

## Le opere del Palladio: forme geometriche e simmetrie

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica.  Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano.	Dallo spazio al piano: nozioni intuitive.  Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	<u>Spazio e figure</u>  Argomentare, congetturare, dimostrare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Storia Latino

### Contesto

Analisi di costruzioni architettoniche

Primo approccio con la geometria dello spazio attraverso un confronto con il mondo reale, visitando monumenti o analizzando loro fotografie o rappresentazioni tridimensionali in ambienti virtuali. Studio delle isometrie piane attraverso l'analisi di piante o sezioni di edifici.

### Descrizione dell'attività

Il lavoro prevede l'osservazione di fotografie di edifici di Andrea Palladio (1508-1580) con successiva lettura e analisi di disegni tratti dai suoi libri.

È stata scelta, in questa attività, l'opera del Palladio perché ricca di spunti in ambito geometrico, ma l'insegnante può fare riferimento anche ad opere architettoniche presenti nel territorio in cui si trova la scuola.

Durante questa attività gli studenti hanno l'opportunità di osservare esempi di figure geometriche dello spazio e del piano in un contesto reale e di individuare isometrie piane.

È opportuno, prima di affrontare il lavoro, che si svolge all'inizio della scuola secondaria, rendere omogenee le conoscenze pregresse acquisite in geometria e la relativa terminologia, ciò al fine di evitare una incomprensione dei concetti matematici interessati, causata da fraintendimenti linguistici sul significato di alcune parole.

Sono descritte di seguito due attività. Attraverso la prima gli studenti consolidano le conoscenze geometriche e la capacità di visione nello spazio a tre e a due dimensioni; con la seconda imparano a riconoscere nel mondo reale le diverse isometrie e le figure geometriche a loro già note.

Le attività si basano su fasi che da operative tendono a diventare astratte: dall'operare concreto alla sintesi delle osservazioni e delle analisi effettuate, al conseguimento della capacità di utilizzare le competenze apprese. Gli oggetti matematici presentano, infatti, una natura complessa e l'uso di "oggetti fisici", nell'iter di apprendimento, ne può facilitare la comprensione.

I modelli fanno riferimento allo stretto legame che gli oggetti geometrici hanno con la realtà. Nello stesso tempo la conoscenza, che parte dall'esperienza, deve arrivare ad un livello teorico: attraverso l'analisi ed il superamento dei dati ottenuti con la percezione giungere all'astrazione, fino a consolidarsi in forma consapevole e fondata razionalmente. Dagli aspetti empirici si tende a guidare gli studenti all'acquisizione di quelli formali, dalle descrizioni alle definizioni, dalle osservazioni alle eventuali dimostrazioni

Prima attività

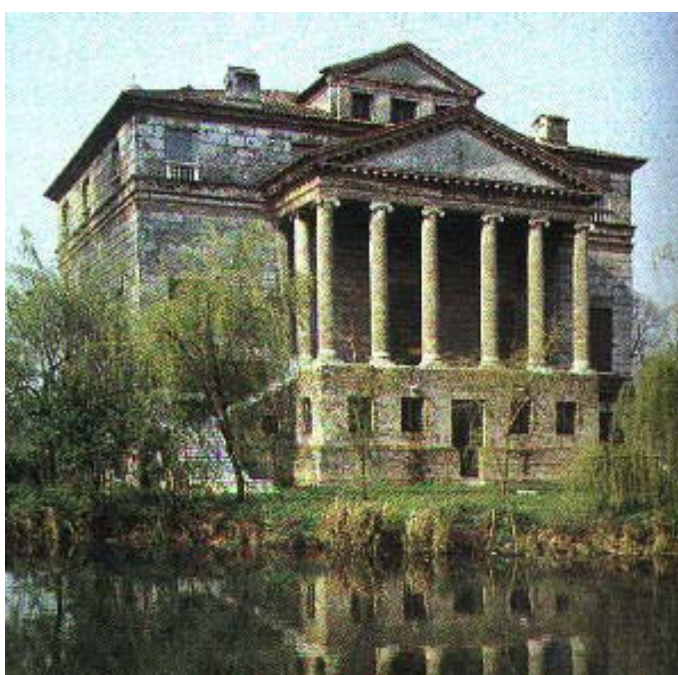
L'insegnante illustra l'attività che intende proporre e presenta agli studenti fotografie e disegni di opere del Palladio e, se decidesse di esplorare il territorio dove gli studenti vivono, mostra loro quali edifici andranno a visitare e quali riproduzioni o eventuali plastici analizzeranno.

Un ruolo importante ha la scelta delle opere da considerare: devono essere ricche di elementi geometrici di facile lettura per non disorientare eccessivamente gli studenti.

Questa attività ha essenzialmente lo scopo di verificare quali figure geometriche gli studenti conoscono e sanno riconoscere. Attraverso tale attività gli studenti acquisiscono anche consapevolezza delle proprie conoscenze.

L'insegnante fornisce una scheda guida per le osservazioni, da utilizzare sia per l'attività in classe che all'esterno.

Si riporta, di seguito l'immagine di un edificio (Figura 1, Andrea Palladio, *La Malcontenta*, Venezia) che si ritiene significativo per questa esperienza ed una proposta di scheda per la lettura delle opere presentate o dei monumenti visitati.



*Figura 1*

Esempio di scheda:

Figura analizzata (identificare con un numero la figura o fotografia scelta)	Solidi presenti	Caratteristiche principali del solido individuato	Figure piane	Caratteristiche principali della figura individuata
Fig.1 La Malcontenta	Cilindri, ...	Il cilindro presenta una superficie rotonda	Triangoli isosceli	I triangoli sono isosceli se .....
	Cubi	..		
	Ci sono figure a cui non sei riuscito ad attribuire un nome? Quali sono? (indicare con un numero sulla illustrazione proposta). Secondo te è possibile descriverle? Prova a descriverle riferendoti agli elementi di geometria che ti sono noti?			
Fig.2...				

L'insegnante, dopo che gli studenti hanno compilato le schede, guida la discussione in classe ed inizia a rendere più omogeneo il linguaggio e ad avere alcune informazioni sulle conoscenze pregresse degli studenti.

L'insegnante può proporre agli studenti la lettura del libro *Flatlandia* di Abbott per sollecitare una riflessione sui problemi della dimensione.

## Seconda attività

### Prima fase

L'insegnante descrive agli studenti la nuova attività, precisando che l'intento è quello di studiare le isometrie. È però importante accertare, anche in questo caso, che cosa gli studenti conoscano già dalla scuola media.

Se l'insegnante non ha proposto una prova d'ingresso, o in essa non vi erano quesiti relativi a questo argomento, può presentare ora alcune domande finalizzate ad accertare le conoscenze in loro possesso in relazione alle isometrie.

Si riportano alcuni esempi di quesiti che possono risultare utili.

Le domande hanno diversa tipologia (domande aperte, test a risposta multipla, tabelle,...) e difficoltà a vari livelli. Nei testi proposti sono introdotti termini che gli studenti potrebbero non conoscere o non comprendere. Conviene, perciò, riservare in fondo alla prova uno spazio dove gli studenti possono indicare quali sono per loro le parole "difficili" o "ignote" che hanno incontrato.

Il test va completato con qualche domanda sulle simmetrie centrali e sulle rotazioni. Le domande vanno diversamente ordinate.

*Completa la seguente tabella e indica con una crocetta se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):*

	V	F
a) in una traslazione, coppie di punti corrispondenti si trovano su rette parallele		
b) una traslazione è un'isometria		
c) una traslazione possiede punti uniti		
d) se A e A', B e B' sono coppie di punti corrispondenti in una traslazione, il quadrilatero AA'BB' è un parallelogramma		
e) figure corrispondenti in una traslazione sono direttamente uguali		
f) una traslazione non conserva le lunghezze		

- In una simmetria assiale il segmento che unisce due punti corrispondenti:
  - a) è parallelo all'asse
  - b) è perpendicolare all'asse
  - c) è incidente all'asse
  - d) può avere qualsiasi direzione
- Due rette parallele hanno la stessa direzione?  
E due rette perpendicolari?
- Due rette incidenti possono avere la stessa direzione?  
Se considerate tutte le rette passanti per un punto, avete tutte le possibili direzioni di un piano?  
Giustificate le vostre risposte.
- Il quadrato ha assi di simmetria?  
Quanti?
- Hai sentito parlare del termine "isometria" ?  
In caso di risposta affermativa, descrivi con parole tue il suo significato.

Al termine della fase esplorativa l'insegnante dovrebbe avere riferimenti più precisi relativamente alle conoscenze degli studenti.

Seconda fase

L'insegnante ora può procedere ad un ripasso delle isometrie o allo svolgimento dell'argomento, a seconda delle indicazioni date dai risultati della prova. Quanto di seguito riportato sarà perciò adeguato e realizzato in relazione alle situazioni in cui ci si trova ad operare.

L'insegnante propone agli studenti un percorso di analisi e di ricerca di isometrie attraverso rappresentazioni significative. Le isometrie sono presenti nel mondo che ci circonda; soprattutto in architettura sono sempre stati presenti motivi e ritmi che si ripetono.

