La fabbrica dei cioccolatini

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite Incrementi a passo costante, pendenza media.	<u>Relazioni e funzioni.</u> Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	Economia

Contesto
Vita sociale.

Il problema porta ad elaborare un modello che contiene due componenti: una di proporzionalità diretta e una di proporzionalità inversa.
Lo studio della loro interazione reciproca porta a comprendere che il fenomeno analizzato ha tre aspetti distinti, a seconda che prevalga la proporzionalità diretta, quella inversa o che le due si equilibrino.

Descrizione dell'attività
Obiettivo dell'attività è quello di modellizzare matematicamente una situazione concreta, nei limiti del possibile. Si tenga conto che le situazioni reali sono molto "sporche", nel senso che possono essere descritte da un numero elevato di relazioni che mettono in gioco un grande numero di variabili. In questo consiste la loro ricchezza e significatività. D'altra parte, la matematizzazione richiede sempre delle semplificazioni.
Il modello può essere più o meno sofisticato e dare ragione in forma più o meno adeguata del fenomeno che tratta. Gli elementi di un modello consistono nel suo potere esplicativo e predittivo. In questo senso, esso interpreta il fenomeno nell'ambito di una teoria, che ne dà conto, a meno di una data approssimazione.
La formula che si costruisce nell'attività è un modello della situazione.
Di solito, un modello ha senso per un ambito ristretto di valori numerici, al di fuori dei quali l'interpretazione perde di significato concreto. Nonostante ciò, tenere conto anche di questi valori, può talvolta aiutare a comprendere meglio i rapporti di interdipendenza tra le grandezze in gioco.

Nell'attività si usano due strumenti per interpretare il problema concreto: quello grafico (il piano cartesiano) e quello algebrico (le formule).

Il cambiamento di quadri di riferimento è cognitivamente rilevante: stimola negli studenti la flessibilità di pensiero necessaria a comprendere, da un lato come il modello sia un'interpretazione della realtà, dall'altro come le formule della matematica siano una generalizzazione ed astrazione di situazioni concrete.

Ecco il problema "idealizzato", ma che corrisponde a una situazione reale:

Cioccolatini.
Una ditta produce cioccolatini e li può confezionare in scatole più o meno grandi: si vuole valutare la situazione più conveniente.

A parte una spesa fissa, ovviamente i costi aumentano proporzionalmente alla quantità di cioccolatini prodotti. Si può assumere, invece, che il costo delle confezioni incida di più nel caso che la confezione contenga pochi cioccolatini e che sia più conveniente per l'acquirente se la confezione contiene più cioccolatini.
Naturalmente, nella modellizzazione si trascurano molti parametri e si fanno approssimazioni forti; nulla vieta, però, che una volta che una volta compreso intuitivamente il funzionamento del modello, si possano elaborare interpretazioni più sofisticate.
Detta x la quantità di cioccolatini prodotta, il costo y è dovuto alla somma di:

a) una parte proporzionale a x (ax, con a opportuno coefficiente);
b) una parte inversamente proporzionale a x, (b/x , con b opportuno coefficiente);
c) una spesa fissa, che indichiamo con c.

Un modello che descrive la situazione è quindi del tipo: $y = ax + b/x + c$

Per avere un'idea dell'andamento grafico della funzione non occorre conoscere l'Analisi: gli strumenti informatici di cui si dispone nelle scuole permettono di tracciare grafici per svariati valori dei parametri a, b, c. Nella Figura 1 sono riportati i grafici corrispondenti ai valori a = 0,12; a = 0,24; a = 0,48; con b=7,25; c=4.

Utilizzando i registri algebrico e grafico si può osservare quali modifiche si generano con il variare dei parametri e interpretare tali variazioni nella situazione descritta.
Ciò è cruciale per comprendere il ruolo dei parametri nelle formule; per questo i software dinamici risultano un supporto molto valido.

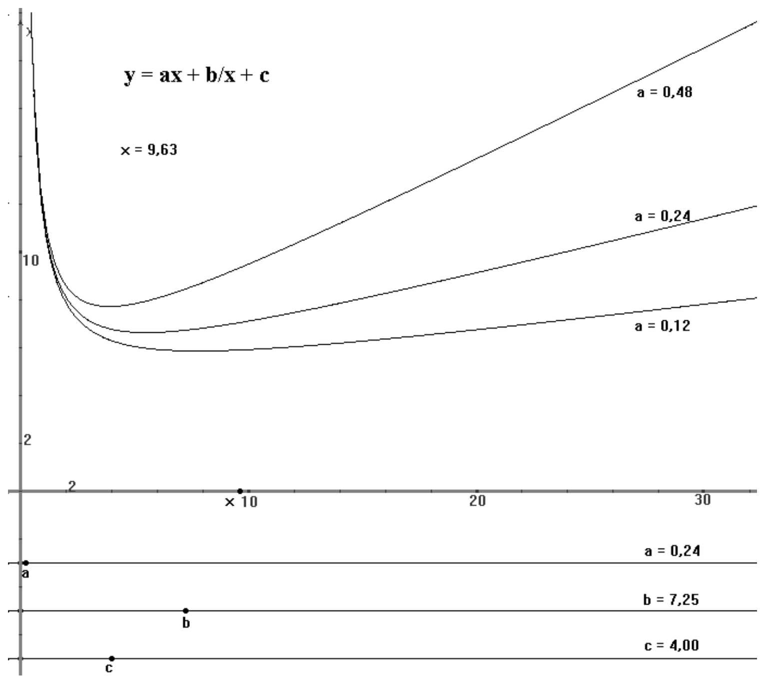

Figura 1

Per non appesantire l'attività con il calcolo, che non è la finalità di questa unità di lavoro, si può utilizzare un software (eventualmente già predisposto dall'insegnante) che permetta di evidenziare il comportamento della funzione al variare dei parametri *a, b, c.*
Nella figura i tre parametri sono indicati come punti vincolati sulle tre rette parallele all'asse x, disegnate in basso: l'ascissa dei tre punti fornisce il valore corrente del parametro. Inoltre, un quarto punto x, vincolato sull'asse x, rappresenta il valore corrente della variabile, cioè il numero di cioccolatini (il modello richiederebbe solo valori interi non negativi, ma la rappresentazione è fatta

nel continuo e va reinterpretata considerando solo i valori discreti. Non ha infatti senso considerare confezioni con 23,5 cioccolatini, anche se il modello dice quale sarebbe virtualmente il costo anche con mezzo cioccolatino!).
Si può costruire la formula $ax + b/x + c$ e il valore y che corrisponde ai valori correnti dei parametri e della variabile x, disegnando così il grafico della funzione:

$$f: x \rightarrow ax + b/x + c$$

Gli studenti possono, per esempio, iniziare a muovere il punto a, osservando i grafici della famiglia di curve

