

## Dalle espressioni algebriche alle funzioni

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (per esempio variazione di una grandezza in funzione di un'altra; semplici successioni). Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare relazioni e funzioni.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti.  Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti.  Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita.	<u>Relazioni e funzioni</u>  Numeri ed algoritmi  Argomentare, congetturare, dimostrare  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Numeri e algebra.

Nello studio dell'algebra i polinomi, e più in generale le espressioni algebriche, sono visti in modo "statico" come oggetti e non come processi di calcolo. L'attività qui presentata favorisce una diversa concezione delle stesse espressioni e avvia al pensiero funzionale.

Ci si propone di calcolare il valore di un'espressione in una data variabile (che potremmo chiamare ad esempio  $x$ ), modificando i valori di tale variabile. Non è necessario aver già introdotto il concetto di funzione, anzi, questo esempio di attività è propedeutico a tale argomento e rappresenta un primo approccio con i concetti più importanti che si incontreranno nello sviluppo di questo nucleo: zeri ed equazioni, segni e disequazioni, soluzioni approssimate.

Questa attività, che solo nei primi più semplici esempi può essere effettuata manualmente, è resa possibile dall'uso di uno strumento di calcolo che può essere: una calcolatrice grafica, un programma di elaborazione simbolica, un foglio elettronico o anche un qualunque linguaggio di programmazione.

La situazione ideale è che tutti gli studenti abbiano a disposizione, da soli o a coppie, uno strumento di calcolo (computer o calcolatrice grafica); in mancanza di questo può essere sufficiente che l'insegnante disponga di un dispositivo di proiezione per mostrare all'intera classe ciò che appare sullo schermo del suo computer o calcolatrice. Le attività potranno essere svolte, a seconda dei casi, utilizzando schede consegnate individualmente agli studenti oppure attraverso una lezione frontale dialogata.

Negli esempi mostrati qui di seguito viene utilizzata una calcolatrice grafica.

### Descrizione dell'attività

Si vuole valutare il valore di una espressione algebrica in una sola lettera (ad esempio  $x$ ) che varia, a partire da un valore iniziale incrementato con un passo fissato, in un insieme numerico definito.

Esaminando la seconda colonna della tabella di Figura 1 appare evidente che l'espressione cambia valore, assumendo valori positivi, negativi, nulli o impossibili. In un secondo momento potranno essere approfonditi gli aspetti relazionali e funzionali.

Prima fase

Si inizia lavorando con una tabulazione di valore iniziale zero, passo uno e con espressioni che presentino eventuali zeri o valori impossibili in corrispondenza di valori interi della variabile, facendo scorrere, se necessario, i valori della tabella nelle due direzioni.

Esempio 1

Ad esempio ecco come appare la tabulazione della funzione (che per il momento chiameremo “espressione”)  $\frac{x-2}{x-5}$  con un valore iniziale  $x = 0$  e passo 1.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pos	Int Pos	Pos
x	y2				
0.	.4				
1.	.25				
2.	0.				
3.	-.5				
4.	-2.				
5.	undef				
6.	4.				
7.	2.5				

y2(x)=undef  
 MAIN                      RAD AUTO                      FUNC

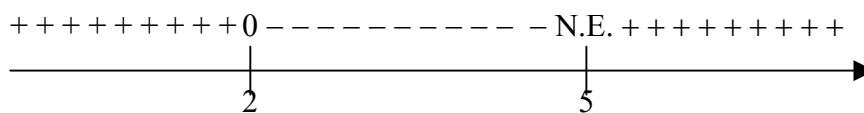
Figura 1

La prima colonna riporta i valori di  $x$ , la seconda i corrispondenti valori dell’espressione. Si noti che l’espressione si annulla per  $x = 2$ , risulta positiva in corrispondenza di certi valori, negativa in corrispondenza di altri; perde di significato se  $x = 5$ .

In questa fase esplorativa si può lavorare con qualunque tipo di espressione in una variabile; successivamente, quando si comincerà a parlare esplicitamente di funzione, si lavorerà con leggi che esprimono proporzionalità diretta, inversa e quadratica, passando poi via via agli altri tipi di funzioni.

Inizialmente può essere opportuno operare con funzioni a zeri interi e quindi immediatamente individuabili nella tabella se la variabile  $x$  ha un valore iniziale intero e passo 1.

Se l’insegnante lo riterrà opportuno, il modello “tabulare” potrà essere affiancato da un modello “geometrico” che traduce i medesimi risultati utilizzando un altro formalismo, ad esempio il seguente:



(N.E. sta per “non esiste” ovvero “impossibile”)

Saranno poi possibili “esplorazioni” dirette scorrendo la tabella dei valori o modificando il passo di variazione della variabile.

Seconda fase

Si propongono esplorazioni più ardue, con espressioni che presentano zeri, o valori esclusi dal dominio, che sono numeri razionali esprimibili con decimali limitati aventi un numero “ragionevolmente piccolo” di cifre dopo la virgola. Questa fase è caratterizzata dalla presenza di zeri individuabili solo dopo una modifica del passo.

Esempio 2

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Int Pow	
x	y2				
0.	-2.				
1.	3.				
2.	8.				
3.	13.				
4.	18.				
5.	23.				
6.	28.				
7.	33.				

y2(x)=3.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 2. La tabulazione dell'espressione  $5x - 2$  con passo 1 suggerisce la presenza di uno zero tra 0 ed 1.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Int Pow	
x	y2				
0.	-2.				
.1	-1.5				
.2	-1.				
.3	-.5				
.4	0.				
.5	.5				
.6	1.				
.7	1.5				

y2(x)=0.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 3. Una “rete a maglie più fitte” (cioè una scansione con passo 0,1) ci permette di individuare lo zero cercato.

Terza fase

In questa fase sono proposti esempi con zeri “inafferrabili” perché irrazionali.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Int Pow	
x	y2				
0.	-2.				
1.	-1.				
2.	2.				
3.	7.				
4.	14.				
5.	23.				
6.	34.				
7.	47.				

y2(x)=2.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 4. Un'esplorazione della tabella dei valori del polinomio  $x^2 - 2$  suggerisce la presenza di uno zero tra 1 e 2. Ovviamente l'esistenza dello zero è assicurata solo in situazione di continuità della funzione nel suo insieme di definizione. A questi livelli però la cosa può essere data per scontata e ripresa solo in tempi successivi.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Int Pow	
x	y2				
1.1	-.79				
1.2	-.56				
1.3	-.31				
1.4	-.04				
1.5	.25				
1.6	.56				
1.7	.89				
1.8	1.24				

y2(x)=-.04

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 5. Una scansione con passo 0,1 permette di ipotizzare la presenza dello zero tra 1,4 e 1,5.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cell	Header	Del Pow	Int Pow	
x	y2				
1.37	-.1231				
1.38	-.0956				
1.39	-.0679				
1.4	-.04				
1.41	-.0119				
1.42	.0164				
1.43	.0449				
1.44	.0736				

y2(x)=-.0119

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 6. Una scansione ancora più fine ci indica l'intervallo di estremi 1,41 e 1,42. Lo zero (irrazionale in questo caso) è inafferrabile con la nostra “rete a maglie necessariamente razionali”; non riusciremo quindi mai a individuarlo ma solo a circoscriverlo in intervalli via via più ristretti.

E' da sottolineare che al momento in cui si svolgono queste attività gli studenti non hanno ancora gli strumenti algebrici per risolvere equazioni e disequazioni; infatti l'obiettivo di queste attività è, come si è detto, offrire un modello mentale dando una percezione numerica e dinamica "globale" delle espressioni algebriche.

Questo tipo di attività può essere svolta in poche lezioni, più ovviamente il tempo necessario per la padronanza dello strumento che si utilizza. Una calcolatrice grafica normalmente possiede già un apposito ambiente di tabulazione e quindi non richiede che pochi minuti di addestramento per la creazione, la modifica e la scansione di una tabella; altri strumenti come un foglio elettronico o un sistema di elaborazione simbolica (che in questo contesto è opportuno usare in *modalità approssimata*) richiedono un tempo di preparazione molto maggiore.

Da queste esplorazioni sorgeranno poi spontaneamente i limiti di tale modo di agire: ad esempio la difficoltà che talora si presenta nell'individuare gli zeri (si pensi alla tabulazione dell'espressione  $5x^2 - 1$ ) o i valori in corrispondenza dei quali l'espressione  $\frac{7x-8}{6x-7}$  assume valori negativi.

Si presenta così la necessità di un procedimento esatto che permetterà di individuare gli zeri o di studiare il segno di una espressione e si potranno quindi introdurre il concetto di equazione e di disequazione e le relative tecniche di calcolo.

### **Possibili sviluppi**

Questo metodo di lavoro può diventare abituale per gli studenti anche negli anni successivi e diventare un modello mentale utile per altre attività come:

- Grafici di funzioni
- Studio di funzioni nel secondo biennio
- Equazioni e disequazioni trascendenti
- Comportamento delle funzioni per valori molto grandi o prossimi a determinati valori (asintoti)
- Introduzione al concetto di limite
- Differenze finite e pendenza

## Risparmiare sulla bolletta del telefono

**Livello scolastico:** 1° biennio

<b>Abilità interessate</b>	<b>Conoscenze</b>	<b>Nuclei coinvolti</b>	<b>Collegamenti esterni</b>
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (per esempio variazione di una grandezza in funzione di un'altra). Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni: la notazione funzionale, il grafico. Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, le funzioni costanti.  Funzioni lineari Sistemi lineari e loro interpretazione geometrica.	<u>Relazioni e funzioni</u>  Numeri e algoritmi  Argomentare, congetturare, dimostrare  Porsi e risolvere problemi	Il marketing  I messaggi pubblicitari

### Contesto

Esperienza quotidiana.