Si propongono di seguito alcune opere palladiane che risultano particolarmente significative nell'ambito di questa attività.

Palladio nelle sue opere sceglie consapevolmente rapporti e ritmi geometrici; conosce l'architettura classica sia attraverso l'opera di Vitruvio sia per lo studio degli edifici classici fatto a Roma; pubblica nel 1570 un trattato architettonico dal titolo *Quattro libri dell'architettura*. In esso indica alcune norme precise che tiene presenti quando progetta ed esige, nei suoi progetti, una sala posta sull'asse centrale dell'edificio e un'assoluta simmetria tra gli ambienti minori situati ai lati. Scrive "...E si deve avvertire, che quelle stanze dalla parte destra rispondano, e siano uguali a quelle di sinistra: la fabbrica sia in una parte come nell'altra" (dai *Quattro libri*).

Può essere opportuno far presente agli studenti il grande successo che questo tipo di progettazione ha ottenuto, in Italia e all'estero, dando origine al cosiddetto palladianesimo.

Di seguito sono proposte alcune piante e prospetti di ville del Palladio. L'insegnante presenta agli studenti queste ed altre immagini, su cui lavoreranno, evidenziando particolarità e spiegando come in esse potranno individuare trasformazioni geometriche particolari.

Nella figura 2 (A. Palladio - Villa Almerico detta "La Rotonda", Vicenza) gli studenti possono rilevare simmetrie assiali (rispetto a assi diversi) e rotazioni nella pianta dell'edificio e simmetrie di struttura attraverso lo "spaccato" verticale, osservando come sia stato affrontato il problema della visione spaziale.

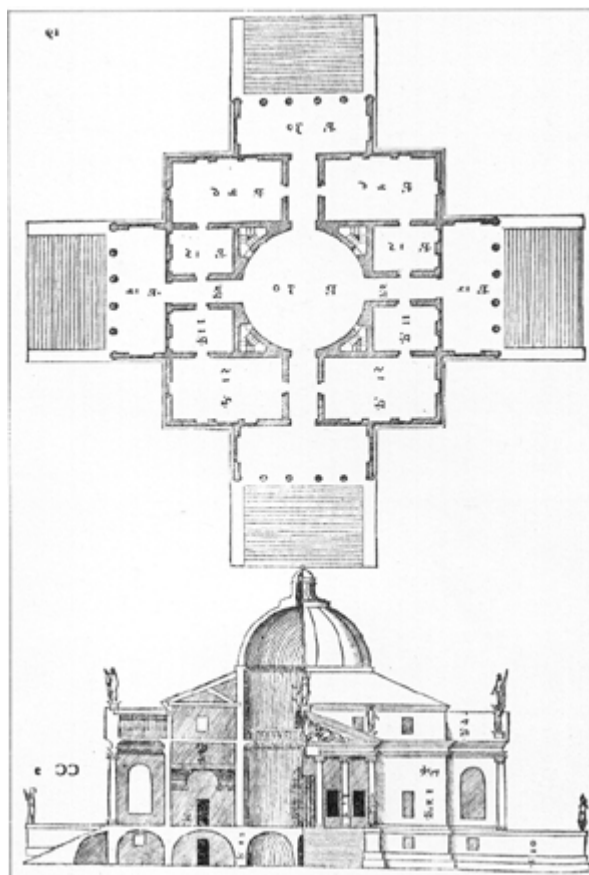


Figura2

Nella della figura 3 (A. Palladio, *Villa Cornaro*, Piombino Dese, Padova) gli studenti possono individuare e studiare le simmetrie della pianta, di alcuni ambienti e della facciata

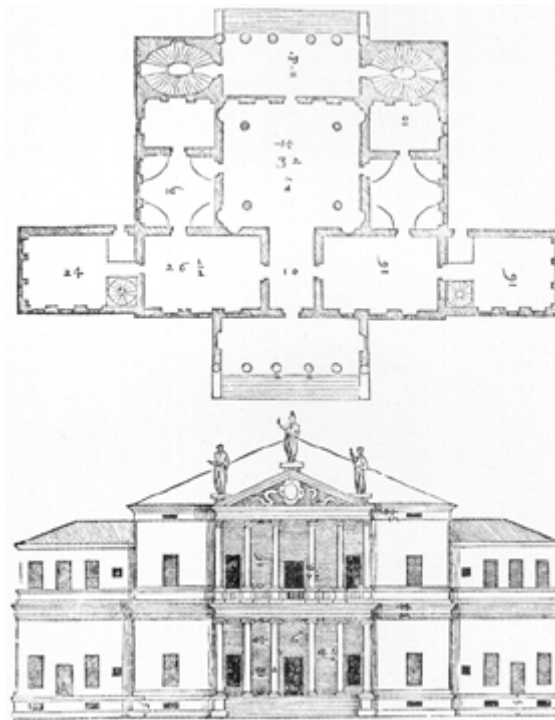


Figura 3

Altri esempi significativi sono:

- la *Basilica palladiana di Vicenza*, nella cui facciata si individuano elementi ripetuti per traslazione o per simmetrie. Nella pianta è facile essere tratti in inganno da *false* simmetrie;
- le chiese de *Il Redentore* e di *San Giorgio Maggiore* a Venezia che consentono analisi di isometrie.

L'insegnante può presentare agli studenti il ruolo fondamentale che la simmetria, la traslazione e la rotazione hanno avuto, in generale, nell'architettura rinascimentale.

#### Terza fase

L'insegnante organizza la classe in piccoli gruppi e suddivide tra essi i materiali di lavoro mostrati nella fase precedente (con consegne diverse per ogni gruppo). Invita gli studenti a individuare le trasformazioni isometriche presenti in ciascuna figura.

La verifica della presenza della trasformazione può esser fatta, da parte degli studenti, in vari modi, utilizzando carta da lucido o trasparenti o piegature di un foglio non opaco. Anche in questo caso può essere consegnata agli studenti una scheda di osservazione.

Al termine del lavoro ogni gruppo espone all'insegnante e ai compagni i risultati cui è pervenuto, dandone opportuna motivazione.

#### Quarta fase

Sempre a gruppi, gli studenti elaborano, in base a quanto finora osservato, una propria proposta di pianta o di facciata che presenti caratteristiche analoghe a quelle viste in precedenza. Possono anche ricercare altre opere architettoniche o piante significative di città (per esempio Palmanova) o, eventualmente, analizzare disegni famosi, quali, per esempio, quelli di Escher o i mosaici dell'Alhambra a Granada (Spagna). In quest'ultima attività è bene che l'insegnante operi con gli studenti per una scelta di immagini che non comportino eccessive difficoltà di lettura o non siano coerenti con la proposta di lavoro.

L'importante è che gli studenti, con la loro fantasia o aiutandosi con opere esistenti, cerchino di realizzare disegni in cui sono presenti le diverse trasformazioni. In questa fase può essere utile avvalersi anche di un software di geometria.

Gli studenti devono domandarsi se la ripetitività di alcuni elementi architettonici consente di individuare una sorta di "modulo" che si conserva secondo certe "regole" che in genere variano da figura a figura.

Gli studenti annotano in una griglia quali sono gli elementi che rimangono invariati.

#### Quinta fase

L'insegnante sintetizza le osservazioni emerse dagli studenti e i risultati cui sono giunti. Li guida ad organizzare i contenuti, ad individuare con chiarezza gli elementi che si conservano nelle trasformazioni esaminate e mette in luce le proprietà invarianti delle figure piane rispetto alle isometrie.

#### **Ulteriori sviluppi**

- Simmetrie nello spazio
- Proiezioni ortogonali

#### **Elementi di prove di verifica**

1. Osservare una fotografia (un ritratto, un paesaggio, un interno, ...) e studiare se e con quali soggetti si è in grado di accorgersi se nella stampa il negativo è stato inavvertitamente ribaltato.
2. Studiare le lettere dell'alfabeto maiuscolo classificandole rispetto alle loro eventuali simmetrie. Cercare parole che lette allo specchio non si modificano (per esempio OTTO).
3. Studiare le simmetrie delle carte da gioco.
4. Individuare le simmetrie nelle seguenti figure:
  - a) un rombo;
  - b) un rettangolo,
  - c) un parallelogramma;
  - d) un pentagono regolare;
  - e) un esagono regolare;
  - f) un cerchio;
  - g) una retta;
  - h) due rette parallele;
  - i) due rette perpendicolari;
  - j) due rette incidenti non perpendicolari.
5. Date tre rette parallele  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , determinare un triangolo equilatero che abbia i vertici  $A, B, C$ , rispettivamente su  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
6. Il problema di Erone: dati i punti  $A$  e  $B$  dalla stessa parte rispetto ad una data retta  $r$ , determinare il minimo cammino che va da  $A$  a  $B$  toccando  $r$ .
7. Siano  $H, K, L$  punti non allineati: si vuole determinare un triangolo  $XYZ$  che abbia i punti  $H, K, L$  come punti medi dei lati.