$$f_a: x \rightarrow ax + b/x + c$$

Questa attività permette allo studente di tenere sotto controllo quello che succede e di comprendere la differenza di significato tra una variabile (x) e un parametro (a). In modo analogo si possono studiare le famiglie di curve f_b, f_c, al variare dei parametri b e c.
In generale, gli studenti possono osservare che per $x>0$ il costo dapprima cala al crescere del numero x di cioccolatini, poi comincia a crescere.
Usando una retta variabile parallela all'asse x, si possono determinare approssimativamente i valori x_1 per i quali si ha questo cambiamento (minimo locale). Questi valori rappresentano i numeri di cioccolatini che minimizzano i costi.
L'insegnante porterà gli studenti a fare alcune osservazioni di carattere qualitativo sul grafico, come per esempio le seguenti:

a) Il valore x_1 in cui la funzione f assume il suo minimo diminuisce all'aumentare di a; corrispondentemente il valore $f(x_1)$ aumenta; ciò significa che, a parità degli altri parametri, all'aumentare del costo unitario per la produzione dei cioccolatini diminuisce il numero ottimale di cioccolatini per confezione, anche se il costo complessivo aumenta;
b) Il valore x_1 aumenta all'aumentare di b e corrispondentemente aumenta anche il valore $f(x_1)$; cioè all'aumentare del costo delle confezioni, a parità di numero di cioccolatini, aumenta anche il numero ottimale di cioccolatini, come pure il costo complessivo (anche se l'aumento appare meno sensibile di prima);
c) Il parametro c non muta l'andamento del fenomeno, salvo determinare un aumento o diminuzione costante della spesa complessiva rispetto agli altri parametri.

Questo modello è molto importante nella gestione aziendale: infatti, con un'altra interpretazione delle grandezze in gioco, descrive la cosiddetta *rottura di stock* nella gestione dei magazzini.

Elementi di prove di verifica

1. Bollette del gas

Modellizzate la seguente situazione:
L'azienda del gas può emettere bollette sui consumi con cadenza diversa: ogni mese, ogni due, tre, quattro, sei mesi... Se il cliente paga più volte, l'azienda guadagna gli interessi sulle somme versate dal cliente, ma ha maggiori spese per l'emissione delle bollette, la lettura del contatore, ecc.
Al variare della spesa annuale del cliente qual è il numero ottimale di bollette per l'azienda?

L'area dei rettangoli isoperimetrici

Livello scolare: 2° biennio.

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi. Rappresentare e risolvere problemi di secondo grado. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Equazioni e disequazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	Relazioni e funzioni. Spazio e figure Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Figure geometriche.

Questa attività può essere proposta in una classe di un secondo biennio come primo esempio di problemi di secondo grado e di problemi di massimo o minimo. L'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi del contesto scolastico delle figure geometriche e contribuire a consolidare alcune conoscenze di geometria che gli studenti hanno già conseguito.

Descrizione dell'attività
L'attività richiede di considerare l'insieme dei rettangoli aventi lo stesso perimetro, di rappresentare con una tabella, graficamente e formalmente, la variazione della loro area e di determinare il massimo della funzione che rappresenta l'area. L'uso di un ambiente di geometria dinamica non è necessario, ma può essere opportuno per affiancare ai registri numerico (tabelle), grafico (grafici di funzioni) e formale (la formula che rappresenta la variazione dell'area in funzione di una opportuna variabile) anche un registro geometrico visivo (la variazione dei rettangoli in un ambiente di geometria dinamica). L'attività può essere svolta in un tempo relativamente breve se agli studenti viene già fornito il file nell'ambiente di geometria dinamica, mentre richiede più tempo se si vuole che gli studenti costruiscano, in quell'ambiente, un insieme di rettangoli isoperimetrici.

Prima fase
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:
Considerate l'insieme di tutti i rettangoli isoperimetrici. Scegliete una variabile rispetto alla quale la loro area varia (per esempio uno dei lati del rettangolo) e rappresentate la variazione dell'area individuando, sul grafico, il punto di area massima. Rappresentate, inoltre, in una tabella, alcuni valori assunti dall'area dei rettangoli al variare del lato considerato.

La Figura 1 illustra come si presenta la situazione in un ambiente di geometria dinamica. La lunghezza del segmento *AB* (6,01 nella Figura 1) rappresenta il semiperimetro dei rettangoli; il numero 12,01 rappresenta, invece, il perimetro. L'errore sull'ultima cifra dipende dalle approssimazioni effettuate sui numeri che esprimono la misura del semiperimetro e del perimetro.

I numeri 8,45 cm^2, 9,02 cm^2 e 6,37 cm^2 forniscono alcuni valori dell'area dei rettangoli, che si vede prima crescere (fino a che il rettangolo non si trasforma in un quadrato) e poi decrescere.

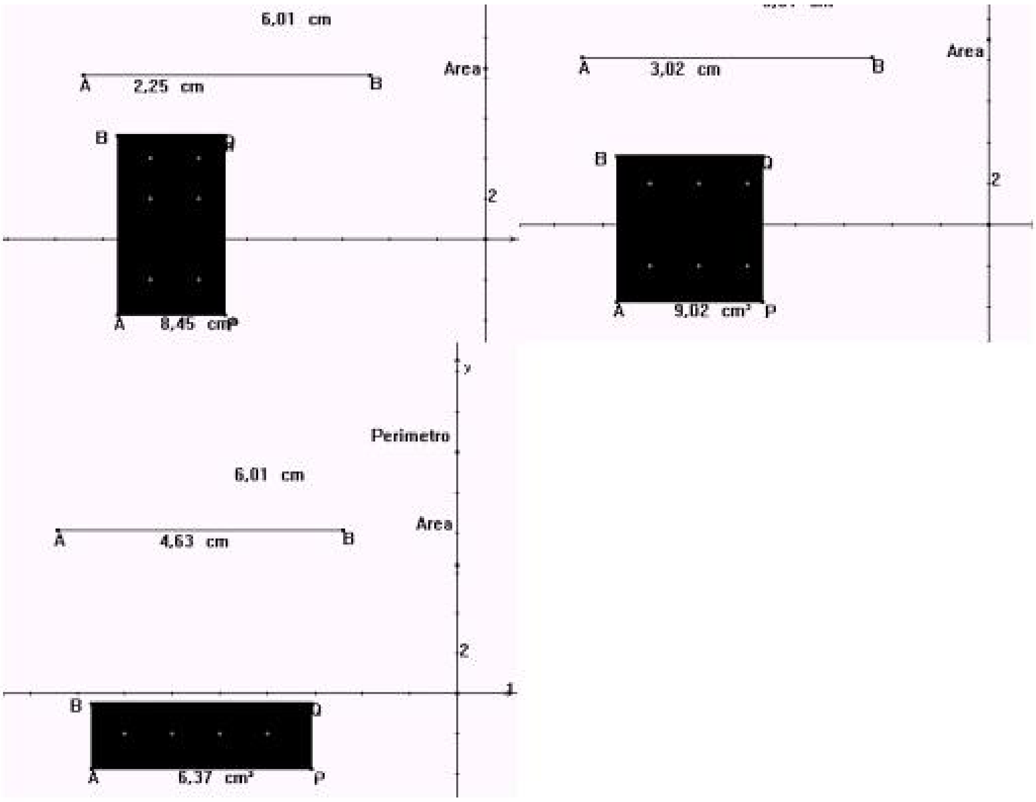

Figura 1

In tale ambiente, inserendo un sistema di assi cartesiani, è possibile rappresentare la variazione dell'area in funzione, per esempio, della misura del lato *AP*, come suggerisce la Figura 2 dove compare anche il grafico della funzione costante "perimetro".