Si vuole affrontare una situazione reale, partendo da dati reali, in modo tale che a mano a mano che ci si addentra nel problema si scoprono le difficoltà di districare e “linearizzare” una situazione che è volutamente complessa, come nei problemi di scelta reali. Sarà l’insegnante a guidare il lavoro, semplificando e riducendo eventualmente l’indagine a casi particolari.

Questa attività può essere utilizzata come primo approccio allo studio delle funzioni lineari.

### Descrizione dell’attività

È opportuno lavorare con piccoli gruppi e organizzare momenti di confronto frequenti. Per le modalità di gestione dei lavori di gruppo e, più in generale, delle dinamiche di interazione sociale, si rimanda alla premessa del laboratorio di matematica.

Nell’attività i momenti essenziali sono un’indagine su Internet, o sui giornali, sulle diverse offerte di tariffe telefoniche di una stessa società o di società diverse; la selezione di tre o quattro offerte che presentano, rispetto alla scelta condivisa (telefonia fissa o mobile, collegamenti a Internet, ..), le caratteristiche a cui si è più interessati; raccolta e catalogazione di dati; discussione guidata per arrivare alla costruzione, per ciascuna tariffa, di una funzione che esprima il costo in relazione ai consumi.

La difficoltà di costruire un modello che rappresenti una situazione così complessa suggerisce di fornire alcune bollette tipo per scegliere dati standard (per esempio rispetto al numero di chiamate). L’uso di tecnologie informatiche, in particolare di un foglio elettronico, è fortemente consigliato per la tabulazione dei dati e la loro rappresentazione grafica.

L'attività offre l'opportunità di avviare una discussione sul ruolo delle variabili in un modello (in un primo tempo si considera costante il numero delle chiamate e variabile il numero dei minuti di conversazione; in un secondo momento, possono essere considerati costanti i minuti e variabile il numero delle chiamate).

Si può anche evitare la ricerca su Internet iniziale; in tal caso sarà l'insegnante a farsi carico di procurare le prime informazioni. A nostro avviso la ricerca dei dati, pur richiedendo un tempo considerevole, ha il pregio di coinvolgere maggiormente gli studenti nella risoluzione dei problemi proposti.

#### Prima fase

Si avvia la ricerca per "trovare i dati" relativi all'indagine che si è proposta. Si selezionano quindi alcune tariffe, per esempio quelle che sono descritte in modo più chiaro e sono più semplici da leggere. Analizzando i dati verrà fuori che non è facile tenere presente tutti i tipi di chiamate (verso telefoni fissi, verso cellulari, collegamenti a Internet, telefonate interurbane e telefonate internazionali). È opportuno quindi scegliere solo alcuni casi (si può poi lasciare come esercizio l'analisi di altre situazioni al momento non prese in considerazione). Come esempio, qui si è scelto di analizzare quattro tariffe della stessa società tenendo conto solo delle chiamate urbane e interurbane (telefoni fissi) e dei collegamenti a Internet.

#### Tariffa A

Urbane e interurbane 1,49 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.

Con il collegamento a Internet: 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.

Costo mensile: € 5,58, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55).

#### Tariffa B

Nazionali: costo mensile fisso di € 39, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55). Le telefonate sono gratuite senza limiti di tempo.

Con il collegamento a Internet: 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.

#### Tariffa C

Locali e interurbane a € 0 al minuto + costo di chiamata 12,50 centesimi, IVA inclusa.

Con il collegamento a Internet: 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.

Costo mensile: € 5,58, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55).

#### Tariffa D

Urbane e interurbane in numero illimitato senza limiti di tempo.

Con il collegamento a Internet: 20 ore mensili gratuite, ore successive 0,92 centesimi al minuto, IVA inclusa + 6,19 centesimi alla risposta, IVA inclusa.

Costo mensile: € 55,15, IVA inclusa, in aggiunta al normale canone (€ 16,55).

#### Seconda fase

Si discute collettivamente sulla natura del lavoro da fare. Eventualmente l'insegnante per stimolare la discussione può porre alcune domande come, per esempio, *“che cosa dobbiamo considerare per valutare il costo di una chiamata? Quali informazioni ci servono per poter confrontare i costi mensili delle diverse offerte? Quante volte dobbiamo considerare lo scatto alla risposta? Quali sono le costanti nella spesa di una telefonata e quali quantità invece variano col passare del tempo? Quant'è la spesa dovuta a Internet?”*.

Per semplificare il problema si distinguono due casi:

- a) si fissa il numero delle chiamate e si fa variare il tempo;
- b) resta fisso il tempo di ogni chiamata e si fa variare il numero di chiamate.

Nell'esempio che si propone si analizza in un primo tempo il caso di una persona che fa, ogni mese, circa 300 telefonate e si collega per 20 ore a Internet con 80 collegamenti da 15 minuti ciascuno<sup>1</sup>. In questo modo l'unica variabile è il tempo (i minuti di conversazione). La consegna è quella di determinare il costo della bolletta in funzione dei minuti di conversazione.

In un secondo momento si determina, per ognuna delle quattro tariffe telefoniche, l'andamento del costo della bolletta in funzione del numero di scatti alla risposta (cioè del numero di chiamate con risposta), supponendo di conoscere il tempo medio di ogni chiamata (espresso in minuti), il numero di scatti per il collegamento a Internet e i minuti di collegamento a Internet.

Si suppone che il tempo medio di ogni chiamata sia 4 minuti; il numero di scatti per il collegamento a Internet 80; i minuti di collegamento a Internet 1200 (20 ore).

In una esperienza precedente gli studenti hanno avuto a disposizione il foglio elettronico e lo hanno utilizzato per tabulare e rappresentare i dati.

Indicando con  $y = f(t)$  il costo della bolletta in funzione del tempo di conversazione, si ha (per un numero fisso di 300 telefonate con scatto alla risposta):

Tariffa A

$$y = (5,5800 + 16,5500) + 300 \cdot 0,0619 + 0,0149 \cdot t + 80 \cdot 0,0619 + 1200 \cdot 0,0092 \Rightarrow$$

$$y = 0,0149 \cdot t + 56,6920.$$

Tariffa B

$$y = (39,0000 + 16,5500) + 80 \cdot 0,0619 + 1200 \cdot 0,0092 \Rightarrow y = 71,5420.$$

Tariffa C

$$y = (5,5800 + 16,5500) + 300 \cdot 0,1250 + 80 \cdot 0,0619 + 1200 \cdot 0,0092 \Rightarrow y = 75,6220.$$

Tariffa D

$$y = (55,1500 + 16,5500) \Rightarrow y = 71,7000.$$

Indicando con  $y = f(n)$  il costo della bolletta in funzione del numero di scatti alla risposta, si ottiene (per una durata media di 4 minuti a telefonata):

Tariffa A

$$y = (5,5800 + 16,5500) + n \cdot 0,0619 + 4 \cdot 0,0149 \cdot n + 80 \cdot 0,0619 + 1200 \cdot 0,0092 \Rightarrow$$

$$y = 0,1215 \cdot n + 38,1220.$$

Tariffa B

$$y = (39,0000 + 16,5500) + 80 \cdot 0,0619 + 1200 \cdot 0,0092 \Rightarrow y = 71,5420.$$

Tariffa C

$$y = (5,5800 + 16,5500) + 0,1250 \cdot n + 80 \cdot 0,0619 + 1200 \cdot 0,0092 \Rightarrow y = 0,1250 \cdot n + 38,1220.$$

Tariffa D

$$y = (55,1500 + 16,5500) \Rightarrow y = 71,7000.$$

---

<sup>1</sup> Questi dati sono emersi dalle bollette telefoniche portate in classe dagli studenti ai quali l'attività è stata proposta. Si è scelto di considerare come dato generico standard di riferimento non una media fra i vari dati disponibili, ma la moda relativa alle diverse distribuzioni.

Terza fase

Si raccolgono i lavori di gruppo e si illustrano collettivamente i risultati, cercando di giungere a una versione condivisa. Nel caso in cui i lavori degli studenti siano incompleti, l'insegnante integra e commenta le soluzioni. Da questo momento il problema si riduce a un classico problema di scelta (l'offerta più vantaggiosa rispetto alla situazione considerata e ai dati a disposizione). Per la discussione di questo problema l'insegnante utilizza tre diversi registri: quello numerico, quello grafico (disegno delle rette corrispondenti) e quello formale (equazione della funzione).



CONFRONTO TRA TARIFFE TELEFONICHE PER MINUTI DI CONVERSAZIONE				
Numero di scatti alla risposta		Numero di scatti per il collegamento ad Internet		Minuti di collegamento ad Internet
300		80		1200
Tempo di conversazione (in minuti)	tariffa A	tariffa B	tariffa C	tariffa D
11	56,8559	71,5420	75,6220	71,7000
201	59,6869	71,5420	75,6220	71,7000
501	64,1569	71,5420	75,6220	71,7000
1201	74,5869	71,5420	75,6220	71,7000
1331	76,5239	71,5420	75,6220	71,7000

Tabella 1



CONFRONTO TRA TARIFFE TELEFONICHE PER NUMERO DI SCATTI ALLA RISPOSTA				
Tempo medio di ogni chiamata (in minuti)		Numero di scatti per il collegamento ad Internet		Minuti di collegamento ad Internet
4		80		1200
Numero di scatti alla risposta	tariffa A	tariffa B	tariffa C	tariffa D
10	39,3370	71,5420	39,3720	71,7000
100	50,2720	71,5420	50,6220	71,7000
202	62,6650	71,5420	63,3720	71,7000
301	74,6935	71,5420	75,7470	71,7000
349	80,5255	71,5420	81,7470	71,7000

Tabella 2

**Possibili sviluppi**

- La complessità delle singole proposte darà la possibilità di aprire la discussione con altri insegnanti sulle questioni legate al marketing e ai messaggi pubblicitari. Lo stesso tipo di indagine può essere riferita ad altri tipi di prodotti o servizi.
- Problemi di programmazione lineare.