## Tassellazioni del piano

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	<u>Spazio e figure</u>	Storia dell'arte Disegno Scienze
Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà.	Argomentare, congetturare e dimostrare	
Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie	Ampiezza degli angoli.	Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

### Contesto

Configurazioni geometriche nel piano.

L'attività viene proposta nel primo biennio, nella classe prima, e riguarda un'utilizzazione particolarmente significativa delle isometrie del piano in un contesto motivante quale quello delle configurazioni geometriche del piano.

Gli studenti devono conoscere la definizione di poligono regolare. Inizialmente si tratta di scoprire che il piano si può tassellare con tre tipi di poligoni regolari: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare (Figura 1). Dato poi un triangolo qualsiasi come "piastrella", sarà facile scoprire che si può sempre piastrellare il piano con esso. Si proporrà poi il caso dei quadrilateri e successivamente quello di altri semplici poligoni. La tassellazione del piano mediante poligoni fornisce anche un esempio di problema che ha una facile formulazione, ma che può portare a molti approfondimenti. Su questo argomento, addirittura, ci sono ancora diversi problemi irrisolti nella ricerca matematica. È un esempio di attività in cui lo studente può usare concretamente le trasformazioni isometriche del piano e anche rendersi conto della loro importanza nella risoluzione di un problema. L'obiettivo è quello di scoprire proprietà invarianti in certe configurazioni geometriche. L'argomento si presta facilmente a un collegamento interdisciplinare con il Disegno, la Storia dell'arte e le Scienze e ha diversi legami con il mondo reale.

### Descrizione dell'attività

#### Fase 1

Inizialmente si presenta il problema di tassellare il piano con un poligono regolare analizzando esempi tratti dal mondo reale: i favi delle api, i pavimenti delle case, ....

Si osserva che tutti gli elementi della tassellazione sono uguali, ogni elemento aderisce perfettamente all'altro senza lasciare neanche il più piccolo spazio e non c'è sovrapposizione tra gli elementi.

L'attività procede con un software di geometria in cui siano presenti gli "strumenti" traslazione, simmetria centrale, rotazione; in questo modo l'argomento assume un aspetto più costruttivo e la rapidità nell'esecuzione dei disegni è maggiore, oltre a poter esplorare in modo dinamico tantissime

situazioni concrete. In alcune tassellazioni occorre individuare le traslazioni (e quindi i vettori) che caratterizzano un fregio oppure le simmetrie centrali che caratterizzano una data composizione. In questo contesto si possono usare, con riferimento a situazioni concrete, alcune semplici nozioni riguardanti la somma di due vettori e il multiplo di un vettore.

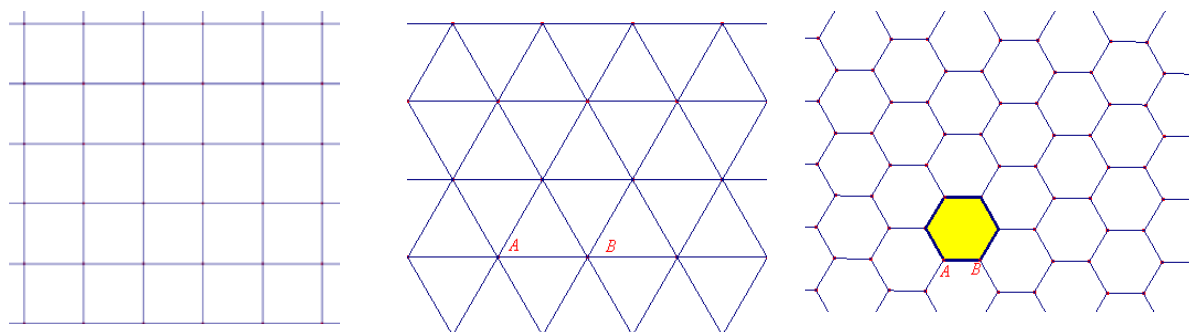


Figura 1

## Fase 2

Si propongono inizialmente delle schede di lavoro guidato per gli studenti nelle quali si chiede di individuare le tassellazioni del piano tramite poligoni regolari, un solo tipo per volta, con l'obiettivo di far scoprire che le uniche tassellazioni possibili del tipo richiesto sono quelle fatte con il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.

Successivamente si chiede se è possibile tassellare il piano con triangoli e quadrilateri qualunque. Si scoprirà che questa pavimentazione del piano è possibile con qualunque triangolo e con qualunque quadrilatero non intrecciato. Nella figura 2 è rappresentata una tassellazione del piano proposta agli allievi: si disegna un triangolo ABC e il punto medio di un lato, ad esempio BC. Si chiede agli allievi di procedere nel disegno dei primi passi della tassellazione e di descrivere il procedimento seguito.

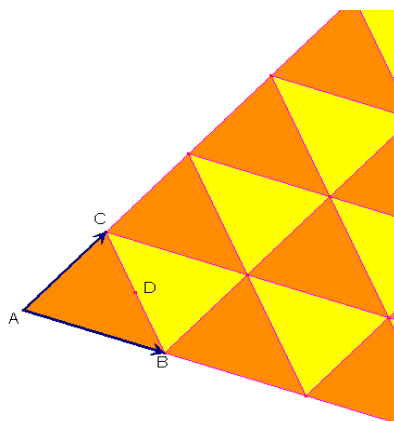


Figura 2

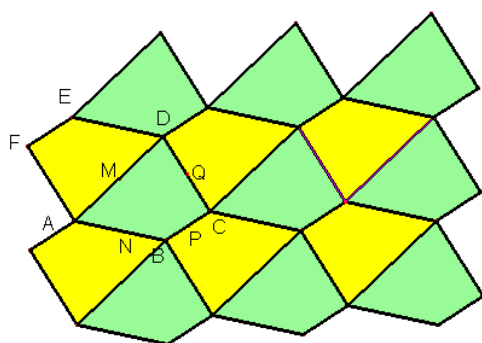


Figura 3 a

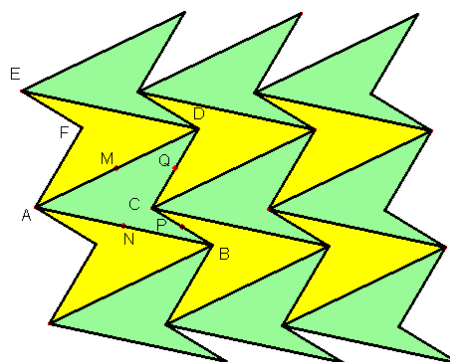


Figura 3 b

Nello stesso modo si scoprirà che anche con un quadrilatero, convesso o no, è sempre possibile tassellare il piano. Si disegna un quadrilatero ABCD convesso (Figura 3a) o concavo (Figura 3b) ma non intrecciato, e il quadrilatero simmetrico di ABCD rispetto al punto medio di uno dei lati. Si ottiene un esagono particolare, come quello in Figura 4, che pavimenta il piano tramite traslazioni. La tassellazione è generata dall'esagono ottenuto unendo ABCD con il suo simmetrico rispetto al punto O, punto medio di AB; si noti il parallelismo delle coppie di lati corrispondenti nella simmetria centrale. Quindi c'è un legame tra la pavimentazione ottenuta con un quadrilatero e quella realizzata con questi esagoni particolari, così come è stato scoperto lo stesso legame tra le tassellazioni ottenute con un triangolo e un parallelogramma. Si chiede agli studenti di individuare le trasformazioni (traslazioni, rotazioni) che servono per ottenere la tassellazione del piano (figura 4).

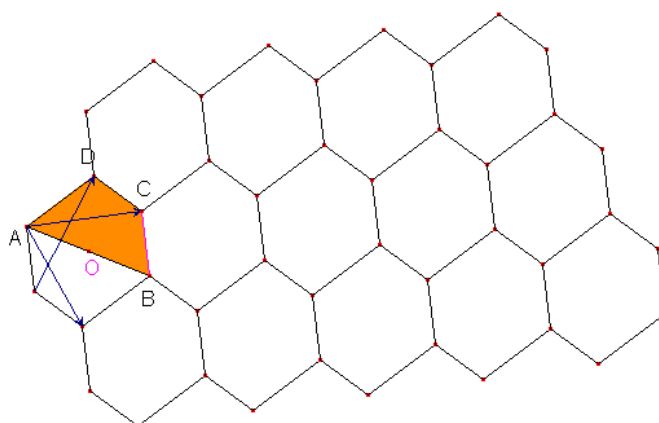


Figura 4

### Fase 3

Nella fase 1 si è visto che non è possibile pavimentare il piano con pentagoni regolari tutti uguali. Si propone agli studenti di trovare un possibile ricoprimento usando, oltre al pentagono regolare, un altro poligono. Si può proporre agli studenti la Figura 5 e se ne chiede la descrizione oppure come approfondimento si può far realizzare la costruzione e scoprire le particolarità della tassellazione. Un'attività analoga si può realizzare a partire dall'ottagono regolare (Figura 6).