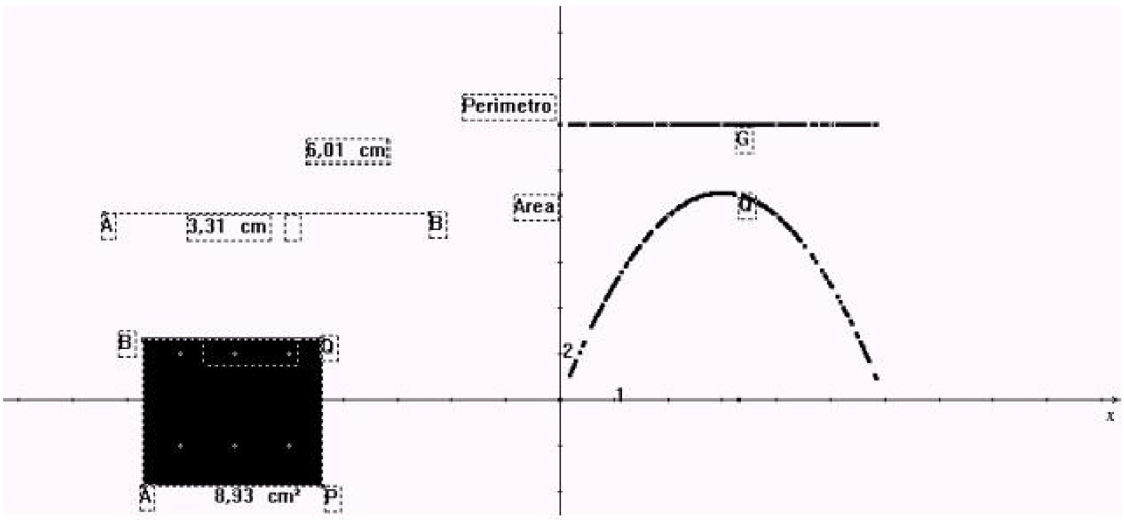

Figura 2

Seconda fase

L'insegnante invita gli studenti a formalizzare il problema indicando con x la misura del lato rispetto al quale varia l'area, a determinare l'area dei rettangoli in funzione di x e a calcolarne il massimo.

Gli studenti dovrebbero notare che, detta x la base e p il semiperimetro (che misura, nel caso rappresentato in figura, 6,01 cm), l'altezza vale $p - x$, per cui l'area è data da $(p - x)\, x$.
Si tratta di una parabola che ha il massimo per $x = p/2$, quando il rettangolo è un quadrato.

Possibili sviluppi:

- Problemi di massimo e minimo.
- Dimostrazioni sintetiche di alcune proprietà determinate per via analitica.

Elementi di prove di verifica

1. Triangoli

Si consideri l'insieme dei triangoli tali che la somma di un lato e dell'altezza a esso relativa misuri 3 cm. Dopo aver scritto un'equazione della funzione che esprime l'area di tali triangoli al variare della misura del lato, rappresenta il grafico di tale funzione su un piano cartesiano e determina il triangolo di area massima.

La concentrazione di un farmaco nel sangue

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Acquisire familiarità con i concetti di crescenza e decrescenza di una funzione. Costruire modelli sia discreti che continui di evoluzione di fenomeni nel tempo. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Zeri di funzioni. La funzione esponenziale. Semplici esempi di successioni. Incrementi a passo costante, pendenza media.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Scienze

Contesto
Educazione alla salute.

Questa attività può essere introdotta in una terza o in una quarta classe, quando gli alunni hanno già acquisito abilità nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni, nella rappresentazione grafica di semplici funzioni e nell'individuazione di relazioni funzionali fra grandezze. Sarebbe anche possibile proporre quest'attività in un primo biennio, ma, in tal caso, bisognerebbe evitare alcune questioni che qui, invece, vengono discusse e, soprattutto, si dovrebbe tener conto del fatto che molte delle abilità che qui abbiamo dato per acquisite dovrebbero ancora essere oggetto di attenzione didattica. L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre, affrontare e approfondire:
- nozioni come quelle di funzione, in particolare di successione, di crescenza di una funzione, di modello;
- tecniche come quelle delle differenze finite per ottenere informazioni sulla crescenza e sul come cresce una funzione;
- tecniche di programmazione per calcolare i valori di una successione definita per ricorsione.

Consente anche di avviare una prima riflessione sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Proprio per questi motivi, l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*. Attività di questo tipo rendono possibile la ripresa e l'approfondimento di tecniche di risoluzione di equazioni, sia grafiche sia numeriche, sia formali. La compresenza di questi tre approcci rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, soprattutto dei manipolatori grafico simbolici.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi di studenti, richiedendo di riportare la discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone la *situazione – problema* sotto riportata a gruppi collaborativi formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno):

Una studentessa si è prodotta una distorsione al ginocchio durante una partita di pallavolo indoor e il suo dottore le ha prescritto un farmaco anti-infiammatorio per ridurre il gonfiore. Deve prendere due pastiglie da 220 mg ogni 8 ore per 10 giorni. I suoi reni filtrano il 60% di questo farmaco dal suo corpo ogni 8 ore.

Quanta medicina si trova nel suo organismo dopo 3 giorni? E dopo 4 giorni? E dopo 10 giorni? Cercate di studiare l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel corpo; in particolare, cercate di capire che cosa accadrebbe se la studentessa continuasse a prendere il farmaco per molto tempo: pensate che la presenza del farmaco nel suo organismo tenderebbe prima o poi a diminuire o aumenterebbe sempre? E, nel caso aumentasse sempre, pensate che potrebbe superare un qualunque valore prefissato, oppure tenderebbe a un valore che non è superabile nemmeno lasciando passare molto tempo?

L'insegnante può suggerire di costruire una tabella come la seguente:

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)
0	1	0	
1	1	8	
2	1	16	
3	2	24	
…	…	…	
n			

Tabella 1

Ci si attende che i gruppi di studenti inizino a compilare la tabella[1] , come suggerito dalla Tabella 2, calcolando, con l'aiuto della calcolatrice, la quantità di farmaco che si trova nell'organismo alla fine di ogni successiva assunzione di pastiglie.