### Elementi di prove di verifica

#### 1. Il cellulare di Pierino.

Pierino ha ricevuto in regalo un telefono cellulare. Ora sta cercando di capire quale sia il profilo tariffario che gli conviene maggiormente e, per questo, ha cercato e poi trovato alcune tariffe che ha selezionato. Aiutiamolo nella scelta! Le tariffe sono queste:

	TARIFFA A	TARIFFA B	TARIFFA C	TARIFFA D
Tipo	Scheda prepagata	Scheda prepagata	Abbonamento del costo di € 12 al mese	Scheda prepagata
Scatto alla risposta	Senza scatto alla risposta	Con scatto alla risposta del costo di 15 centesimi di euro	Senza scatto alla risposta	Senza scatto alla risposta
Tariffazione	Per secondi di effettiva conversazione	Per secondi di effettiva conversazione	Per secondi di effettiva conversazione	Per secondi di effettiva conversazione
Costo della conversazione	24,6 cent. / min.	20,4 cent. / min.	16,2 cent. / min.	25,8 cent. / min.
Costo SMS	15 centesimi	15 centesimi	15 centesimi	14 centesimi

Tabella 3

Per decidere quale sia la tariffa più conveniente nei vari casi, rispondete a queste domande, cominciando, per ciascuna domanda, col formalizzare la situazione, aiutandovi anche con grafici.

- 1) Considerando le tariffe senza abbonamento, con e senza scatto alla risposta, qual è la durata minima di una telefonata (in minuti e secondi), perché sia più conveniente la tariffa con scatto alla risposta?
- 2) Considerando le tariffe senza scatto alla risposta, con e senza abbonamento, quanti secondi (o minuti) totali di conversazione in un mese sono necessari perché convenga la tariffa con abbonamento?
- 3) Il papà regala a Pierino ogni mese una ricarica di € 25 di traffico utile. Se Pierino invia ogni mese 150 SMS, quale tariffa, tra la A e la D, gli permette di conversare più a lungo? E se inviasse solo 60 SMS?

#### 2. Temperatura e calore

Sul manuale di fisica viene proposta la seguente situazione:

“Una massa  $m_f$  di ferro viene portata a una temperatura  $t_1 = 200^\circ\text{C}$  e poi viene immediatamente posta in un contenitore pieno d'acqua che si trova (prima che il blocco di ferro venga introdotto) a una temperatura  $t_0 = 18^\circ\text{C}$ . Se non vi sono dispersioni di calore con l'ambiente esterno, il blocco di ferro cede calore alla massa d'acqua  $m_a$ , fino a che la massa d'acqua e il blocco di ferro raggiungono la stessa temperatura di equilibrio  $t_x$ . La quantità di calore  $Q$  (espressa in calorie) ceduta o acquistata da un corpo è data da  $Q = mc(t_f - t_i)$ , dove  $m$  è la massa del corpo,  $c$  il suo calore specifico,  $t_f$  e  $t_i$ , rispettivamente, le temperature finale e iniziale”

- a) Assumendo uguale a 1 il calore specifico  $c$  dell'acqua, indica come varia la temperatura  $t$  dell'acqua in funzione del calore ceduto dalla massa  $m_f$  di ferro alla massa  $m_a$  di acqua.
- b) Determina la temperatura  $t_x$  di equilibrio indicando con  $c_f$  il calore specifico del ferro.

## La traduzione” dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell’algebra

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura.  Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un’incognita.  Sistemi lineari.  Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite.	<u>Relazioni e funzioni</u>  Numero ed algoritmi  Risolvere e porsi problemi  Argomentare, congetturare, dimostrare	Lingua italiana

### Contesto

Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.

Questa attività può essere introdotta nella prima classe; è centrata sulla traduzione dal linguaggio naturale, in cui sono formulate le situazioni problematiche, a quello algebrico, che ne permette la matematizzazione e l’eventuale soluzione. Il contesto è prettamente linguistico: infatti, affronta le difficoltà che lo studente incontra nel passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico; sposta il fulcro dell’attenzione didattica dagli algoritmi risolutivi alla traduzione e messa in formula dei problemi. È qui che si concentrano le maggiori difficoltà degli studenti: la matematica viene da loro percepita come puro strumento operativo; si tratta, invece, di presentarla come strumento di pensiero, mettendo in luce anche gli aspetti concettuali; infatti la matematica può maggiormente contribuire a rispondere a questa esigenza se la si concepisce come arte del ragionamento e non come puro ricettario di calcolo.

### Descrizione dell’attività

Con questa attività l’insegnante propone agli studenti di *tradurre*<sup>1</sup> problemi enunciati nella lingua italiana in equazioni, verificando se sono buoni traduttori di un testo dal linguaggio naturale a quello algebrico. Tale attività è fondamentale per la comprensione e l’utilizzo delle equazioni.

---

<sup>1</sup> La traduzione è un processo che parte da un testo (A), per arrivare a un altro testo (B).

Nella scuola la traduzione è percepita comunemente come un’operazione che riguarda le lingue, classiche e moderne; ad esempio nello studio delle lingue classiche (Greco e Latino) la traduzione costituisce la prova di verifica più frequente.

Invece la traduzione è utilizzata anche in ambito matematico; in particolare, è evidente la sua funzione nella costruzione di formule ed enunciati che rappresentano definizioni, proposizioni e teoremi.

Infatti tali enunciati devono possedere due elementi fondamentali: *tradurre* in *linguaggio specifico* il *linguaggio naturale* e *riassumere* la *natura*, la *forma* o altre *caratteristiche* e *proprietà* degli *oggetti* e *concetti* matematici a cui si applicano.

Per procedere con ordine nella traduzione si suggerisce di dividere la pagina in due colonne: a sinistra si scrive il problema in modo che risultino chiare le parti in cui il suo testo può essere suddiviso, a destra si scrivono le formule.

In tal modo si produce una prima rielaborazione del testo; è importante che si tratti di una rielaborazione fedele, altrimenti il problema può cambiare.

Dopo avere suddiviso il testo nelle sue varie parti, si passa alla seconda fase del lavoro: tradurre in linguaggio algebrico il testo scritto nella colonna di sinistra. Per fare questo si devono, naturalmente, individuare le variabili cui riferire il testo.

Si tratta di un compito particolarmente delicato: la buona individuazione dei dati, delle incognite e dei relativi legami è infatti determinante per ottenere una traduzione fedele e semplice del problema, in modo da poterlo risolvere usando opportunamente le regole dell'algebra. Si noti che il numero delle incognite non è predeterminato ma dipende dalla traduzione.

Una cattiva traduzione o una individuazione delle variabili meno immediata può infatti rendere faticoso il successivo lavoro algebrico e favorire gli errori.

Il compito richiesto in questa fase è quindi di comprensione di un testo e in questo senso occorre mobilitare le risorse!

Esempio 1: un'eredità

Un padre di tre figli morì lasciando in eredità 1600 monete d'oro. Il testamento precisava che il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo e che al secondo a sua volta spettavano 100 monete più dell'ultimo. Si domanda la quota di ciascuno.

Le fasi da seguire per ottenere una buona traduzione sono:

1. Comprensione

- *Quali sono le incognite, cioè quello che si vuole sapere?*

Ovviamente si tratta delle somme che spettano ai tre figli (ci sono quindi tre incognite: le somme che spettano al maggiore, al medio e al minore dei tre figli).

- *Che cosa è dato?*

La quantità di monete lasciata in eredità dal padre, cioè 1600 monete.

- *Quali condizioni legano il dato alle incognite o le incognite tra di loro?*

La prima incognita è la seconda aumentata di 200; la seconda è pari alla terza aumentata di 100.

A questo punto, si scrivono nella colonna di sinistra le parti in cui risulta diviso il testo del problema:

<u>Incognite</u>	
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli	
<u>Dati</u>	
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	
<u>Condizioni</u>	
Il testamento precisava che:	
➤ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1 <sup>a</sup> condizione);	
➤ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2 <sup>a</sup> condizione).	

Nella traduzione dal testo originale al testo in tabella che abbiamo scelto, compaiono nell'ordine: le incognite, i dati, e infine le condizioni, mentre, in italiano corrente, prima ci sono i dati, poi le condizioni e infine le incognite. Questo non deve stupire; capita spesso nelle traduzioni sia nella stessa lingua che da una lingua all'altra di non poter copiare passo passo il testo ma di doverlo in qualche modo adattare al contesto che si considera o alla lingua straniera. In questo caso la lingua straniera è il linguaggio algebrico della matematica.

Si passa ora alla traduzione vera e propria in “algebrichese”.

La prima cosa da fare per riempire la colonna di destra è abolire le parole e passare alle formule.

Il linguaggio della matematica, in questo caso l'algebra, non è fatto di parole ma di simboli, o meglio, le parole della matematica non sono quelle della lingua italiana, ma segni che si combinano tra loro per costituire formule più o meno complicate secondo regole ben precise, quelle dell'algebra. Del resto ogni linguaggio tecnico usa termini specifici di cui si richiede la comprensione.

Iniziamo allora a riempire lo spazio delle incognite usando opportuni segni che possono essere arbitrari, ma che conviene scegliere in modo che siano facili da ricordare e riconoscere. Per le incognite utilizziamo qui le ultime lettere dell'alfabeto.

Consideriamo poi il dato che in questo caso semplicemente costituito dal numero 1600 (le monete d'oro).

<u>Incognite</u>	<u>Incognite</u>
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli: quota del maggiore quota del medio quota del minore	$x$ $y$ $z$
<u>Dati</u>	<u>Dati</u>
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	1600
<u>Condizioni</u>	
Il testamento precisava che: ➤ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1 <sup>a</sup> condizione); ➤ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2 <sup>a</sup> condizione).	

## 2. Ricerca delle condizioni

Studiamo ora tutte le condizioni o relazioni che legano tra loro dati e incognite, notando che queste ultime sono numeri che soddisfano le condizioni del problema, quindi su esse si può operare allo stesso modo in cui si opera sui dati.