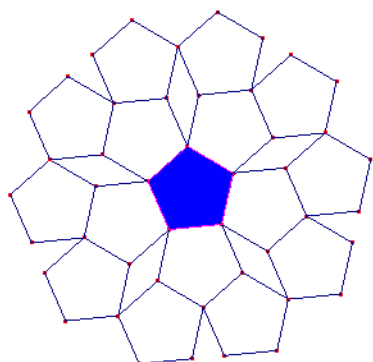


Figura 5

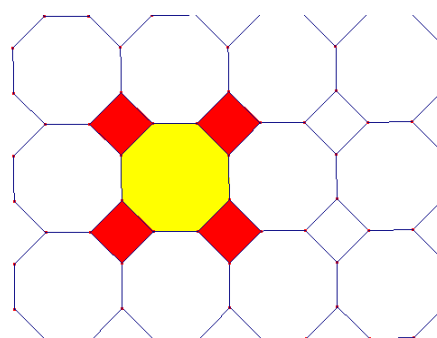


Figura 6

### Possibili sviluppi

Inizialmente si è lavorato con un solo tipo di “mattonelle”, tutte tra loro uguali. In questa fase si può proporre qualche semplice caso di pavimentazione ottenuta usando due o più tipi di mattonelle a forma di poligono regolare (queste pavimentazioni sono dette *semiregolari*; un esempio è quello

della figura 6). L'obiettivo è sempre quello di riconoscere proprietà invarianti per trasformazioni isometriche nel piano.

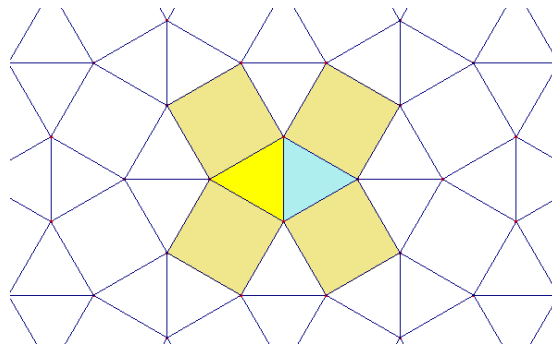


Figura 7

In momenti successivi si potranno proporre e illustrare delle tassellazioni ottenute da più tipi di mattonelle “regolari” e non, che si possono studiare con procedimenti analoghi a quelli utilizzati nelle precedenti fasi dell'attività didattica.

Nella figura 8, si mette in evidenza una particolare pavimentazione del piano ottenuta a partire da un pentagono che si ottiene dividendo in quattro parti uguali una croce greca.

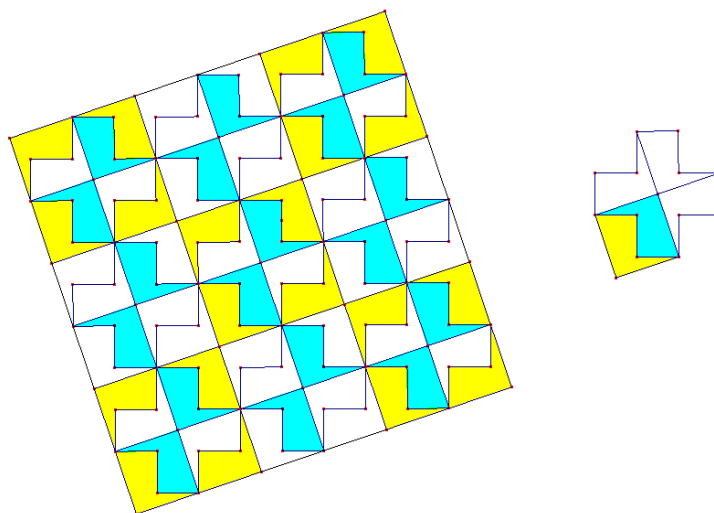


Figura 8

Alcuni esempi sono riportati nelle seguenti figure presenti nei disegni di M.C. Escher ispirati a pavimentazioni presenti nel palazzo dell'Alhambra di Granada (Spagna).

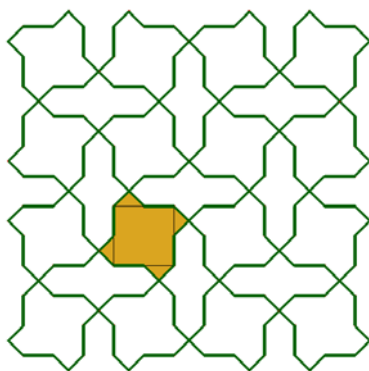


Figura 9

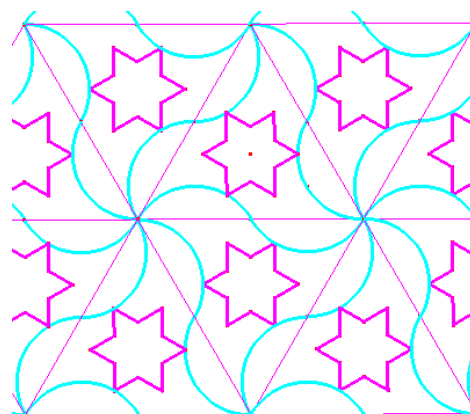
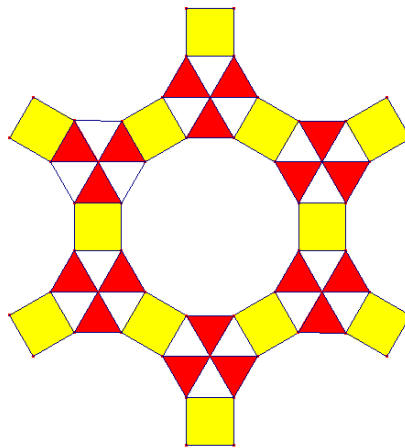


Figura 10

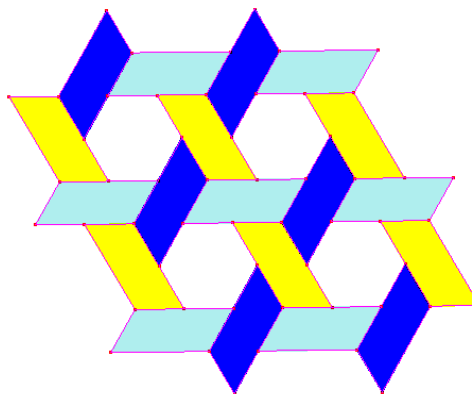
**Elementi di prove di verifica**

1. È possibile una tassellazione del piano formata da pentagoni regolari?
2. Si può realizzare una tassellazione del piano accostando dodecagoni regolari e triangoli equilateri?
3. Descrivere la pavimentazione del piano indicata nella Figura 11.



*Figura 11*

4. In alcune vetrate del XVI secolo si trovano esagoni regolari e parallelogrammi di cui due lati sono doppi degli altri due. Descrivere le proprietà dei parallelogrammi e la tassellazione ottenuta (Figura 12).



*Figura 12*

5. (Attività di gruppo in laboratorio di matematica). Costruire un pentagono convesso ABCDE che verifichi le seguenti condizioni: l'angolo in A è di  $60^\circ$ , gli angoli in B e in C sono di  $120^\circ$ ,  $AB=AE$  e  $CB=CD$  (queste condizioni non determinano un pentagono unico, ma una famiglia di pentagoni). Con l'uso di un software di geometria, costruire la tassellazione del piano partendo da rotazioni di  $60^\circ$  del pentagono ottenuto attorno al punto A.

## Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.  Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione.  Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti.	Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni.  Teoremi di Euclide e di Pitagora.	<u>Spazio e figure</u>  Argomentare, congetturare, dimostrare	Storia

### Contesto

Storia della matematica.

L'attività può essere introdotta alla fine della prima classe, quando gli studenti sanno riconoscere e costruire poligoni equiscomponibili. Il contesto è quello della storia della matematica.

La proposta prende lo spunto dalla lettura di un racconto in cui si parla del teorema di Pitagora, "Una perla pericolosa" da *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (pseudonimo del matematico brasiliano Júlio César de Mello e Souza), per suscitare o rinnovare negli studenti l'interesse per questo teorema e per la sua dimostrazione.

L'insegnante guida gli studenti a comprendere il corretto significato di verifica di una congettura in casi particolari, giungendo poi a saper distinguere, consapevolmente, tra verifica e dimostrazione.

### Descrizione dell'attività

L'attività proposta non solo offre una ripresa e un approfondimento di contenuti noti agli studenti, che infatti nella scuola media hanno già conosciuto e applicato il teorema di Pitagora, ma li guida anche ad argomentare correttamente.

#### Prima fase

L'insegnante inizia con la lettura di una parte del racconto.