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)
0	1	0	440
1	1	8	0,4*440+440 = 616
2	1	16	0,4*616+440 = 686
3	2	24	0,4*686+440 = 714
4	2	32	0,4*714+440 = 726
5	2	40	0,4*726+440 = 730

Tabella 2

La Tabella 2 suggerisce almeno due congetture:

[1] La scelta di non considerare alcuna cifra dopo la virgola, nella misura dei milligrammi di farmaco rimasti nel corpo dopo ogni somministrazione, dovrebbe essere oggetto di discussione con la classe: è meglio lasciare che gli studenti utilizzino in libertà tutte le cifre decimali che credono nella determinazione dei risultati e poi discutere l'opportunità delle diverse scelte, evidenziandone limiti e potenzialità. Noi abbiamo scelto valori interi per conformità con il dato iniziale di 440 mg.

1. la successione è crescente, ma cresce sempre meno
2. dato un determinato valore del farmaco rimasto nel sangue, il successivo può essere determinato moltiplicando tale valore per 0,4 e addizionando 440, ossia i milligrammi di farmaco assunti.

L'osservazione 1 può essere corroborata e giustificata sia con argomentazioni logico – intuitive, sia con l'aiuto di tecniche come, per esempio, le differenze finite.
Le argomentazioni che possono essere addotte sono riconducibili, in genere, alla seguente:
"I reni della studentessa sono capaci di filtrare il 60% di una quantità che cresce, ossia filtrano una quantità sempre maggiore; quando la quantità che filtrano sarà uguale a quella assunta, che è costante (440 mg), allora la quantità di farmaco presente nel sangue si stabilizza".

Con le tecniche delle differenze finite è possibile rilevare esplicitamente che non solo la successione dei valori di farmaco presenti nell'organismo cresce, ma anche che cresce sempre meno.
Infatti, osservando la Tabella 3, è immediato accorgersi che le differenze prime diminuiscono.

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)	Differenze prime
0	1	0	440	
1	1	8	616	176
2	1	16	686	70
3	2	24	714	28
4	2	32	726	12
5	2	40	730	4

Tabella 3

Il metodo delle differenze finite è particolarmente indicato quando la variabile indipendente varia con passo costante. In tal caso, le differenze prime sono proporzionali alla pendenza della retta congiungente due punti successivi della successione (la costante di proporzionalità è il passo con cui variano i valori della variabile indipendente). In altri termini, se la variabile indipendente varia con passo costante, la si può anche dimenticare, concentrandosi sulla variazione dei valori della variabile dipendente. In questo caso, la tabella si può leggere in colonna, e non riga per riga. Questo modo di guardare i dati è caratterizzato da una certa dinamicità e consente di valutare velocemente crescenza e concavità di una curva che rappresenta l'andamento del fenomeno oggetto di studio, senza scomodare conoscenze matematiche che vadano al di là di differenze e, eventualmente, ma non necessariamente, di rapporti.
Questo primo tipo di osservazioni dovrebbe portare gli studenti ad avere un'idea anche grafica dei punti che formano la successione; in un primo momento l'insegnante potrebbe accontentarsi anche di gesti che indichino una curva crescente con la concavità rivolta verso il basso e tendente verso un limite.
La congettura di 2 necessita di maggiore attenzione nella lettura dei dati e di una certa abilità nel riconoscere regolarità in una successione. Se gli studenti sono stati abituati a non effettuare subito i calcoli, ma ad osservare prima come variano i dati su cui vengono effettuate le operazioni, si accorgeranno che tutti i calcoli effettuati possono essere rappresentati con lo schema:
$F(n) = 0{,}4 * F(n\text{-}1) + 440$
Dove abbiamo indicato con $F(n)$ e $F(n\text{-}1)$, rispettivamente, la quantità di farmaco presente subito dopo l'ennesima somministrazione delle pastiglie e quella presente subito dopo la somministrazione precedente.
In genere questa scrittura suggerisce ad alcuni studenti la possibilità di determinare il valore limite della successione. Infatti, se tale valore limite esiste, esso deve poter essere determinato ponendo $F(n) = F(n\text{-}1) = x$ e quindi risolvendo l'equazione $x = 0{,}4\, x + 440$ che dà il valore $x = 4400/6 \cong 733$.

Seconda fase

L'attività può proseguire invitando gli studenti a costruire programmi che consentono di calcolare automaticamente i valori della successione, partendo dalla definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} F(0) = 440 \\ F(n) = 0{,}4 \cdot F(n-1) + 440 \end{cases}$$

Il compito di costruire un programma o di definire la successione in un ambiente di manipolazione simbolica può anche essere portato a termine individualmente; in questo caso non è necessario che gli studenti lavorino in gruppo.

Di seguito si riporta il programma "farm" e la funzione "farmaco(n)"[2] costruiti per alcune calcolatrici programmabili grafico – tascabili che presentano un manipolatore simbolico simile a quello utilizzato da software ormai di diffusione relativamente vasta nelle scuole.

```
: farm( )                    (intestazione: nome programma)
:Prgm                        (indica che si tratta di un programma)
:Request "dammi n", n        (il sistema attende un input che inserisce nella cella di nome n)
: expr(n) → n                (l'input n, preso come stringa, viene trasformato in dato numerico)
: 440 → far                  (si inizializza la variabile far)
: For i, 1, n, 1             (inizio ciclo for, con i che va da 1 a n, passo 1)
: 0.4 * far + 440 → far      (aggiornamento dei valori della successione inseriti in far)
: EndFor                     (fine ciclo for)
: Disp far                   (viene visualizzato il contenuto di far)
: EndPrgm                    (fine programma)
```

```
: farmaco(n)                 (intestazione: nome funzione)
: Func                       (indica che si tratta di una funzione)
: if n = 0                   (se n = 0
: Return 440                 (restituisce il valore 440)
: if n > 0                   (se n > 0
: Return 0.4*farmaco(n-1)+440   restituisce il valore indicato)
: EndFunc                    (fine funzione)
```

L'insegnante può discutere con gli studenti sulla convenienza o meno di utilizzare un programma o una funzione per calcolare i valori della successione. Soprattutto, però, dovrebbe cercare di dare una risposta a una domanda che emerge in modo naturale quando si paragonano i tempi di calcolo impiegati per computare i valori della successione utilizzando la funzione e il programma. Perché con la funzione sopra definita si riesce a computare un numero sensibilmente inferiore di valori rispetto a quanto consente il programma?

La risposta a questa domanda è un'occasione per far capire le sensibili differenze che, dal punto di vista computazionale, esistono tra la ricorsione e l'iterazione.

Si può iniziare suggerendo che il programma, per come è stato definito, calcola i valori della successione in modo analogo (anche se molto più velocemente e con maggiore affidabilità) a quanto si fa con il calcolo con carta e penna. Infatti a partire dal dato $F(1) = 440$, si calcola $F(2)$ utilizzando la legge $F(n) = 0{,}4{*}F(n\text{-}1) + 440$; poi si calcola $F(3)$ utilizzando il dato F(2) appena ottenuto e la stessa legge di prima e così via. A ogni passo è necessario tenere in memoria solamente la legge e il dato precedente; nient'altro.

