande superficie ottenibile è un cerchio con centro nel centro della sfera. E se tagliamo un cubo con un piano, qual è la più grande superficie ottenibile? E' possibile determinare il numero di piastrelle quadrate (di lato 1 cm) sufficiente per ricoprire tale superficie, supponendo il cubo di lato 1 m?

### 5. Serve conoscere?

Si estraggono 2 carte da un mazzo di 52. Qual è la probabilità che la seconda estratta sia una carta di Cuori?

E se si estraggono 9 carte da un mazzo di 52, qual è la probabilità che la nona carta estratta sia di Picche?

Nota: Ci deve porre il problema della "conoscenza", oppure no, delle carte già estratte e si può affrontare il problema in modi diversi (anche derivanti dall'intuizione).

### 6. Euro e Dollari

Alla data del 20 febbraio 2003 un Euro vale 1,07 Dollari.

- a. quanti Euro vale un dollaro?
- b. Come varia il cambio Euro – Dollaro, se il Dollaro è svalutato del 10%?

### 7. Zeri di funzioni

Nell'intervallo  $[0; 1]$  la funzione  $3x^2 - e^x + 0,5$  ha uno zero. Perché? Possiamo dire che ne ha un altro per  $x > 1$ ?

### 8. Altezze, mediane e bisettrici.

In un triangolo ABC si tracciano l'altezza, la bisettrice e la mediana uscenti dal vertice C. Le tre rette si possono susseguire in ordini diversi, e in alcuni casi coincidere. A che tipi di triangoli danno luogo le varie configurazioni?

### 9. Calcio-scommesse.

Nell'ultima domenica di campionato due agenzie di scommesse davano la vittoria della Juventus sul Bologna rispettivamente  $3 : 1$  e  $5 : 2$ .

- a. Quali erano le probabilità di vittoria del Bologna?
- b. Perché, secondo te, le due agenzie hanno dato quote diverse?

*(Nel rispondere considera anche che le agenzie devono avere un margine di guadagno).*

## Riferimenti bibliografici

- Barsanti, M.- Menghini, M. (1998), *Strategie matematiche: Problemi di analisi*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore, B. (1993), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Franco Angeli, Collana "La scuola se - Progetto MA.S.E", Milano.
- de Finetti, B. (1959), *Matematica Logico Induttiva*, Cremonese, Roma.
- Jaglom, I.M. (1983), *Trasformazioni geometriche: Le Isometrie*, Zanichelli Bologna.
- Maraschini, W. - Menghini, M. - Palma, M. (1997), *Strategie matematiche: formalizzare per risolvere*, Pitagora, Bologna,
- Polya, G. (1967), *Come risolvere i problemi di matematica*, Feltrinelli, Milano, 1967.
- Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, (2 vol.) Feltrinelli, Milano.
- Rossi, C. (1999), *La matematica dell'incertezza: didattica della probabilità e della statistica*, Zanichelli, Bologna.
- Schoenfeld, A.H. (1997), *Mathematical Problem Solving*, Academic Press.