*"Siamo assai impazienti", continuò lo Sceicco, "che tu ci aiuti a rispondere a una domanda posta dal principe Cluzir Shah. In quale modo gli indiani hanno contribuito al progresso della matematica e chi sono i geometri indiani che maggiormente si sono distinti in questa scienza?"*

*"Generoso Sceicco!", rispose Beremiz, "Il compito che tu mi affidi richiede cultura e obbiettività: cultura, per conoscere nei particolari la storia della scienza, obbiettività per analizzarla e giudicarla con criterio. D'altra parte, o Sceicco, ogni tuo desiderio è per me un ordine. Racconterò quindi a questa eletta compagnia, quale piccolo omaggio al principe Cluzir Shah, le poche cose che conosco sullo sviluppo della matematica nel paese del Gange."*

*"Nove o dieci secoli prima di Maometto viveva nell'India un famoso bramino di nome Apastamba. Questo sapiente, per istruire i preti sulla costruzione di altari e sul progetto di templi, scrisse un'opera chiamata Salvasūtra che contiene molti esempi matematici. È improbabile che questo trattato sia stato influenzato dalle teorie pitagoriche, dal momento che gli studiosi indiani non seguivano i metodi di indagine dei greci. Nelle sue pagine si trovano comunque numerosi teoremi e*

regole per costruzioni geometriche. Per spiegare la costruzione di un altare, Apastamba propone di tracciare un triangolo rettangolo, i cui lati misurino rispettivamente 39, 36 e 15 centimetri; per risolvere il problema egli applica un teorema attribuito al greco Pitagora: “L’area del quadrato costruito sull’ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sugli altri due lati”. E, rivolgendosi allo sceicco Iezid, che ascoltava attentamente: “Sarebbe più facile spiegare questa famosa regola con un disegno”. Lo Sceicco fece un cenno ai servitori, e subito due schiavi portarono una larga scatola piena di sabbia, sulla cui liscia superficie Beremiz si mise a tracciare figure e a effettuare calcoli per il Principe di Lahore, servendosi di una canna di bambù. “Ecco un triangolo rettangolo. Il suo lato maggiore si chiama ipotenusa. Costruiamo adesso un quadrato su ciascuno dei suoi lati: è facile dimostrare che il quadrato grande disegnato sull’ipotenusa ha esattamente la stessa area della somma degli altri due quadrati, confermando così la giustezza del teorema di Pitagora.” (Figura 1).

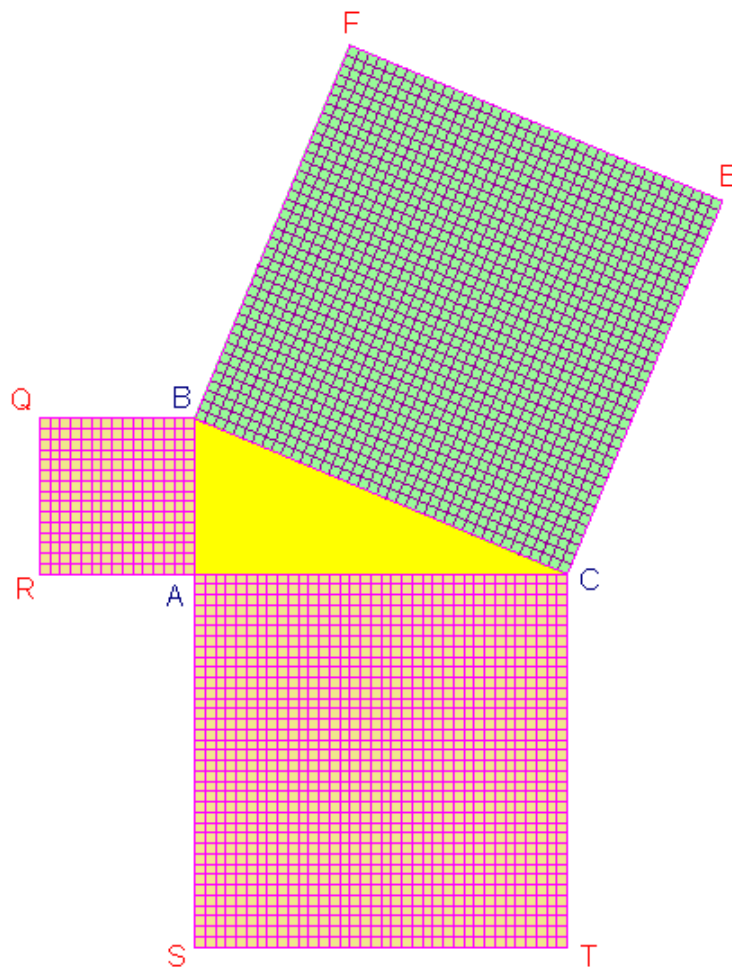


Figura 1

L’insegnante apre la discussione allo scopo di guidare gli studenti ad analizzare quanto viene descritto nel testo e a verificarlo con strumenti grafici o con un software di geometria.

Invita poi a ricercare e a costruire casi analoghi, ovvero triangoli rettangoli in cui i lati hanno misure espresse da numeri interi.

### Seconda fase

L’insegnante prosegue proponendo agli studenti la lettura di un altro passo del racconto:

*Il Principe chiese se la stessa regola fosse valida per tutti i triangoli. Al che Beremiz rispose solennemente: “È vera e costante per tutti i triangoli rettangoli. Posso affermare, senza tema di*

*smentita, che la legge di Pitagora esprime una verità eterna. Ancor prima che il sole splendesse nel firmamento, ancor prima che ci fosse aria da respirare, il quadrato dell'ipotenusa era uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati." Affascinato dalle spiegazioni di Beremiz, il Principe si rivolse con calore al poeta Iezid: "Come è meravigliosa la geometria, amico mio! Che scienza interessante! Dalle sue spiegazioni emergono due qualità atte a impressionare anche l'uomo più umile e sprovveduto: la chiarezza e la semplicità". E, sfiorando leggermente la spalla di Beremiz con la mano sinistra, gli chiese: "Questa scoperta degli antichi greci compare anche nel Salvasūtra di Apastamba?" Beremiz non esitò a rispondere. "Certamente, mio Principe!" disse. "Anche se il cosiddetto teorema di Pitagora compare nel Salvasūtra in una forma un po' diversa. Fu leggendo l'Apastamba che i preti appresero l'arte di costruire santuari, mettendo in relazione i triangoli rettangoli con i relativi quadrati".*

L'insegnante sollecita la discussione allo scopo di suscitare le seguenti domande:

Tale proprietà vale per tutti i triangoli rettangoli o solo per quelli che hanno i lati con particolari misure? Attraverso quanto verificato si può rispondere a tale domanda?

Si vuole giungere in tal modo a far emergere la necessità di trovare altre vie per accertare la validità della proprietà per tutti i triangoli rettangoli.

### Terza fase

Si propongono alcune dimostrazioni della validità del Teorema di Pitagora (esse non fanno ovviamente riferimento a misure particolari dei lati del triangolo).

a) L'insegnante propone di disegnare (Figura 2a) il triangolo rettangolo ACB, di costruire il quadrato BCKH sull'ipotenusa BC ed il quadrato AEFL che ha un angolo coincidente con l'angolo retto del triangolo rettangolo e i lati passanti per i vertici del quadrato BCKH.

Si invitano gli studenti a dimostrare l'uguaglianza dei quattro triangoli rettangoli.

Si procede poi a disegnare (Figura 2b) il triangolo ABC uguale al precedente, a completare il rettangolo ACSB, a costruire i quadrati ABRN e BSPQ, a completare il quadrato NCPT e a tracciare la diagonale TB del rettangolo RBQT.

Gli studenti dimostrano l'uguaglianza dei triangoli rettangoli, osservano che i quadrati AEFL e NCPT sono uguali. Deducono da ciò che il quadrato BCKH (Figura 2a) ha l'area uguale alla somma delle aree dei quadrati ABRN e BSPQ (Figura 2b).

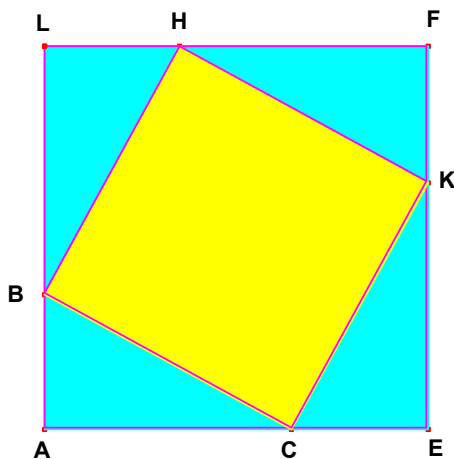


Figura 2a

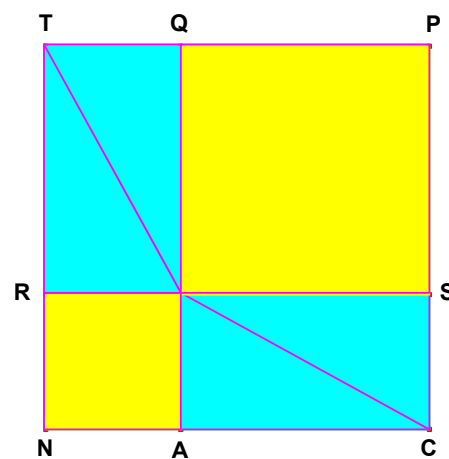


Figura 2b

b) Facendo riferimento alla Figura 2a, si può dare anche una dimostrazione che utilizza il calcolo algebrico.