[2] In genere le calcolatrici grafico – simboliche hanno già funzioni predefinite che consentono il calcolo dei valori di una successione per iterazione, ma si ritiene preferibile, in un primo momento, far costruire dagli studenti un programma e una funzione che consentano di effettuare automaticamente tale calcolo. In seguito è possibile indicare loro come utilizzare eventuali funzioni predefinite del software utilizzato.

Invece la ricorsione richiede una disponibilità di memoria molto maggiore. Che cosa vuol dire, infatti, calcolare $F(4)$ utilizzando la funzione sopra definita?
$F(4) = 0{,}4 * F(3) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(3)$)
$F(3) = 0{,}4 * F(2) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(2)$)
$F(2) = 0{,}4 * F(1) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(1)$)
$F(1) = 0{,}4 * F(0) + 440$
Poiché $F(0) = 440$ si può tornare indietro, calcolando, in successione, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ e, finalmente, $F(4)$, svuotando progressivamente la memoria. Risulta evidente che un tale processo richiede un impegno di risorse di memoria che diventa presto rilevante con il crescere di n.
L'insegnante può anche far notare che il problema del computo dei valori può essere brillantemente risolto con un foglio elettronico. Per esempio, con un foglio elettronico in genere disponibile nelle scuole, la formula che genera i successivi valori della successione nella colonna A può essere costruita inserendo 440 in A1 e inserendo in A2 la formula =0,4*A1+440, quindi copiando tale formula nel numero di celle voluto.

<u>Terza fase</u>
L'insegnante può ora proporre un quesito più semplice del precedente; si suggerisce di far lavorare gli studenti individualmente e non a gruppi, per vedere non solo se sono in grado di mettere in pratica l'esperienza acquisita nella precedente attività, ma anche se riescono ad attivare strategie risolutive che risultano più appropriate per rispondere alle seguenti domande:

Come evolve la presenza del farmaco se, dopo dieci giorni, la studentessa non lo assume più?[3]
Quanto tempo impiega a ridursi a 1/100 del farmaco presente dopo dieci giorni?

Ci si può attendere che molti studenti, anche a causa dell'attività appena svolta, definiscano una nuova successione per ricorrenza

$$\begin{cases} G(0) = 733 \\ G(n) = 0{,}4 \cdot G(n-1) \end{cases}$$

senza accorgersi che, in tal caso, è più semplice o, almeno, più efficace trovare una forma chiusa come

$$G(n) = (0{,}4)^n \cdot 733$$

facilmente ottenibile con l'osservazione di come vengono calcolati, successivamente, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$, … a partire da $G(0)$. Tutti, però, dovrebbero accorgersi che, in tal caso, i valori della successione diminuiscono e diminuiscono sempre meno (il gesto di una mano che percorre una curva decrescente con concavità rivolta verso l'alto sarebbe sufficiente a verificare la comprensione degli studenti sulle caratteristiche più significative dell'evoluzione del fenomeno).
La formula $G(n) = (0{,}4)^n \cdot 733$ consente di rispondere all'ultima domanda risolvendo l'equazione

$$7{,}33 = (0.4)^n\ 733$$

La soluzione può essere cercata per tentativi o anche graficamente (lavorando nel continuo, con la funzione $y = (0.4)^x$ con x variabile reale). Si ritiene preferibile una risoluzione per tentativi (che metta in gioco esplicitamente il concetto di soluzione di un'equazione) o grafica (che richiede eventuali cambi di scala, uso di finestre grafiche adeguate), seguita eventualmente da una soluzione che utilizzi i logaritmi. E' importante che l'uso dei logaritmi non sia meccanico, o inconsapevole; in questo caso la soluzione di un'equazione esponenziale può essere ben motivata.

<u>Quarta fase</u>
L'insegnante, prendendo come spunto la risoluzione del precedente problema (determinare dopo quanto tempo il farmaco presente nel corpo si riduce a circa 7,33 mg, partendo da un valore di 733

[3] Si suppone che tutti gli studenti abbiano calcolato il valore della quantità di farmaco presente dopo 10 giorni, ossia, circa 733 mg.

mg) potrebbe chiedere agli studenti di cercare di determinare una dipendenza esplicita da n anche nel caso della legge

$$\begin{cases} F(0) = 440 \\ F(n) = 0,4 \cdot F(n-1) + 440 \end{cases}$$

È possibile giustificare questa richiesta discutendo i vantaggi di una formula che dà $F(n)$ esplicitamente in funzione di n, rispetto a una funzione definita per ricorrenza.
Il lavoro dovrebbe essere svolto nuovamente in piccoli gruppi, e l'insegnante osserverà e valuterà la capacità di organizzare i dati che i ragazzi dovrebbero avere acquisito con le precedenti attività. Organizzando i dati nel seguente modo:
$F(0) = 440$
$F(1) = 0,4*F(0) + F(0)$
$F(2) = 0,4*F(1) + F(0) = 0,4* (0,4*F(0) + F(0)) + F(0) = 0,4^2 *F(0) + 0,4 * F(0) + F(0)$
$F(3) = 0,4*F(2) + F(0) = 0,4 * (0,4^2 *F(0) + 0,4 * F(0) + F(0)) + F(0) = 0,4^3 *F(0) + 0,4^2 * F(0) + 0,4 * F(0) + F(0)$
È possibile congetturare che si ha
$F(n) = F(0) *(0,4^n + 0,4^{n-1} + 0,4^{n-2} + \ldots\ldots + 0,4 + 1)$
Il problema diventa quindi quello di determinare la somma $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^i$.
L'insegnante farà notare che, detta s la somma $0,4^n + 0,4^{n-1} + 0,4^{n-2} + \ldots\ldots + 0,4 + 1$, si ha che

$0,4*s = 0,4^{n+1} + s - 1$. Ciò equivale a dire che $s = \dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

La legge che lega esplicitamente F(n) a n è quindi

$\mathrm{F}(n) = 440 \quad * \quad \dfrac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

<u>Quinta fase</u>
L'insegnante può far notare che il fenomeno preso in considerazione dipende da alcuni parametri:
- il farmaco presente nel sangue all'istante 0, diciamo a;
- la percentuale di farmaco filtrata dai reni, diciamo b;
- la quantità che viene aggiunta a ogni somministrazione, diciamo c.

Ciò vuol dire che il problema precedente può essere generalizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases} F(0) = a \\ F(n) = b * F(n-1) + c \end{cases}$$

Si può quindi assegnare ai gruppi di studenti il seguente problema:
Studiare come varia l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel sangue quando si modificano i parametri significativi (si suggerisce di provare a modificare un parametro alla volta, tenendo costanti gli altri due).