Apparirà allora naturale tradurre le frasi:

➤ “Il maggiore dei tre deve avere 200 monete più del secondo” nella formula algebrica:

$$x = 200 + y$$

➤ “Al secondo spettano 100 monete più dell'ultimo” nella formula algebrica:  $y = 100 + z$ .

<u>Incognite</u>	<u>Incognite</u>
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli: quota del maggiore quota del medio quota del minore	$x$ $y$ $z$
<u>Dati</u>	<u>Dati</u>
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	1600
<u>Condizioni</u>	<u>Condizioni</u>
Il testamento precisava che: ➤ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1 <sup>a</sup> condizione); ➤ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2 <sup>a</sup> condizione).	$x = 200 + y$ $y = 100 + z$

Si noti che il numero delle incognite non è determinato a priori. Ad esempio, per diminuirne il numero si può usare una traduzione diversa che tenga conto di una condizione e indicare la quota del medio direttamente con  $x-200$ .

A questo punto si osserva che si hanno relazioni che legano le incognite tra di loro, ma nessuna condizione che leghi il dato (1600) alle incognite.

In realtà è scontato che la somma delle tre quote spettanti ai figli sia di 1600 monete: ciò compare implicitamente nel problema, per il significato della parola eredità; ma non è stato tradotto nel linguaggio algebrico!

Basta considerare che è  $x+y+z=1600$ , condizione implicita nel testo italiano del problema, ma che va esplicitata quando si passa alla sua traduzione nel linguaggio algebrico.

### 3. Esplicitazione delle relazioni nascoste

Si passa quindi a formulare, secondo le modalità indicate nella seguente tabella, le condizioni già esplicite e quelle implicite nel testo:

<u>Incognite</u>	<u>Incognite</u>
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli:	
quota del maggiore	$x$
quota del medio	$y$
quota del minore	$z$
<u>Dati</u>	<u>Dati</u>
1600 monete d'oro	1600
<u>Condizioni</u>	<u>Condizioni</u>
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro.	$x+y+z=1600$
Il testamento precisava che:	
➤ Il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo	$x = 200 + y$
➤ Al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo	$y = 100 + z$

Nel testo originale del problema, le 1600 monete compaiono con un doppio significato, che viene esplicitato nella formulazione matematica:

1. Dato (è un dato che si parli di 1600 monete);
2. Condizione (le 1600 monete sono l'eredità per i tre figli: c'è quindi una relazione tra dati e incognite).

E' tipico della matematica che i suoi segni significhino una sola cosa per volta e mai più di una cosa alla volta (come invece succede spesso in italiano). Del resto capita anche nelle traduzioni in una lingua straniera di dover esplicitare o ripetere parole (ad esempio pronomi) che in italiano non compaiono.

### 4. L'uso del linguaggio algebrico per risolvere il problema

Il lavoro di traduzione dalla lingua naturale al linguaggio algebrico non è sempre facilissimo.

Le regole date possono aiutare, ma solo la pratica rende bravi traduttori, così come la conoscenza delle regole grammaticali è di aiuto per fare traduzioni tra due lingue, ma da sola non basta.

Una volta che il problema è tradotto in linguaggio algebrico corretto, si possono utilizzare le regole di calcolo per determinare la soluzione, che in questo caso è:  $x = 700$ ;  $y = 500$ ;  $z = 400$ .

#### Esempio 2: Viaggio aereo

Le linee aeree permettono a ciascun passeggero di portare in franchigia (cioè senza costi aggiuntivi) un bagaglio non superiore ad un certo peso, oltre il quale deve pagare per il trasporto in ragione dei chilogrammi in eccedenza. Il sig. Carlo e sua moglie fanno un viaggio in aereo con un bagaglio che complessivamente pesa 54 kg e devono pagare € 21 per i chilogrammi oltre la franchigia. Il sig. Carlo pensa che se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli (suoi e della moglie) dovrebbe invece pagare € 51.

Si chiede qual è il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia.

Analogamente a quanto visto nel precedente esempio, impostiamo la seguente tabella:

<u>Incognite</u>	<u>Incognite</u>
Il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia	$x$
<u>Dati</u>	<u>Dati</u>
Il bagaglio complessivamente pesa 54 kg	54
devono pagare € 21 per i kg oltre la franchigia (insieme)	21
se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli dovrebbe pagare € 51	51
<u>Condizioni</u>	<u>Condizioni</u>

E per le condizioni? Occorre esplicitare le relazioni nascoste.

Quando i viaggiatori sono due hanno diritto ad una franchigia di  $2x$  (kg) e pagano per questo € 21; se il sig. Carlo fosse solo avrebbe diritto ad una franchigia di  $x$  kg e dovrebbe pagare € 51.

Se  $P$  è il prezzo che la compagnia aerea fa pagare per ogni chilogrammo di bagaglio oltre la franchigia, si possono scrivere le condizioni:

$$1. P \cdot (54-2x) = 21$$

$$2. P \cdot (54-x) = 51$$

Infatti, quando sono in due, i coniugi pagano solo per i chilogrammi oltre la franchigia, cioè per il peso  $54- 2x$ ; quando il signor Carlo è solo, il bagaglio pesa sempre 54 kg, ma la franchigia è ridotta a  $x$  kg.

Possiamo allora scrivere:

<u>Incognite</u>	<u>Incognite</u>
Il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia	$x$
Il prezzo per ogni chilogrammo di bagaglio oltre la franchigia	$P$
<u>Dati</u>	<u>Dati</u>
Il bagaglio complessivamente pesa 54 kg	54
devono pagare € 21 per i kg oltre la franchigia (insieme)	21
se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli dovrebbe pagare € 51	51
<u>Condizioni</u>	<u>Condizioni</u>
Il prezzo quando sono in due è di € 21	$P \cdot (54-2x) = 21$
Il prezzo se il sig. Carlo è solo è di € 51.	$P \cdot (54-x) = 51$

### Impostazione dell'equazione

Nell'ultima cella della seconda colonna il prezzo  $P$  compare due volte:

$$(1) P = \frac{21}{54 - 2x};$$

$$(2) P = \frac{51}{54 - x}$$

Si possono allora eguagliare i secondi membri di (1) e (2); si ottiene l'equazione:

$$(3) \frac{21}{54 - 2x} = \frac{51}{54 - x}$$

L'equazione (3) viene trasformata nelle seguenti equazioni:

$$21(54 - x) = 51(54 - 2x)$$

$$1134 - 21x = 2754 - 102x$$

$$102x - 21x = 2754 - 1134$$

$$81x = 1620$$

$$x = 20$$

La soluzione è 20 chilogrammi, volendo si può calcolare anche  $P(€ 3,50)$  ma non è richiesto dal problema.

Si sintetizzano nella tabella seguente le fasi fondamentali nel processo di traduzione di un problema:

<p>1. Comprensione Cercare di capire bene: a) che cosa bisogna trovare (Incognita o Incognite) b) che cosa è dato o conosciuto (Dati) c) in che modo i dati e le incognite sono legati tra loro (Condizione o Condizioni)</p>
<p>2. Ricerca delle condizioni Esaminare ancora il problema nel modo più naturale, considerandolo risolto e cercando di vedere con chiarezza, in ordine conveniente, tutte le relazioni che devono intercorrere fra le incognite e i dati, in rapporto alle condizioni.</p>
<p>3. Esplicitazione delle relazioni nascoste In matematica, e in algebra in particolare, il linguaggio è più semplice di quello naturale: non sono ammessi i sottintesi. Occorre tradurre le parole in formule e cercare di esprimere una stessa quantità in due modi diversi, ottenendo così un'equazione.</p>
<p>4. Uso del linguaggio algebrico per risolvere il problema Usare le regole del calcolo algebrico per trasformare le equazioni date in altre ad esse equivalenti, ma in cui è immediato riconoscere la soluzione.</p>

### Elementi di prove di verifica

### 1. In pizzeria

In una pizzeria del centro il sabato la pizza margherita costa 1 Euro in più rispetto ai giorni infrasettimanali. Con la stessa somma il sabato si possono mangiare 5 pizze mentre nei giorni infrasettimanali se ne possono mangiare 6, quanto costa la pizza il sabato?

*Prova a costruire problemi analoghi con l'acquisto di gelati: coni grandi o piccoli.*

### 2. L'età di mia madre

La mia età è  $\frac{11}{16}$  di quella di mia madre e quattro anni fa ne era  $\frac{2}{3}$ . Quanti anni ha mia madre?

*Prova a costruire un problema per far scoprire al tuo compagno di banco l'età di tua madre.*

### 3. Euro

Marta e Claudio possiedono insieme la somma di  $x$  euro. Se Claudio dà a Marta  $y$  euro, la somma che gli rimane è  $\frac{2}{3}$  di quella in possesso di Marta. Quanti euro aveva ciascuno di loro inizialmente?

*Prova a costruire un problema analogo con gli euro che avete in tasca tu e una tua compagna.*

### 4. Triangolo

Quanto misura il lato di un triangolo equilatero sapendo che la somma della base con l'altezza misura  $b$ ?

*Prova a pensare a un problema che chiede la misura di un lato di un triangolo che non sia equilatero, cosa succede? Puoi ancora calcolarne un lato conoscendo la somma della base e dell'altezza? Hai bisogno di altri dati? Come faresti se il triangolo fosse rettangolo isoscele?*

### 5. Cerca il numero

Un numero supera di due il triplo di un altro. Trova almeno due numeri che soddisfano la condizione data.

*Prova a pensare a problemi analoghi e a farli risolvere a un bambino che frequenta la scuola elementare.*

### 6. Senza calcoli

Senza fare calcoli, spiega perché c'è un solo valore del coefficiente  $k$  per cui il sistema delle due equazioni  $x - y = 2$ ,  $x - ky = 0$ , non ammette soluzioni.