Se  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono rispettivamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti del triangolo ABC allora l'area del quadrato AEFL è  $(b+c)^2$ , che si può anche ottenere come somma delle aree dei quattro triangoli rettangoli uguali a ABC e del quadrato costruito sull'ipotenusa BC, ovvero  $4(bc/2) + a^2$ .

Uguagliando le espressioni algebriche che esprimono l'area del quadrato AEFL si ottiene l'uguaglianza  $b^2 + c^2 = a^2$ .

c) Si propone poi una dimostrazione attribuita al matematico arabo Thabit Ibn Qurra.

L'insegnante invita gli studenti a disegnare (Figura 3a) il triangolo rettangolo ACB, a costruire il quadrato BCEF sull'ipotenusa BC, a costruire i segmenti EN e FQ perpendicolari ad AC e il segmento BS perpendicolare a FQ.

Invita poi gli studenti a dimostrare che i triangoli CNE e FLE sono uguali a ACB e che i quadrilateri AQSB e QNEL sono quadrati con i lati uguali ai cateti di ACB.

Gli studenti disegnano ora la Figura 3b, uguale alla precedente, ma colorata in modo diverso facendo notare l'equivalenza tra il quadrato BCEF e i quadrati AQSB e QNEL.

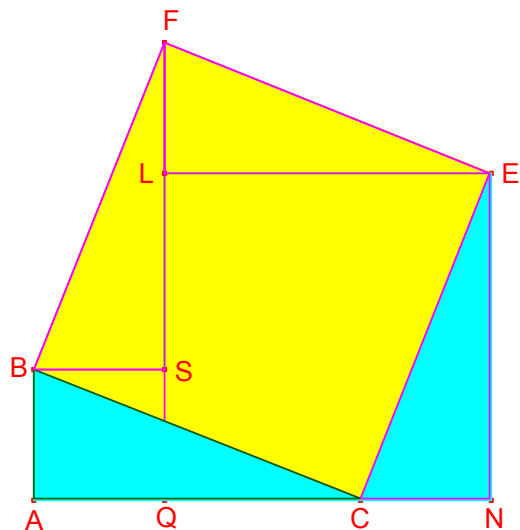


Figura 3a

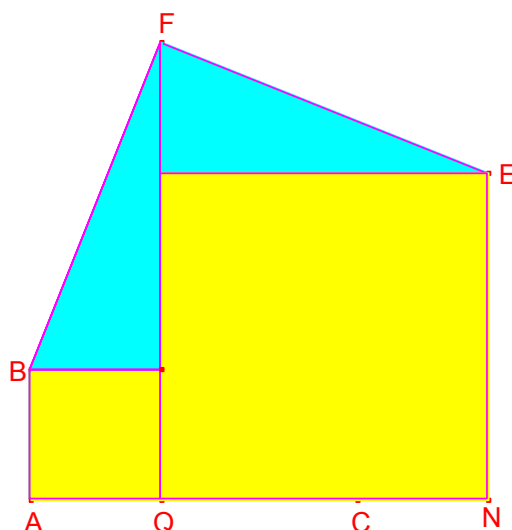


Figura 3b

d) L'insegnante può anche proporre la seguente dimostrazione (figura 4).

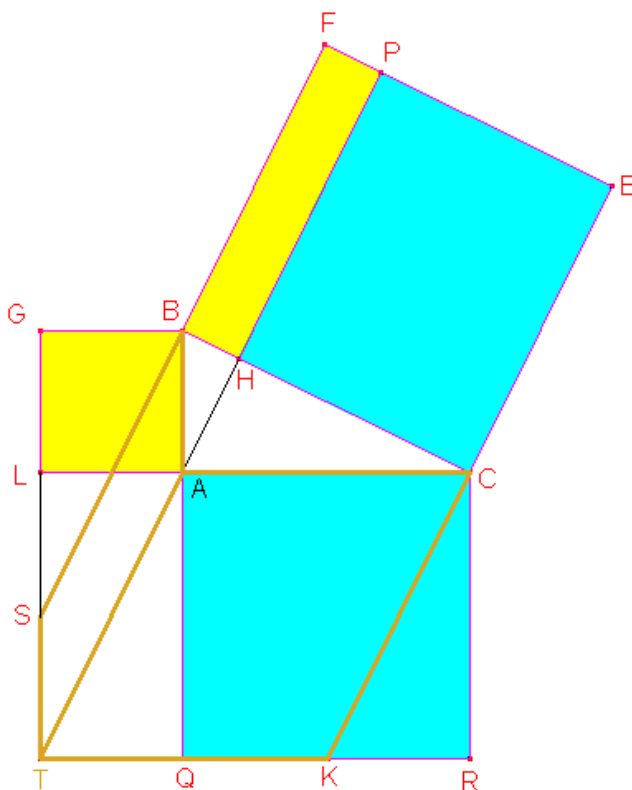


Figura 4

È dato il triangolo rettangolo ACB; si costruiscono i quadrati sui cateti e sull'ipotenusa, si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa che interseca BC in H e FE in P.

Sapendo che il quadrato LABG è equivalente al rettangolo BHPF, perché entrambi sono equivalenti al parallelogramma ABST (primo teorema di Euclide) e che il quadrato AQRC è equivalente al rettangolo HCEP, perché entrambi equivalenti al parallelogramma TKCA, si ottiene la tesi.

### Quinta fase

L'insegnante racconta agli studenti del modo in cui si dice che gli Egiziani costruivano gli angoli retti, avvalendosi di cordicelle con nodi equidistanti in numero uguale a quelli di terne pitagoriche, per esempio 3, 4, 5.

Facevano 11 nodi su una corda a distanza uguale tra loro. Fissavano quindi a terra i due capi della corda e, tenendo la corda tesa, la fissavano al terreno nel terzo e settimo nodo.

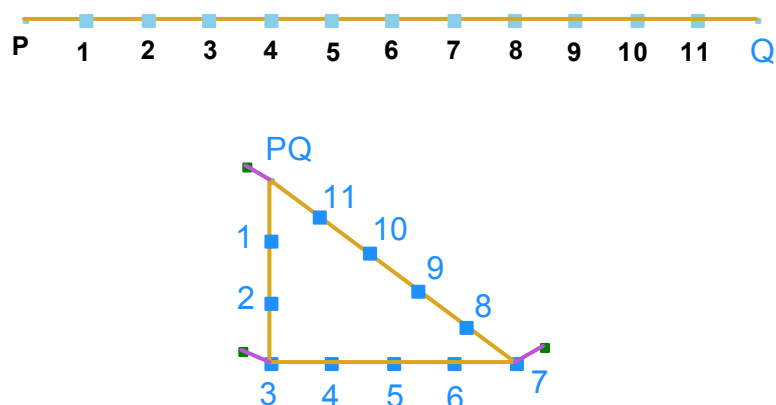


Figura 5

Si può chiedere agli studenti se ritengono questo procedimento equivalente a quanto visto finora o se osservano qualche differenza.

L'insegnante li guida a concludere che quanto fatto dagli Egiziani rappresenta l'operazione inversa. Le attività svolte in precedenza conducono alla dimostrazione di una proprietà dei triangoli rettangoli (il teorema di Pitagora), mentre il modo di procedere degli Egiziani si fonda sull'enunciato inverso: se i lati di un triangolo hanno misure tali che la somma dei quadrati di due è uguale al quadrato della terza allora il triangolo è rettangolo.

### Sesta fase

Si vuole dimostrare l'inverso del teorema di Pitagora.

L'insegnante invita gli studenti a disegnare un triangolo (per esempio il triangolo ACB della Figura 6) che abbia i lati con misure tali che:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

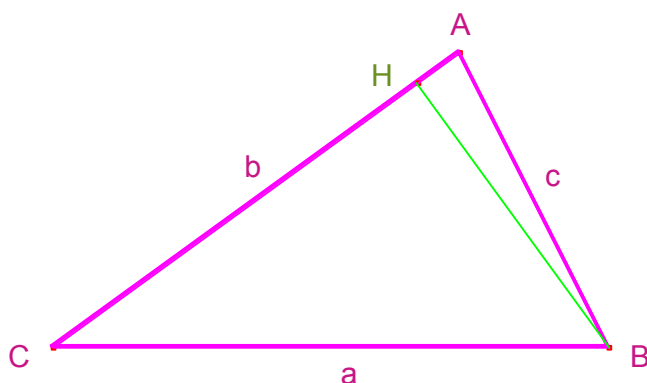


Figura 6

Se l'angolo in A formato dai lati minori non è retto (nella Figura 6 si suppone acuto), allora si può tracciare da uno dei vertici del lato più lungo (B) la perpendicolare al lato opposto (AC); si ottiene così un triangolo rettangolo (CBH), ma si viene a formare anche un triangolo rettangolo (AHB) in cui, applicando il teorema di Pitagora (dimostrato in precedenza), il cateto (BH) ha lunghezza uguale all'ipotenusa (AB) e questo non è possibile. L'angolo (in A) formato dai lati minori del triangolo dato deve essere retto.