È interessante osservare se il lavoro degli studenti avviene a livello puramente sperimentale o se, invece, vengono tenute presenti tutte le conoscenze già acquisite. Per esempio, studenti che riuscissero a capire che la legge generale che esprime la dipendenza esplicita di F(n) è del tipo

$$\mathrm{F}(n) = b^n a + \frac{1-b^n}{1-b}$$

probabilmente risolverebbero il problema proposto in breve tempo, dimostrando, inoltre, buone abilità di produrre e utilizzare forme di pensiero analogico che, in matematica, sono assolutamente importanti.

Possibili sviluppi:

- Dimostrazioni, per induzione, di alcune congetture avanzate dagli studenti o suggerite dall'insegnante.
- Approfondimenti sul problema delle approssimazioni e del controllo del risultato di calcoli in cui si fa sistematico uso di approssimazioni.
- Il problema delle somme infinite: come valutare la convergenza e, nel caso in cui la somma converga, quali tecniche possono essere utilizzate per determinare la somma di infiniti termini (eventualmente con l'aiuto di calcolatrici grafico – simboliche).
- Le differenze finite per trovare la legge con cui è stata generata una successione di numeri (nel caso di leggi polinomiali o nel caso di leggi esponenziali).
- Critica sulle potenzialità e i limiti del modello, anche con considerazioni di carattere chimico – biologico.
- Effetti delle droghe e dell'alcool sull'organismo (in collaborazione, almeno, con l'insegnante di scienze e chimica).
-

Elementi di prove di verifica

1. Ricerca della legge

La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza *B* in funzione di una grandezza *A*. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (*A*); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente *B*. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (*B*2- *B*1, *B*3- *B*2, *B*4- *B*3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella terza colonna (*C*3-*C*2, *C*4-*C*3, *C*5-*C*4 … e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione $B = f(A)$, spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	*B*	*C*	*D*
0	0		
0,3	-0,51	-0,51	
0,6	-0,84	-0,33	0,18
0,9	-0,99	-0,15	0,18
1,2	-0,96	0,03	0,18
1,5	-0,75	0,21	0,18
1,8	-0,36	0,39	0,18
2,1	0,21	0,57	0,18
2,4	0,96	0,75	0,18
2,7	1,89	0,93	0,18
3	3	1,11	0,18
3,3	4,29	1,29	0,18
3,6	5,76	1,47	0,18
3,9	7,41	1,65	0,18
4,2	9,24	1,83	0,18
4,5	11,25	2,01	0,18
4,8	13,44	2,19	0,18

Tabella 4

2. La palla che rimbalza

Una palla magica viene lasciata cadere da un'altezza h. Supponendo che la palla perda il 15% dell'energia a ogni urto con il terreno, studiare l'evoluzione dell'altezza della palla dal suolo all'aumentare del numero di urti, determinando una legge analitica che rappresenti la variazione dell'altezza della palla dal suolo. Come sarebbe il grafico dell'altezza della pallina dal suolo al variare del tempo? C'è qualche relazione tra i due grafici appena descritti?

3. Pesci in una riserva di pesca

All'inizio di un'osservazione in una riserva di pesca sono presenti 2000 pesci. Supponendo che il numero dei pesci diminuisca ogni anno, per varie cause (la pesca, morte naturale ecc.), del 30% e che alla fine di ogni anno la riserva venga ripopolata con 1500 pesci, quale sarà l'evoluzione del numero di pesci presenti nello stagno se le ipotesi fatte rimangono costantemente valide?
Come varia l'evoluzione del fenomeno al variare dei parametri significativi?

4. Decadimento radioattivo

Supponiamo di studiare la disintegrazione di una massa di materiale radioattivo. Sia t il tempo misurato a partire da quando si inizia a studiare il fenomeno e sia $m = m(t)$ la massa che al tempo t non si è disintegrata. Supponiamo che la velocità di disintegrazione sia proporzionale, in ogni istante, alla massa $m(t)$ non ancora disintegratasi. Come evolverà la massa $m(t)$? Dopo aver prodotto qualche congettura di tipo qualitativo, provate a fare qualche ipotesi quantitativa (per esempio potreste ipotizzare che in ogni unità di tempo si disintegri, mediamente, il 5% della massa) e verificate la risposta data in precedenza aiutandovi con le calcolatrici.

5. Una successione di quadrati

La seguente figura indica una costruzione che parte dal quadrato di vertici $A_1B_1C_1D_1$ e prosegue all'infinito considerando i punti medi di ciascun lato di ogni nuovo quadrato.

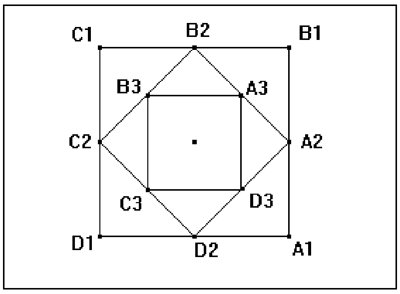

Figura 1

Descrivi la costruzione del secondo quadrato $A_2B_2C_2D_2$; descrivi la costruzione del quadrato generico, motivandola.
Assegnata la misura del lato del quadrato iniziale, ad esempio 1, come varia il lato del quadrato quando si procede a costruzioni successive? Qual è il rapporto tra un lato e il lato del quadrato successivo? Come varia l'area del quadrato? Qual è il rapporto tra un'area e la successiva?
Considera la somma delle aree dei quadrati, a partire dal primo quadrato assegnato aggiungendo le aree dei quadrati via via ottenuti. Come varia questa somma? A quale limite tende quando il numero dei quadrati tende all'infinito?

Moto di un proiettile

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi. rappresentare graficamente e risolvere problemi che si formalizzano con sistemi di secondo grado. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Equazioni e disequazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici. Le funzioni seno, coseno e tangente.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di Matematica	Fisica

Contesto
Applicazioni goniometriche.