*Prova a costruire esempi concreti che non ammettono soluzioni*

## Redditi e tasse

**Livello scolastico:** 1° biennio

<b>Abilità Interessate</b>	<b>Conoscenze</b>	<b>Nuclei coinvolti</b>	<b>Collegamenti esterni</b>
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura.  Costruire modelli sia discreti che continui di evoluzione di fenomeni nel tempo.  Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Funzioni lineari, costanti a tratti, lineari a tratti.  Equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita.	<u>Relazioni e funzioni</u>  Numeri e algoritmi  Argomentare, congetturare, dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Diritto ed economia

### Contesto

Vita sociale.

Questa attività può essere introdotta, in una seconda classe del primo biennio o verso la fine del primo anno del primo biennio, quando gli studenti hanno già affrontato il problema della rappresentazione di funzioni lineari e hanno un'idea delle tecniche risolutive di semplici equazioni di primo grado.

L'attività propone una prima riflessione su un problema di un certo interesse sociale, utilizzando strumenti matematici elementari per meglio comprendere le caratteristiche di un sistema di tassazione dei redditi. Qui si illustra quello in vigore in Italia alla fine del 2002 e alcune proposte di modifica di inizio 2003. L'insegnante avrà cura di adattare l'attività a eventuali successive modifiche della legge. Il modello che viene preso in considerazione non tiene conto di varie eccezioni e particolarità di applicazione del sistema di tassazione dei redditi.

### Descrizione dell'attività

L'attività proposta consente di introdurre nozioni come quelle di funzione lineare a tratti e di modello; consente inoltre di affinare tecniche legate alla risoluzione di equazioni e disequazioni e offre l'occasione di utilizzare strumenti informatici per la rappresentazione grafica di funzioni. Inoltre, invita a riflettere su un problema sociale di interesse comune, offrendo occasioni per una collaborazione con l'insegnante di diritto ed economia in primo luogo, ma anche con quello di storia ed educazione civica. Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*.

Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi collaborativi di studenti, richiedendo di riportare la discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

### Prima fase

L'insegnante propone qualche lettura sul sistema di tassazione dei redditi (è possibile trovare vario materiale in Internet o sui quotidiani), precisando come ha funzionato il sistema in vigore fino alla fine del 2002 e proponendo un confronto con le proposte di modifica che sono state avanzate agli inizi del 2003.

Per esempio, può precisare che, fino al 2002 le aliquote IRPEF in vigore per i corrispondenti scaglioni di reddito complessivo erano le seguenti:

- 18% per redditi fino a 20 milioni<sup>1</sup> annui
- 24% per i redditi fino a 30 milioni annui
- 32% fino a 60 milioni annui
- 39% fino a 135 milioni annui
- 45% per redditi oltre i 135 milioni annui

Prima di suddividere la classe in piccoli gruppi di lavoro, l'insegnante può domandare quanto gli studenti pensano che un funzionario che ha un reddito complessivo, per esempio, di 120 milioni debba versare alle imposte. Il fatto che molti studenti rispondano 40 680 000 lire, ossia il 39% di 120 000 000, suggerisce che l'attività proposta ha senso: molte e frequenti sono, infatti, le incomprensioni sui sistemi di tassazione dei redditi e tali incomprensioni possono persistere anche dopo l'inserimento dello studente nel mondo del lavoro. Ciò può creare ostacoli a una partecipazione critica alla vita pubblica, che dovrebbe essere obiettivo primario di ogni corso scolastico a ogni livello e per ogni disciplina.

Il commento dell'insegnante a risposte di questo tipo è finalizzato a far riflettere gli studenti sul fatto che chi guadagna 120 000 000 non potrà essere tassato al 39% per l'intero ammontare, perché una parte del suo reddito, per esempio quella fino a 20 milioni, è tassata al 18%. Bisogna quindi distinguere tra *tasso marginale* di imposta e *tasso medio*.

### Seconda fase

L'insegnante suddivide gli studenti in piccoli gruppi collaborativi di lavoro, formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).

I problemi proposti ai vari gruppi sono i seguenti:

1. Quanto dovranno versare un operaio che ha un reddito lordo di 30 000 000 annui e un dirigente che ha un reddito lordo di 200 000 000 annui alle imposte, secondo il sistema di tassazione riportato nella seguente tabella?

- 18% per redditi fino a 20 milioni annui
- 24% per i redditi fino a 30 milioni annui
- 32% fino a 60 milioni annui
- 39% fino a 135 annui
- 45% per redditi oltre i 135 milioni annui

2. Determinare una funzione lineare a tratti che descriva l'ammontare  $y$  delle tasse che un lavoratore che ha un reddito complessivo  $x$  dovrebbe versare alle imposte, al variare del reddito  $x$ .

3. Rappresentare graficamente in un piano cartesiano  $xOy$  l'andamento della funzione  $y = y(x)$  determinata al passo precedente.

4. Determinare quale era la fascia di reddito lordo di Ariete nel 1998, sapendo che le tasse pagate da Ariete in quell'anno ammontavano a 18 000 000 di lire. Risolvere il problema sia formalmente che graficamente, individuando, in questo caso, una soluzione approssimata per via grafico – numerica.

---

<sup>1</sup> Gli scaglioni di riferimento della vecchia legge vengono ancora espressi in lire: l'insegnante può chiedere agli studenti di calcolare l'equivalente in euro (1 euro = 1936,27 lire).

5. Quale è la percentuale media pagata nel 1998 (di tasse sul reddito lordo) da Calibano che in quell'anno ha guadagnato 52 000 000? Dare un significato geometrico – grafico a questa percentuale media.

#### Terza fase

L'insegnante coordina la sessione di intergruppo nella quale individua un gruppo incaricato di proporre le soluzioni fornite ai vari problemi. Gli altri studenti intervengono chiedendo chiarimenti, ponendo domande, proponendo soluzioni alternative, suggerendo miglioramenti e completamenti; la sessione di lavoro è coordinata dall'insegnante che ha il compito di far sì che nessuno studente rimanga escluso dalla discussione.

Alla fine della discussione l'insegnante dovrebbe cercare di riassumere gli aspetti più interessanti delle varie risoluzioni e quelli emersi durante la discussione.

#### Quarta fase

L'insegnante fa presente agli studenti che il sistema di tassazione è in effetti più complicato di quello che è stato presentato nella precedente attività, perché le tasse sono determinate non solo calcolando la percentuale sul corrispondente scaglione di reddito, ma anche tenendo conto delle detrazioni di imposta e delle deduzioni sul reddito. L'insegnante avrà cura, magari con l'aiuto di colleghi di altre discipline, di spiegare ricorrendo a esempi, il significato di questi termini tecnici.

Quindi propone a ciascun gruppo di lavoro la lettura di un articolo che descriva una delle proposte di modifica del sistema di tassazione di redditi avanzate alla fine del 2002 (il testo qui di seguito riportato è solo un esempio, costruito da un documento riportato sul sito <http://www.portaleaziende.it/notizie/view.php?p=728>, “il portale delle aziende in materia fiscale societaria e aziendalistica” del 13 febbraio 2003). L'insegnante avrà cura di cercare in rete o sui quotidiani, o di costruirlo egli stesso, un testo adeguato ai propri studenti.

#### Proposta di lavoro

Leggete con attenzione il seguente testo che si propone di spiegare più in dettaglio il funzionamento di un sistema di tassazione dei redditi (in particolare uno di quelli proposti tra la fine del 2002 e il gennaio 2003 per sostituire il precedente sistema di tassazione). Redigete un documento che possa spiegare, a uno studente di primo anno di scuola superiore che non ha mai letto alcunché sull'argomento, i principi di funzionamento di un sistema di tassazione dei redditi uguale a quello presentato nel testo e rispondete alle domande che vi vengono poste all'interno del testo.

[...]

*Le novità introdotte dall'art. 2 riguardano:*

- una nuova tabella delle aliquote d'imposta;
- l'introduzione di una nuova deduzione dal reddito;
- una nuova modalità di determinazione della base imponibile;
- la previsione di nuove detrazioni d'imposta.

[...]

#### *3.1 La deduzione base*

[...]

*Il comma 1 del nuovo articolo 10-bis prevede una deduzione pari a 3.000 euro (deduzione base) a favore di tutti i contribuenti.*

[...]

#### *3.2 Le ulteriori deduzioni dell'art. 10-bis*

[...]

*Per riepilogare, la deduzione di 3.000 euro è aumentata di un importo corrispondente a: 4.500 euro (ragguagliati al periodo di lavoro) per i possessori di redditi di lavoro dipendente, ad esclusione dei redditi derivanti dalle pensioni di ogni genere [...]*

*4.000 euro (ragguagliati al periodo) per i possessori di redditi derivanti dalle pensioni di ogni genere [...]*

*1.500 euro per i titolari di redditi di lavoro autonomo o di impresa minore. [...]*

*Il legislatore ha precisato espressamente che le deduzioni previste in favore dei lavoratori dipendenti e assimilati, dei pensionati e dei lavoratori autonomi e delle imprese minori non sono cumulabili tra loro e pertanto se alla formazione del reddito complessivo concorrono due o più delle tipologie reddituali contemplate dalla predetta disposizione, il contribuente potrà fruire della deduzione più favorevole.*

Domanda 1: qual è l'importo massimo delle deduzioni teoricamente applicabili?<sup>2</sup>

*In particolare è previsto che la deduzione (di € 7500, 7000, 4500 o 3000) spetta per la parte corrispondente al rapporto tra un ammontare fisso di 26.000 euro aumentato delle deduzioni previste e degli oneri deducibili<sup>3</sup> e diminuito del reddito complessivo e del credito d'imposta<sup>4</sup>, e lo stesso importo di 26.000 euro.*

*Se il predetto rapporto è maggiore o uguale a 1, la deduzione compete per intero; se lo stesso è pari a zero o minore di zero, la deduzione non compete; negli altri casi la deduzione è proporzionale al valore del rapporto di cui si considera il valore troncato alle prime quattro cifre decimali.*

Domanda 2: quale è una formula che esprime la deduzione dal reddito effettivamente spettante?<sup>5</sup>

*La deduzione effettivamente spettante va sottratta dal reddito complessivo per determinare il reddito imponibile sul quale applicare le aliquote d'imposta.*

*[...] Per effetto della nuova formulazione del comma 1 dell'articolo 11 risultano quindi rimodulati gli scaglioni di reddito e ridefinite le aliquote applicabili ai predetti scaglioni. Le nuove aliquote e gli scaglioni di reddito sono i seguenti:*

*23 %, per i redditi compresi tra 0 e 15 000 euro*

*29 %, per i redditi superiori a 15 000 ma non a 29 000 euro*

*31 %, per i redditi superiori a 29 000 ma non a 32 600 euro*

*39 %, per i redditi superiori a 32 600 ma non a 70 000 euro*

*45 %, per i redditi superiori a 70 000 euro.*

*[...]*

Domanda 3: ipotizzando l'assenza di oneri deducibili e di credito di imposta, quale è il reddito imponibile di un dipendente che ha un reddito lordo di 20 000 euro annuo? E di un dipendente che

<sup>2</sup> € 7500, per un lavoratore dipendente o assimilato (3000 di base + 4500); € 7000, per un pensionato (3000 di base + 4000); € 4500, per un esercente arti o professioni o per un titolare di impresa minore (3000 di base + 1500).