### **Possibili sviluppi**

I) Teorema di Pitagora sostituendo figure simili ai quadrati.

La proprietà espressa dal teorema di Pitagora è ulteriormente generalizzabile: non si verifica solo nel caso in cui vengano costruiti quadrati sui lati del triangolo rettangolo, ma vale anche in tutti quei casi in cui si costruiscono figure che hanno le aree proporzionali al quadrato del segmento su cui vengono opportunamente costruite. Ciò accade a figure tra loro simili come, per esempio, poligoni simili, poligoni regolari, parti simili di cerchio opportunamente costruite sui lati del triangolo rettangolo.

II) Terne pitagoriche.

Costruire triangoli rettangoli i cui lati abbiano come misura numeri naturali, ovvero guidare alla generazione di terne pitagoriche.

## Origami, riga e compasso, software geometrico

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi.  Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà.	<u>Spazio e figure</u>  Argomentare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Disegno

### Contesto

Regolarità e simmetrie nel piano.

Il contesto di riferimento per questa attività è quello scolastico della geometria elementare, ma anche quello di esperienze legate al piegamento della carta, all'osservazione di regolarità e simmetrie in oggetti del mondo reale e, quindi, un contesto anche determinato da esperienze di carattere empirico e percettivo.

### Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in tre fasi. Nella prima vengono presentate due costruzioni con la piegatura della carta di un pentagono regolare (una approssimata e una, in teoria, esatta). Nella seconda fase viene presentata una costruzione del pentagono regolare con riga e compasso; nella terza la costruzione del pentagono regolare è effettuata in un ambiente di software di geometria. Tutte e tre le fasi vengono realizzate in un contesto di "apprendistato cognitivo", con l'insegnante che propone le costruzioni, evidenziando i momenti più significativi delle stesse e gli studenti che imparano osservando e imitando l'insegnante. L'obiettivo è quello di far nascere negli studenti la domanda "perché?", ossia l'esigenza di dimostrare perché una data costruzione funziona. In questo caso il ruolo della dimostrazione non è tanto quello di convincere che una costruzione è corretta, quanto quello di spiegare perché è corretta. L'insegnante può limitarsi a fornire alcune idee che evidenzino le caratteristiche delle costruzioni effettuate, preparando la strada per un approccio sistematico al problema di trovare la dimostrazione che potrà essere risolto solo nel secondo biennio.

Qui di seguito vengono presentate le tre fasi con una breve descrizione delle azioni che l'insegnante può compiere nella conduzione dell'attività.

Prima fase

Il pentagono da un foglio quadrato.

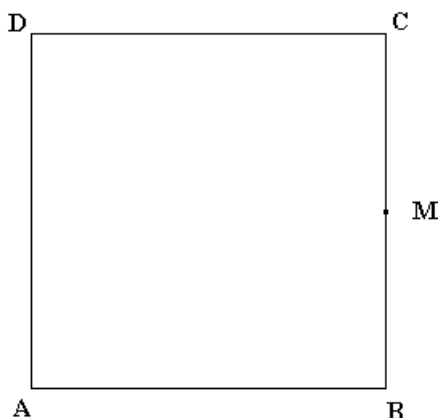


Figura 1

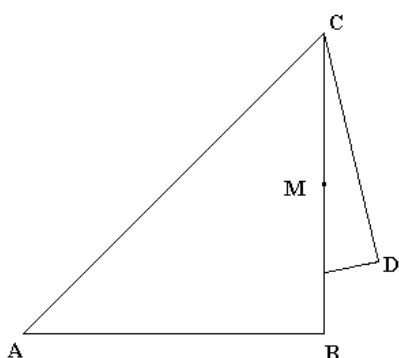


Figura 2

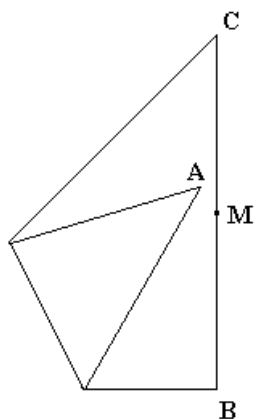


Figura 3

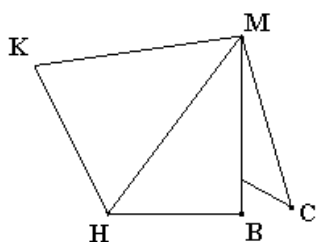


Figura 4

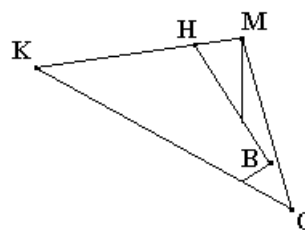


Figura 5

Quando mostro le operazioni di piegatura della carta non mi serve un linguaggio particolarmente curato. La comunicazione si basa sui gesti e i termini “questo” e “quello” abbondano. Quando invece voglio descrivere in un testo la costruzione, il linguaggio si deve precisare e diventa inevitabile introdurre notazioni.

La Figura 1 è un foglio quadrato: con gli allievi è interessante discutere sui modi possibili di “squadrate” un foglio qualsiasi. I vertici del quadrato sono indicati con lettere maiuscole. Il punto M è il punto medio del lato BC ottenuto piegando la carta in modo da far coincidere il vertice C con B.

Si piega il quadrato lungo la diagonale AC in modo da far coincidere i vertici B e D. Nelle notazioni dei testi di origami si usano simboli specifici per indicare l’orientamento delle pieghe (a valle, a monte ...) di solito elencati in premessa. Qui può bastare la figura per rendere esplicito il tipo di piega richiesto (Figura 2).

Portiamo ora il vertice A a coincidere con il punto M (Figura 3).

Pieghiamo il lato KM portando il vertice C verso il retro (Figura 4) e, successivamente, l’angolo HKM sul davanti in modo da sovrapporre la nuova piega con KC (Figura 5).

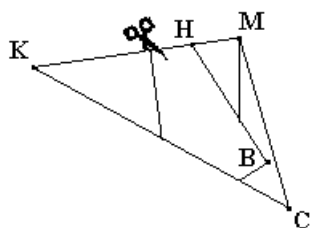


Figura 6

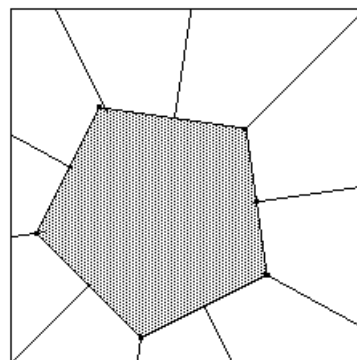


Figura 7

Dopo aver marcato una piegatura perpendicolare al lato KM (per far questo basta far coincidere nel piegare il triangolo KCM il lato KM con se stesso), la si ritagli come in Figura 6. Riaprendo il quadrato compare il pentagono in negativo (Figura 7); naturalmente il pentagono positivo è lo sviluppo del triangolo ritagliato.

Ma si tratta proprio di un pentagono regolare? La figura ottenuta lo sembra proprio, se si è fatta la costruzione con buona cura e usando un foglio di carta non troppo spesso.

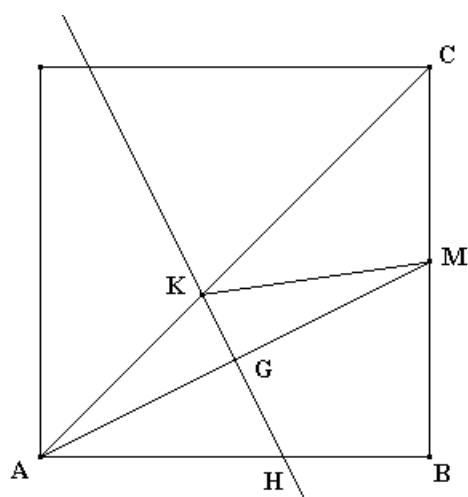


Figura 8

La costruzione non è esatta, anche se produce un “buon” pentagono la cui regolarità dipende piuttosto dalla cura con cui lo si costruisce.

Osserviamo la figura: M è punto medio di BC e la retta HK è asse del segmento AM (per costruzione). Gli angoli (uguali) AKG e GKM sono angoli al centro del pentagono e quindi dovrebbero misurare  $72^\circ$ .

Nel triangolo ABM, la tangente dell'angolo BAM è  $\frac{1}{2}$  e quindi l'angolo misura  $26,5651^\circ$ .

Per differenza, l'angolo GAC misura  $(45 - 26,5651)^\circ = 18,4346^\circ$  e quindi AKG, suo complementare, è di  $71,5651^\circ$  con un errore inferiore al mezzo grado.

La dimostrazione del fatto che la costruzione non è esatta fa uso della trigonometria, dato che si calcola l'angolo con l'arcotangente, e quindi non è proponibile a questo livello scolastico, ma potrà essere ripresa come simpatica applicazione nel secondo biennio. Per ora ci si può accontentare di una verifica operativa. Dopo aver ritagliato il pentagono si può verificare subito se è “sufficientemente” regolare: si aprono il quadrato e il pentagono e si cerca di riposizionare la parte ritagliata nel foro. Si osserverà che le due figure combaciano solo in una posizione, mentre ci sarà una differenza anche marcata quando si ruota il pentagono.