Questa attività può essere proposta in una classe di un secondo biennio nella quale siano già stati introdotti i concetti di seno e coseno di un angolo acuto e trattati i primi elementi di cinematica (almeno le equazioni orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato e il moto di caduta libera di un grave). Il contesto di riferimento è quindi quello scolastico dei primi elementi di fisica e l'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi di questo contesto e contribuire a consolidare alcune conoscenze che gli studenti hanno conseguito nei corsi di fisica. Attraverso un esempio storicamente significativo[1], si introducono, per un caso particolare, le equazioni parametriche di un luogo geometrico (una parabola con asse verticale) che è oggetto di studio di geometria analitica che, in quanto funzione quadratica, costituisce uno degli argomenti indicati nel tema "*Relazioni e funzioni*" del primo biennio.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. La prima consiste in una discussione qualitativa sul moto di un proiettile e in una successiva sistemazione quantitativa condotta dall'insegnante. Nella seconda fase, grazie anche all'uso di software di manipolazione simbolica, si propongono agli studenti quesiti finalizzati alla costruzione di tecniche utili a risolvere problemi di moto del proiettile utilizzando le sole leggi orarie. Nella terza fase si determina, a partire dalle leggi orarie, l'equazione cartesiana della traiettoria.
L'uso degli strumenti informatici è fortemente consigliato nella conduzione di quest'attività.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone agli studenti di descrivere qualitativamente la traiettoria del moto di un oggetto lanciato con un angolo diverso da 0 rispetto alla verticale. Dopo una discussione di carattere

[1] Le ricerche volte allo studio del moto dei corpi e, in particolare, al moto di un proiettile, sono state, nel XVII secolo, oggetto di attenzione e finanziamenti considerevoli.

qualitativo, tesa soprattutto ad ascoltare le risposte degli studenti, evidenziando quelle più adatte a preparare la trattazione più formale e quantitativa, l'insegnante fa riflettere sul fatto che il moto di un proiettile, trascurando altre forze che non siano quella di gravità, avviene in due dimensioni.
Scomponendo il moto in due direzioni fra loro ortogonali, delle quali una coincidente con quella della forza di gravità, si ottiene un moto uniformemente accelerato lungo una direzione e rettilineo uniforme lungo l'altra.
Un esempio di possibile introduzione del problema del moto di un proiettile viene qui accennata:
un moto parabolico è caratterizzato da una velocità iniziale v_0 (in m/s) e da un angolo di tiro α (si tratta dell'angolo formato dalla direzione di tiro con l'asse orizzontale). Il suo moto orizzontale è uniforme, con velocità costante uguale a $v_0 \cos(\alpha)$. Quindi, assumendo che, nell'istante t=0, il punto si trovi nell'origine, la posizione orizzontale è descritta dalla funzione

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t.$$

Che cosa succede verticalmente? È come se lanciassimo un sasso verso l'alto. La velocità verticale varia, perché la forza di gravità determina un'accelerazione diretta verticalmente verso il basso. Se non ci fosse l'accelerazione di gravità la velocità verticale sarebbe costante, pari a $v_0 \sin(\alpha)$.
Invece l'accelerazione di gravità, che si indica con g e che vale circa 9,8 m/s^2, produce una diminuzione della velocità pari a g m/s ogni secondo. Quindi la velocità verticale varia nel tempo con la seguente legge: $v(\mathrm{t}) = v_0 \sin(\alpha) - gt$.
Come varia la posizione verticale? Consideriamo l'istante iniziale t=0 (in cui la velocità verticale vale $v_0 \sin(\alpha)$) e un istante qualsiasi t (in cui la velocità verticale vale $v_0 \sin(\alpha)-gt$); nell'intervallo di tempo da 0 a t, poiché la velocità varia uniformemente, la velocità media è uguale a $\frac{v_0\sin(\alpha)+v_0\sin(\alpha)-gt}{2} = \frac{2v_0\sin(\alpha)-gt}{2} = v_0\sin(\alpha)-\frac{1}{2}gt$.
Se nell'intervallo di tempo che va da 0 a t (cioè in t secondi) un punto si muove con velocità media pari a $v_0\sin(\alpha)-\frac{1}{2}gt$, allora percorre uno spazio (in metri) s(t) = $\left(v_0\sin(\alpha)-\frac{1}{2}gt\right)t$. Quindi la sua posizione verticale è data dalla funzione $y = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2$.
Quindi le funzioni parametriche di un moto parabolico caratterizzato da velocità iniziale v_0 e angolo di tiro α sono espresse con le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)t \\ y = v_0\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Seconda fase
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema da svolgersi con l'aiuto di un software di manipolazione simbolica, utilizzando eventualmente le calcolatrici grafico - simboliche[2].

Si lancia un sasso con una velocità iniziale v_0 = 10 m/s in direzione α = 60°; assumendo g=9,8 m/s^2:
a) scrivere le funzioni parametriche del moto;
b) in ambiente Parametric[3] impostare xt1= e yt1= secondo le funzioni stabilite;
c) in ambiente Window[4] ponete tmin=0 e tmax uguale ad un numero opportuno di secondi (non troppo grande; quanto resta in aria un sasso lanciato a 60° con velocità 10 m/s?). Ponete xmin=0 e xmax uguale ad un numero opportuno di metri (quanto procede il sasso in orizzontale prima di

[2] Nel prosieguo dell'attività si fa riferimento a un ambiente tipico di alcune calcolatrici grafico – simboliche. Non è difficile riformulare le richieste adeguandole al particolare strumento utilizzato. Eventualmente è anche possibile riformulare l'attività senza riferirsi ad alcun software.
[3] Ci si riferisce all'ambiente del software nel quale è possibile definire funzioni parametriche.
[4] Ci si riferisce all'ambiente del software nel quale è possibile ridefinire la finestra grafica nella quale rappresentare le funzioni che si definiscono.

cadere a terra?). Ponete ymin=0 e ymax uguale ad un numero opportuno (quale altezza massima potrà raggiungere, all'incirca, il sasso?). In Y=Editor, con il cursore su xt1= oppure su yt1= settate F6 Style, Path, in modo da vedere una "pallina" che si muove lasciando dietro di sé la traiettoria. Finalmente andate in Graph e osservate il moto. Se occorre, cambiate i parametri in Window, in modo da osservare bene il moto sullo schermo della calcolatrice;
d) osservando il grafico e usando qualunque metodo riteniate opportuno rispondete alle seguenti domande:

- Quanti metri percorre il sasso in orizzontale prima di cadere a terra? Questa distanza si chiama *gittata* del moto parabolico.
- Per quanti secondi rimane in aria prima di cadere a terra? Questo intervallo di tempo si chiama *tempo di volo*.
- Quanto in alto sale? Cioè qual è l'altezza massima raggiunta?

e) Che cosa succede se, mantenendo la stessa velocità iniziale, si cambia l'angolo di tiro? Compilate la Tabella 1. Approssimate le distanze ai centimetri e gli angoli al decimo di grado.

v_0 (m/s)	α (°)	gittata (m)	tempo di volo (s)	altezza max (m)
10	10°			
10	30°			
10	40°			
10	50°			
10	60°			
10	80°			

Tabella 1

f) Che cosa succede se, mantenendo lo stesso angolo di tiro, si cambia la velocità iniziale? Compilate la Tabella 2. Approssimate le distanze ai centimetri e gli angoli al decimo di grado.

v_0 (m/s)	α (°)	gittata (m)	tempo di volo (s)	altezza max (m)
2	60°			
5	60°			
10	60°			
15	60°			
20	60°			
30	60°			

Tabella 2

Terza fase

L'insegnante sistema e organizza i risultati raggiunti dagli studenti nelle due precedenti fasi e dimostra, a partire dalle leggi del moto (ossia dalle due funzioni parametriche $x(t)$ e $y(t)$) che l'equazione cartesiana della traiettoria del moto di un proiettile è $y = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2$.