<sup>3</sup> Per semplicità si suppone di essere in situazioni in cui non siano presenti oneri deducibili.

<sup>4</sup> Per semplicità si suppone di essere in situazioni in cui non siano presenti crediti di imposta.

<sup>5</sup> siano  $d$  = importo massimo deduzione teoricamente spettante,  $o$  = oneri deducibili;  $r$  = reddito,  $c$  = credito di imposta,  $f$  = deduzione dal reddito effettivamente spettante.

$$\text{Allora si ha: } f = \begin{cases} 7500, & d + o - r - c > 0 \\ \frac{26000 + d + o - r - c}{26000} \cdot 7500, & -26000 \leq d + o - r - c < 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha un reddito lordo annuo di 7500 euro? E di un dipendente con reddito lordo annuo di 33 500 euro?

*Domanda 4: su alcuni quotidiani, nei primi giorni del febbraio 2003 è comparsa la seguente ipotesi semplificatrice di tassazione dei redditi, che individua due sole fasce di reddito:*

- 23% per i redditi fino a 100 000 euro
- 33% oltre il suddetto importo.

*Senza altre informazioni, è possibile confrontare le due proposte?*

*Supponendo che il sistema di deduzioni per determinare il reddito imponibile funzioni allo stesso modo nelle due proposte, confrontate i due sistemi di tassazione dal punto di vista del contribuente.*

**Possibili sviluppi:**

- Confronto fra la prima delle proposte presentate e il sistema di tassazione dei redditi in vigore nel 2002.
- Studio dell'evoluzione dei sistemi di tassazione dei redditi in Italia dopo la seconda guerra mondiale.
- Confronto tra i sistemi di tassazione dei redditi in diversi paesi europei ed extraeuropei.

**Elementi di prove di verifica**

**1. Confronti tra diversi sistemi di reddito.**

La tabella di Figura 1 e il grafico di Figura 2 sono una prima e semplificata descrizione del sistema di redditi americano vigente nel 1990<sup>6</sup>. Tenere presente che anche nel sistema americano erano previste deduzioni. Per questo motivo, per calcolare le tasse effettivamente da pagare, si deve moltiplicare l'aliquota (espressa in percentuale nella tabella) per il reddito effettivamente tassabile (ossia il reddito meno le deduzioni). Per trovare il reddito effettivamente tassabile, una famiglia dovrebbe togliere dal reddito percepito una deduzione fissa di 5450 dollari (\$ 5450) e una ulteriore deduzione di \$ 2050 per ogni persona della famiglia. Per esempio, nella Figura 2, si prende in considerazione una famiglia di 4 persone, alla quale spetta una deduzione di \$ 13 650.

Osservando attentamente la tabella di Figura 1 e il grafico di Figura 2, rispondete alle seguenti domande:

- a) Quanto doveva pagare di tasse una famiglia di quattro persone che percepiva nel 1990 un reddito di \$ 10 000?
- b) Quanto doveva pagare di tasse una famiglia di quattro persone che percepiva nel 1990 un reddito di \$ 20 000?

Commentate il seguente grafico che vuole descrivere alcune caratteristiche del sistema di tassazione dei redditi americano vigente nel 1990 (in Figura 2 con Taxable Income si intende il reddito effettivamente tassabile; con Adjusted Gross Income si intende il reddito lordo non ancora diminuito con le deduzioni spettanti; il Nontaxable Income è la parte di reddito non tassabile a causa delle deduzioni spettanti; con slope si intende la pendenza della retta; l'actual tax rate è l'aliquota effettiva, mentre il marginal tax rate è l'aliquota prevista nel corrispondente scaglione di reddito).

---

<sup>6</sup> Riferimento sul sito <http://illuminations.nctm.org/lessonplans/9-12/taxes/index.html>

TABLE 1		
The 1990 Tax Brackets in Terms of Taxable Income		
Tax Bracket	Taxable Income Reported	
	Over	Not Over
15%	\$ 0	\$ 32 450
28%	32 450	78 400
33%	78 400	162 770
	(the so-called bubble bracket)	
28%	162 770	...

Figura 1

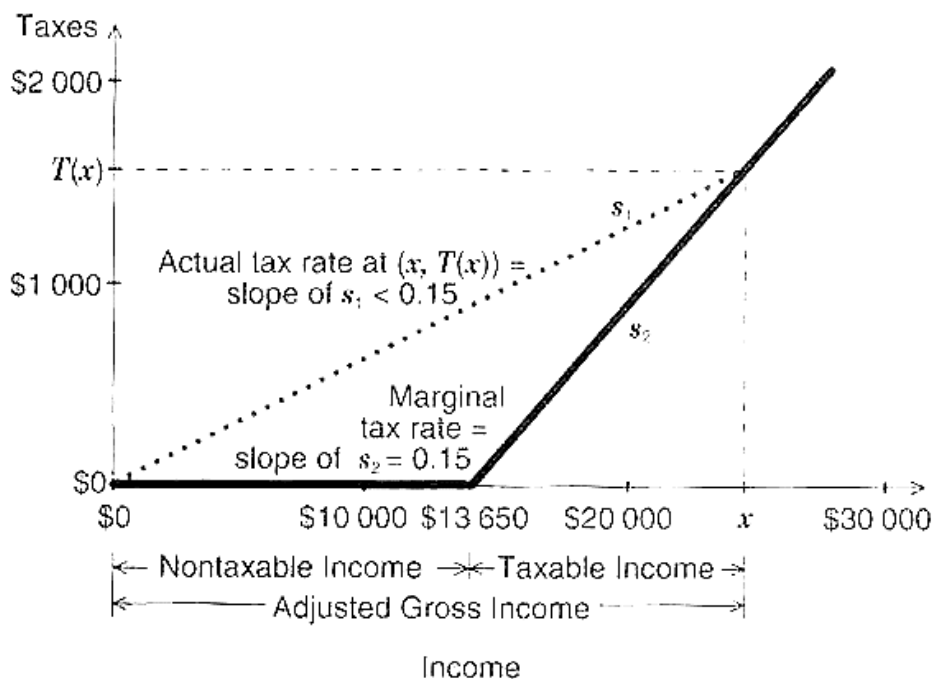


Fig 1.

A graph showing that the actual tax rate is less than the marginal tax rate

Figura 2

**2. All'ufficio postale.**

- a) Il costo di un telegramma dipende dal numero di parole che compongono il suo testo. Dopo esserti informato sui prezzi praticati dalle poste italiane, scrivi l'equazione che rappresenta il costo  $C$  di un telegramma al variare del numero  $P$  di parole e disegna il grafico della funzione  $C = f(P)$  su un piano cartesiano.
- b) Il costo di un pacco postale varia al variare del peso del pacco. Dopo esserti informato sui prezzi praticati dalle poste italiane, scrivi l'equazione che rappresenta il costo  $C$  di un pacco postale ordinario al variare del suo peso  $P$  e disegna il grafico della funzione  $C = f(P)$  su un piano cartesiano.

## Diete alimentari

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche individuare relazioni significative tra grandezze. Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare e per definire relazioni e funzioni (notazione funzionale, tabulare e grafici). Risolvere per via grafica e algebrica problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado. Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano.	Segno di una funzione lineare. Equazioni e disequazioni di primo grado. Funzioni lineari. Sistemi lineari e interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite. Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica.	<u>Relazioni e funzioni.</u>  Numeri e algoritmi.  Argomentare, congetturare, dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi	Scienze

### Contesto

Alimentazione.

Questa attività si situa in un contesto di esperienza quotidiana per gli studenti, anche in continuità con i temi legati all'alimentazione sviluppati nei precedenti livelli scolari.

Risulta anche motivante per la trattazione o l'applicazione di problemi in cui intervengono disequazioni lineari e sistemi di equazioni e disequazioni lineari e la loro rappresentazione grafica sul piano cartesiano.

### Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in quattro fasi di difficoltà crescente. Nella prima gli studenti sono coinvolti nella determinazione della composizione della propria dieta quotidiana, in termini di quantità di grassi, proteine e carboidrati. Successivamente, si propone uno stesso problema relativo alla composizione di una dieta alimentare, articolando, nelle varie fasi, diverse questioni, quali l'introduzione di vincoli e la loro rappresentazione sul piano cartesiano e la ricerca del minimo di una funzione.