Dimostra inoltre, che la gittata risulta allora $\frac{2v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$ e fa notare che l'altezza massima corrisponde all'ordinata del vertice della parabola che descrive la traiettoria.

Possibili sviluppi

- Determinazione delle leggi della velocità del proiettile e, in particolare, determinazione della velocità con cui tocca terra.

- Funzioni che esprimono un moto armonico.
- Equazioni parametriche di una circonferenza e relazioni tra moto armonico e moto circolare uniforme.

Elementi di prove di verifica

1. Calcolo di gittate, altezza massima e tempo di volo
Si consideri un moto parabolico con $v_0 = 10$ m/s e $\alpha=55°$. Dopo aver approssimato sul grafico[5] della calcolatrice la gittata, l'altezza massima e il tempo di volo, calcolarli ($g = 9{,}8$ m/s^2).

Quale deve essere la velocità iniziale di un corpo puntiforme lanciato con direzione 30° se si vuole che la gittata sia di 50 m ($g = 9{,}8$ m/s^2)?

Un sasso viene lanciato verso l'alto (quindi con direzione 90°). A che velocità deve essere lanciato se si vuole che arrivi fino a un'altezza massima di 12 m ($g = 9{,}8$ m/s^2)?

[5] Questa richiesta ha senso soprattutto se si utilizzano software che consentono di percorrere con un cursore i punti del grafico indicando, contemporaneamente, il valore delle coordinate dei punti toccati.

Elementi di prove di verifica

Disequazioni

1. Indica per quali valori di x è vera la disuguaglianza $x^2 + x < x^2 + x + 1$

2. Risolvi la disequazione $|x - 2| \geq |x - 6|$.
(È opportuno interpretare una scrittura del tipo $|x - 5|$, come "la distanza di x, punto mobile sulla retta delle ascisse, dal punto 5" e seguire dinamicamente che cosa significa ciò per diverse posizioni di x. Successivamente, la scrittura $|x - 5| \geq 2$ viene facilmente intrepretata come "le posizioni di x sulla retta tali che la sua distanza da 5 sia maggiore o uguale a 2". Infine la scrittura $|x - 2| \geq |x - 6|$ si interpreta come "le posizioni in cui x è più distante da 2 che da 6")

Confronto fra funzioni

3. In un opportuno sistema di riferimento, disegna il grafico di $y = x^2$.
Quindi, nello stesso sistema di riferimento, disegna i grafici di:
$y = x^2 – 3$ $\quad$ $y = – (x + 1)^2$ $\quad$ $y = |x^2 – 1|$

4. Considera le equazioni $y = a/x$ $\quad$ $y = ax^2$; che tipo di diagramma rappresentano rispettivamente nel sistema di assi cartesiani xOy?
E nel sistema di assi cartesiani aOy?

5. In un opportuno sistema di riferimento , disegna il grafico di $y = \sin x$.
Quindi, nello stesso sistema di riferimento, disegna i grafici di:
$y = 2 + \sin x$ $\quad$ $y = \sin(-x)$ $\quad$ $y = \sin|x|$

6. Ricordando che e^x è una funzione crescente, e tenendo presente il grafico della funzione $y = \sin x$ e le sue caratteristiche, studia il segno della funzione $y = e^{\sin x}$ definita nell'intervallo $[-2\pi ; 2\pi]$ e determina i suoi punti di massimo e di minimo.

7. Qual è la funzione inversa della funzione $y = (x + 4)/x$?

Tipologie di funzioni

8. La temperatura del mare varia nel corso dell'anno secondo una legge che con buona approssimazione si può ritenere di tipo sinusoidale: $y = A + B \sin(Cx+D)$.
In questa formula, x denota il giorno dell'anno ($x = 1$ corrisponde al ° gennaio;… $x = 20$ corrisponde al 20 gennaio;… $x = 365$ corrisponde al 31 dicembre), mentre y denota la corrispondente temperatura (misurata in gradi centigradi).
Determina le costanti A, B, C, D, in accordo con i seguenti dati, desunti da una serie di rilevamenti sperimentali effettuati in una località marittima italiana:
- periodicità della funzione : 365 giorni;
- temperatura minima: 9° C registrata il 20 gennaio;
- temperatura massima: 23° C, registrata il 20 luglio.

9. Esprimi le funzioni che legano l'area della superficie laterale di un cubo e il volume del cubo alla misura dello spigolo. Disegna l'andamento grafico delle due funzioni su un piano cartesiano. Cosa puoi dire, relativamente alla crescita della funzione area, rispetto a quella della funzione volume, all'aumentare della misura dello spigolo?

10. Siano $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=(x+1)^2$; completa la tabella seguente:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
2			80	16
		4		81
x	x^2-1			

11. Sapendo che la resistenza della struttura ossea è proporzionale alla sezione delle ossa e che il peso è proporzionale al volume di un corpo, sapresti dire se può esistere un uomo che sia alto dieci metri, ma che sia proporzionato (nel senso che sia simile a un uomo normale)? Sapresti dire perché gli elefanti hanno le zampe così larghe?

12. Due funzioni che sono l'una l'inversa dell'altra hanno grafici simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Disegna i grafici delle funzioni inverse di $y = 2^x$ e di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

13. Nel film, *Un sogno per domani*, un bambino di scuola media ha un'idea per migliorare il mondo: questa idea prevede di *passare un favore a tre persone diverse*, richiedendo che ciascuna di esse faccia altrettanto con altre tre persone. Supponendo che, mediamente, ogni persona impieghi un mese a passare i tre favori, quanto tempo sarebbe necessario affinché ogni abitante della terra venisse coinvolto in questo grandioso progetto? (Si fa l'ipotesi, inverosimile, che i favori non siano sempre "passati" a persone diverse).

Area sottesa da un grafico

14. Supponi di ricordare solamente come si calcola l'area di un rettangolo. Con quest'unica formula a disposizione come potresti dare una stima dell'area di una semicirconferenza di raggio 1? E dell'area della regione finita di piano individuata dalla parabola $y = 3 - x^2$ e dall'asse x? Come potresti migliorare la stima da te trovata? Come puoi dare una stima dell'errore commesso?

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. e Robutti, O., *Matematica*, La Scuola, 2002.
Campedelli, L., *Fantasia e logica nella matematica*, Milano, Feltrinelli, 1966.
Jakobson, R., *Saggi di linguistica generale*, Milano, Feltrinelli, 1966.
Maraschini, W., Menghini, M., Palma, M., *Strategie matematiche: formalizzare per risolvere*, Pitagora, Bologna, 1997.
NCTM, 1998, proposta del nuovo curricolo dall'Associazione degli insegnanti di matematica degli USA; reperibile al sito: http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.2/index.htmIRRE
Villani, V., *Matematica per discipline biomediche*, McGraw-Hill, 2ª ed., 1997.