#### Prima fase

L'insegnante distribuisce agli studenti una tabella che descrive la composizione rispetto ai grassi, proteine e carboidrati di alcuni fra i principali alimenti che fanno parte della dieta giornaliera. Chiede poi agli studenti di determinare, in base a essa, la quantità di grassi, proteine e carboidrati della propria dieta giornaliera. A titolo esemplificativo, si può utilizzare la seguente tabella che riporta tutti i dati (tranne quello relativo all'uovo) riferiti a 100 g di alimenti edibili:

Alimenti	Proteine (in g)	Grassi (in g)	Carboidrati (in g)
Biscotti secchi	6	8	85
Latte	4	2	4
Pasta	11	1	83
Riso	7	1	87
Pane	8	1	65
Carne	22	5	1
Pesce	18	6	2
1 Uovo (circa 50 g)	6	5	1
Lattuga	2	1	3
Legumi	19	4	54
Arance	2	1	7
Olio	0	99	0
Burro	1	83	2
Merendine	7	17	63
Cioccolata	7	35	55

Tabella 1

Questa prima fase dell'attività richiede diverse abilità, quali una valutazione adeguata delle quantità in grammi degli alimenti che si assumono quotidianamente, leggere e interpretare correttamente i dati della tabella che sono riferiti ai 100 g (tranne che per l'uovo), comprendere che la somma dei grammi per ogni riga non è uguale a 100 (i grammi mancanti si riferiscono all'acqua presente quasi in ogni alimento). Per le diverse abilità coinvolte, può essere significativo far svolgere questa prima fase dell'attività in piccoli gruppi collaborativi di lavoro. L'insegnante che ritenesse eccessivo il tempo da dedicare a questa prima fase, comunque utile allo studente per entrare nel problema, può passare direttamente alla seconda fase.

### Seconda fase

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:

Una dieta prevede un consumo giornaliero di

50 g di grassi

100 g di proteine

250 g di carboidrati

Volendo seguire tale dieta con l'uso di tre soli alimenti  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , determinate le quantità necessarie per ciascuno di essi conoscendo le rispettive composizioni percentuali (in peso):

Composizione	Alimento $x$	Alimento $y$	Alimento $z$
Grassi	30%	5%	5%
Proteine	10%	20%	10%
Carboidrati	20%	15%	40%
Acqua	40%	60%	45%

Tabella 2

In caso di blocco l'insegnante può suggerire di scrivere, per esempio, la relazione che esprime la quantità totale di grassi in funzione delle quantità di grassi contenuta nei tre alimenti ( $0,5 = 0,3x +$

$0,05y + 0,05z^1$ ). Inoltre, in precedenza, può anche aver fatto calcolare la quantità di grassi (o altro) che ciascuno studente consuma in un giorno in base alla sua dieta tipo.

### Terza fase

L'insegnante pone agli studenti il seguente problema:

Una dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 75 g e 125 g e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g con l'ulteriore vincolo che la quantità complessiva di proteine e carboidrati non deve superare i 375 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti  $x$  e  $z$  della Tabella 2. Rappresentate graficamente in un piano cartesiano  $xOz$  le possibili soluzioni.

Il problema si formalizza con il seguente sistema di disequazioni (il peso è espresso in ettogrammi)

$$\begin{cases} 7,5 \leq x + z \leq 12,5 \\ 25 \leq 2x + 4z \leq 30 \\ 3x + 5z \leq 37,5 \end{cases}$$

le cui soluzioni possono essere rappresentate su un piano cartesiano come suggerisce la seguente figura.

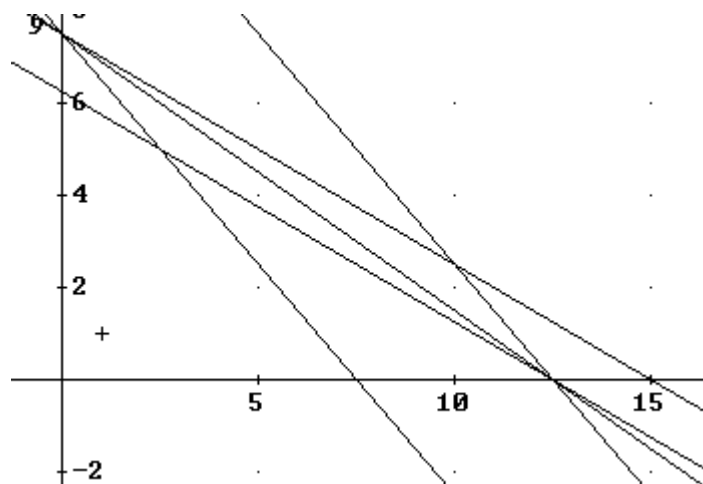


Figura 1

### Quarta fase

L'insegnante propone a piccoli gruppi di studenti il seguente problema di minimo:

Una dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 75 g e 125 g, e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti  $x$  e  $z$  della precedente tabella e di voler minimizzare la quantità dei grassi. Per rappresentare la soluzione potete aiutarvi con parte dei grafici costruiti nel precedente problema. In questo caso si tratta di determinare il valore minimo che la funzione, nelle variabili  $x$  e  $z$ , che rappresenta la quantità di grassi può assumere su un certo poligono. Quale e perché?

I punti di minimo (o di massimo) della funzione che rappresenta la quantità di grassi, si trovano sui vertici del parallelogramma precedentemente considerato. Dopo aver determinato una procedura che consente di calcolare il valore minimo della funzione, si inducono gli studenti a cercare una giustificazione del fatto che il minimo si trova su uno dei vertici del poligono (in questo caso un parallelogramma).

<sup>1</sup> Si può far notare agli studenti l'opportunità di scrivere il peso in etti e non in grammi per semplificare l'equazione che diventa  $5 = 3x + 0,5y + 0,5z$  oppure  $50 = 30x + 5y + 5z$ )

L'insegnante, in fase di discussione delle varie strategie risolutive, propone eventualmente ulteriori giustificazioni, in particolare sul perché il minimo della funzione rappresentante la quantità dei grassi si trova su un vertice del poligono, anche nella prospettiva di ulteriori sviluppi di problemi di ottimizzazione.

### **Possibili sviluppi**

- Come variante del problema proposto nella fase 2, è possibile far scegliere agli studenti i tre alimenti che compongono la dieta, suddividendoli in piccoli gruppi di lavoro.
- Problemi di ottimizzazione e programmazione lineare.

## **Elementi di prove di verifica**

### **1. Massimizzare le proteine**

Una dieta prevede un consumo giornaliero di grassi compreso tra 30 g e 60 g, e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo gli alimenti  $y$  e  $z$  della Tabella 2 e di voler massimizzare la quantità di proteine. Dire se il problema ha soluzioni e, nel caso, determinarle.

### **2. La scelta del contratto più conveniente**

A un giovane viene offerta un'assunzione come rappresentante di commercio con la possibilità di optare fra i seguenti tre tipi di contratto:

- a) un fisso di 1000 euro al mese più una percentuale sul valore delle vendite del 2%;
- b) un fisso di 200 euro ed una percentuale del 12% sul valore delle vendite;
- c) un fisso di 500 euro se il volume delle vendite è compreso tra 1000 e 2000 euro, ed una percentuale del 6% sulla parte eccedente i 2000 euro.

Stabilire quali devono essere i volumi delle vendite che rendono il contratto a) equivalente al contratto b), e il contratto b) equivalente al contratto c).

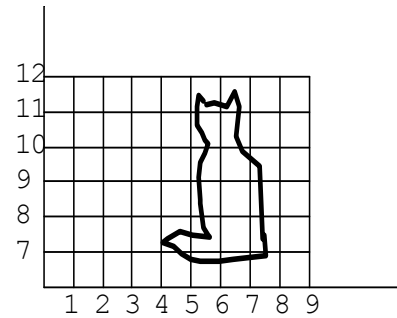
Stabilire, in funzione del volume delle vendite, qual è il contratto più conveniente.

**Elementi di prove di verifica**

**Livello scolastico:** 1° biennio

**Uso di vari registri rappresentativi**

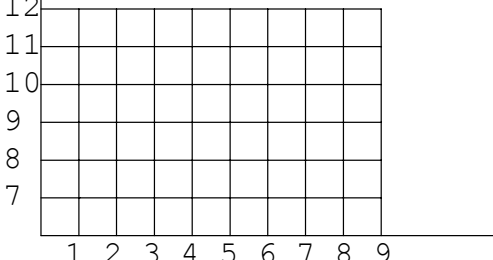
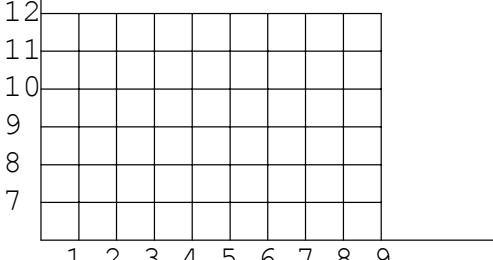
1. Nel prodotto cartesiano degli insiemi  $A\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  e  $B\{7,8,9,10,11,12\}$  la relazione  $R1$  è costituita dalle coppie ordinate di numeri interi che si trovano all'interno del contorno rappresentato nella figura qui a fianco.
  - a. Con quale o quali elementi di  $B$  è in relazione il numero 6?
  - b. Rappresentare la relazione come elenco di coppie ordinate;
  - c. Rappresentare la relazione con il modello sagittale tra gli insiemi  $A$  e  $B$ .
  - d. Scrivere il dominio di  $R1$
  - e. Scrivere il codominio di  $R1$



*Figura 1*

2. Si consideri l'insieme  $A$  costituito dalle seguenti nazioni europee: Italia, Francia, Germania, Gran Bretagna e dalle seguenti città: Roma, Parigi, Londra, New York, Milano, Napoli. Rappresentare la relazione  $R2$ : “ $X$  è capitale di  $Y$ ”, ove  $X$  è elemento di  $B$  e  $Y$  è elemento di  $A$ , con il modello sagittale, come sottoinsieme del prodotto cartesiano  $B \times A$ , come elenco di coppie ordinate
3. Lo stesso del quesito precedente con la relazione  $R3$ : “La città  $X$  non si trova nel paese  $Y$ ”.
4. Nel prodotto cartesiano degli insiemi  $A\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  e  $B\{7,8,9,10,11,12\}$  si rappresentino le seguenti relazioni (con la lettera  $x$  indicheremo un elemento di  $A$ , con la lettera  $y$  un elemento di  $B$ ):

<p><math>R4</math>: la somma tra <math>x</math> e <math>y</math> è uguale a 14</p>	
<p><math>R5</math>: il prodotto tra <math>x</math> e <math>y</math> è minore di 41</p>	

<p><math>R6: x</math> è fattore di <math>y</math></p>	
<p><math>R7: x</math> e <math>y</math> sono indicati, nella lingua italiana, da una parola con lo stesso numero di caratteri</p>	

**Riconoscimento di funzioni**

- 5. Quale delle precedenti relazioni  $R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7$  è una funzione?
- 6. Quali tra le seguenti relazioni sono funzioni?
  - a) I seguenti sono i voti riportati dagli studenti (individuati attraverso il loro numero nel registro) in un compito in classe:

Studente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Voto	6	5	7	6	7	7	4	5	7	8	7	8	5	6	6	5	4

La relazione è “ $X$  ha riportato la valutazione  $Y$ ”

- b) Consideriamo l’insieme  $A$  delle persone e l’insieme  $B$  delle penne presenti in un’aula. La relazione è “ $X$  appartiene a  $Y$ ” con  $X$  appartenente a  $B$  e  $Y$  appartenente ad  $A$ .
- c) Consideriamo l’insieme  $A$  delle persone e l’insieme  $B$  delle penne presenti in un’aula. La relazione è “ $X$  possiede  $Y$ ” con  $X$  appartenente ad  $A$  e  $Y$  appartenente a  $B$ .

**Lettura dei grafici**

- 7. Quali condizioni soddisfano le ascisse e le ordinate dei punti che si trovano nelle parti di piano colorate in grigio della Figura 2? E di quelli che si trovano nelle intersezioni delle diverse zone (analizza i vari casi)?

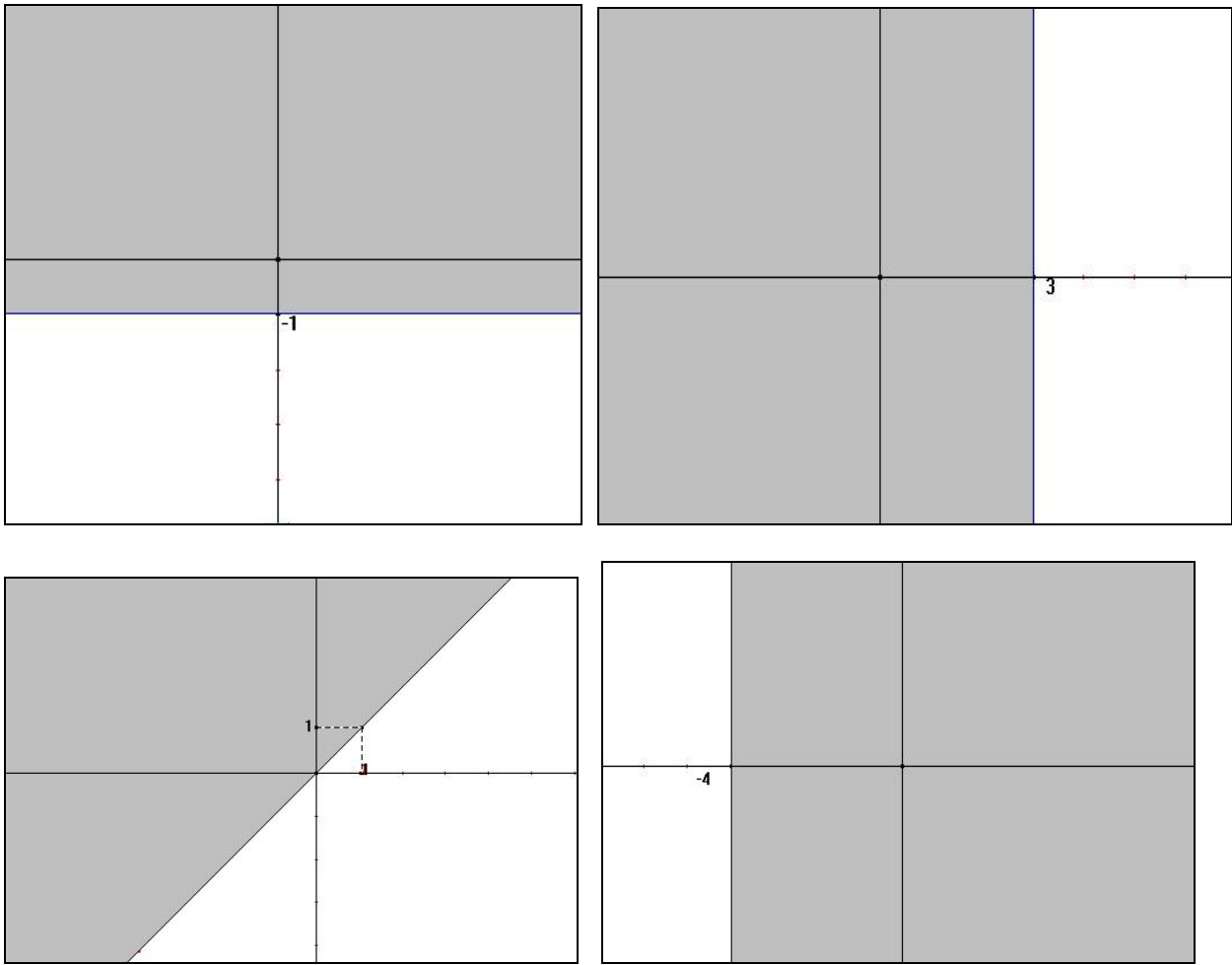


Figura 2

8. Disegna nel piano cartesiano il segmento di estremi  $A(3; 1)$  e  $B(1; -4)$ . Che condizioni soddisfano i punti del segmento?

9. a) In Figura 3 è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette  $x = -5$  e  $x = 5$ .  
 Leggi per quali valori di  $x$  la funzione assume il valore zero.

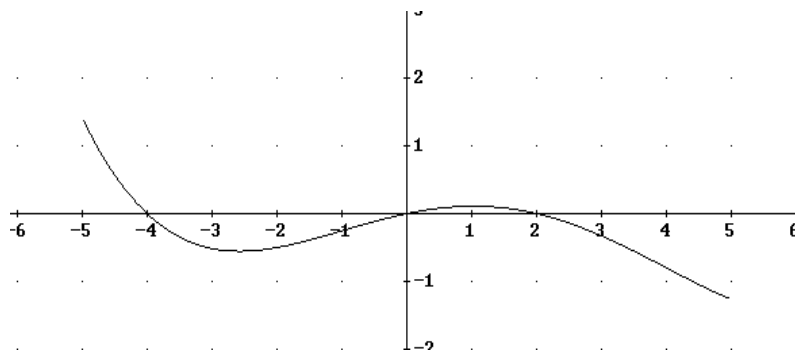


Figura 3

- b) In Figura 4 è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette  $x = -6$  e  $x = 1$ .

Leggi per quali valori di  $x$  la funzione assume un valore positivo.

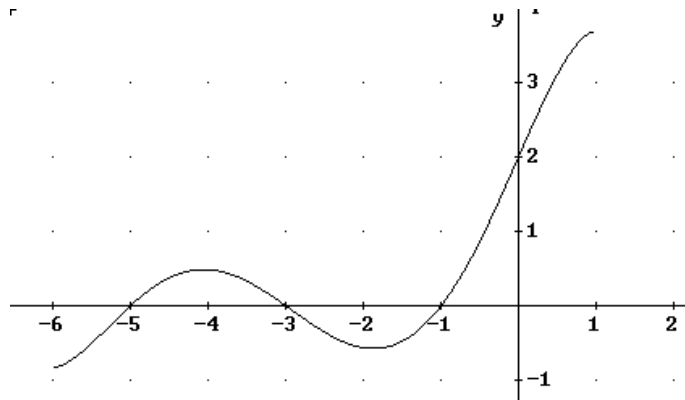


Figura 4

c) In Figura 5 è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette  $x = -1$  e  $x = 5$ .

Leggi per quali valori di  $x$  la funzione assume un valore negativo.

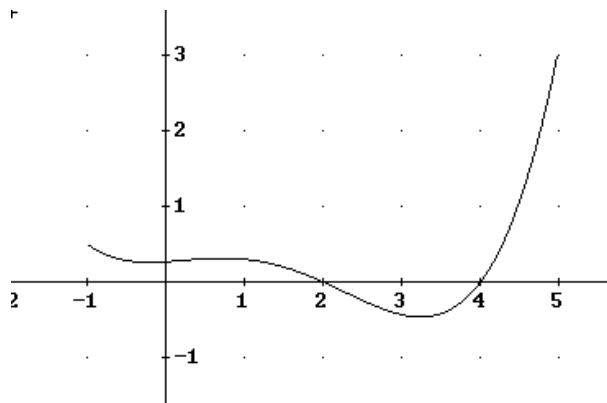


Figura 5

d) Traccia a piacere il grafico di una funzione che sia positiva per  $x < 4$ , si annulli per  $x = 4$ , sia negativa per  $x > 4$ .

10. Rappresenta sul piano cartesiano le rette  $y = 2x + 1$  e  $y = -x + 4$ . Leggi sul grafico le coordinate del loro punto di intersezione e verifica che le sue coordinate soddisfano le equazioni di entrambe le rette.
11. Elenca alcune situazioni di interesse applicativo le cui schematizzazioni matematiche danno luogo a funzioni:
  - lineari;
  - quadratiche;
  - di proporzionalità inversa.