Ecco ora una costruzione “teoricamente” esatta, ma che nella pratica può dare risultati meno apprezzabili della precedente: il pentagono dal nastro (striscia di carta a bordi paralleli).

Per ottenere il pentagono si annoda una striscia di carta come è descritto (in tre passi) dalle figure seguenti (nella prima è indicato con un tratteggio il pentagono obiettivo della costruzione).

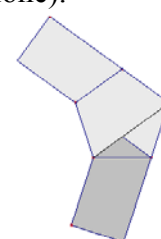
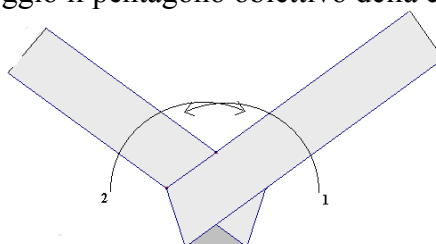
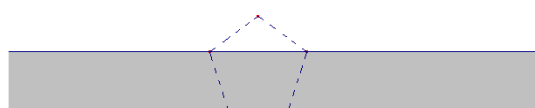


Figure 9 – 10 - 11

## Seconda fase

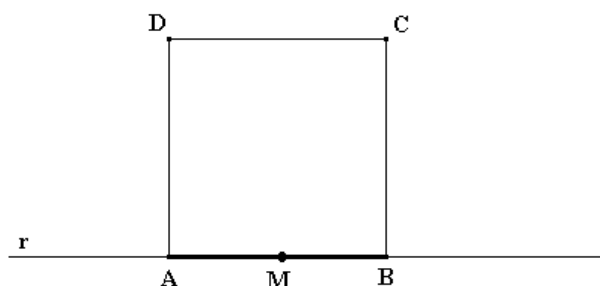


Figura 12

È dato il segmento AB; si costruiscono la retta r, il quadrato ABCD e M punto medio del segmento AM.

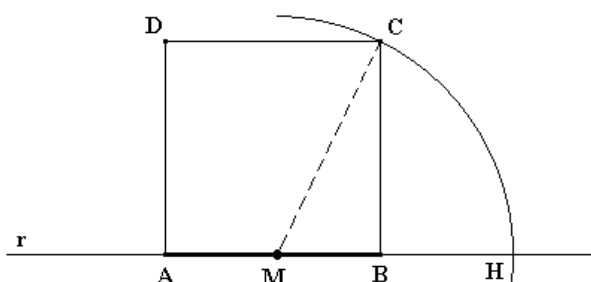


Figura 13

Puntando il compasso in M, con apertura MC, si porta la circonferenza ad intersecare la retta r in H.

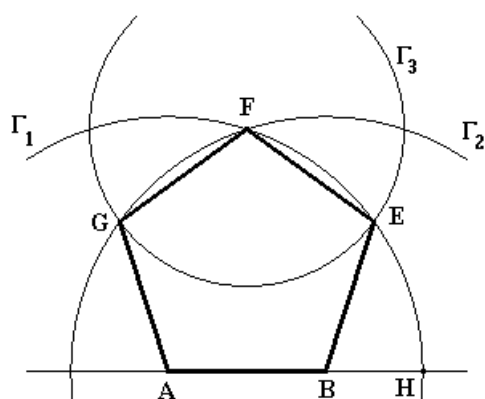


Figura 14

Con il compasso di apertura AH, si tracciano le circonferenze  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Sia F il punto di intersezione delle due circonferenze.

Puntando in F, con apertura del compasso AB, si traccia la circonferenza  $\Gamma_3$  che interseca le due precedenti nei punti E e G.

I punti A, B, E, F, G sono vertici di un pentagono regolare.

Anche in questo caso ci si ferma a livello operativo, lasciando la dimostrazione come esercizio da proporre nel secondo biennio quando saranno disponibili le equazioni di secondo grado.

Senza giungere a formalizzare la dimostrazione della costruzione, si può far osservare agli allievi il fatto che AB è “parte aurea” del segmento AH. Infatti, considerando la seconda figura di questa costruzione, possiamo esprimere le relazioni:

$$\overline{AH} = \overline{AM} + \overline{MH}, \quad \overline{BH} = \overline{AH} - \overline{AB}$$

$$\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2$$

Posto  $\overline{AM} = x$ , possiamo verificare che vale la relazione del “rapporto aureo” per AB su AH.

$$(x + x\sqrt{5}) : 2x = 2x : (x\sqrt{5} - x)$$

Da questo segue, per la costruzione fatta nella figura 14, che le diagonali del pentagono ABEFG, e cioè AE, AF, BF e BG sono uguali tra loro e hanno come “parte aurea” il lato AB.

Fase 3. Il pentagono con un software geometrico

La costruzione proposta parte da due punti: il centro della circonferenza circoscritta al pentagono e un vertice del pentagono.

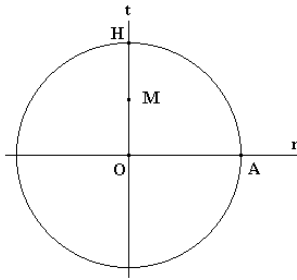


Figura 15

O è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono, A un suo vertice.

Si traccia la circonferenza di centro O e raggio OA.

Si disegna la retta r passante per OA.

Per O si porta la perpendicolare t ad r. La retta t interseca la circonferenza in H.

Si disegna il punto M, medio del segmento OH.

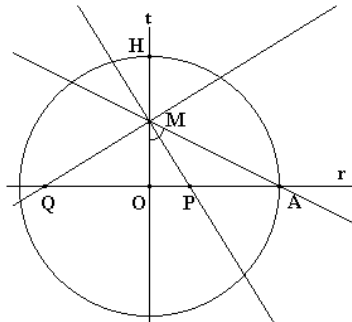


Figura 16

Si disegnano le bisettrici, interna ed esterna, dell'angolo OMA. Le due bisettrici intersecano la retta r nei punti P e Q.

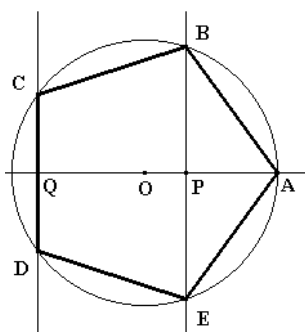


Figura 17

Per i punti P e Q si portano le perpendicolari alla retta r; queste intersecano la circonferenza nei punti B, C, D ed E. I punti A, B, C, D ed E sono vertici di un pentagono regolare.

La costruzione ora descritta può essere definita come procedura che, a partire da due punti dati, produce l'intera sequenza dei vertici. La procedura "pentagono" può essere usata per una prima conferma che il pentagono ottenuto è regolare: basta riapplicarla ai punti O e B e osservare che vengono nuovamente riottenuti gli stessi vertici.

Che cosa offre in più il software geometrico che non si può ottenere con le costruzioni manuali o con la riga e il compasso? L'esempio seguente mostra un'attività che non sarebbe possibile senza uno strumento che disegni "di colpo" un pentagono, dati centro e vertice.

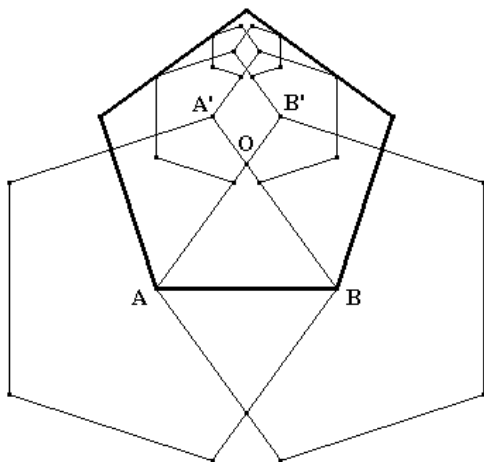


Figura 18

Si parte da due punti A e B. Si costruiscono i pentagoni "contrapposti" di centro A e vertice B e, viceversa, di centro B e vertice A. Nei due pentagoni costruiti si individuano i vertici A' e B' con i quali si ripete la costruzione. Il processo può essere ripetuto più volte: si ottengono due belle successioni di pentagoni che "convergono".

Ma, *sorpresa*, se prendiamo il punto O intersezione dei lati AB' e BA' e disegniamo il pentagono di centro O e vertice B, il pentagono ha lato AB e, soprattutto, *inscatola* le due sequenze di pentagoni.

Per questo livello scolastico è sufficiente osservare e congetturare, ma la figura può essere un esercizio interessante sulle omotetie nel secondo biennio.

### Possibili sviluppi

- Altri confronti tra costruzioni con piegatura della carta, con riga e compasso e con software di geometria.
- Cenni di dimostrazione di correttezza delle più semplici costruzioni proposte.
- Riflessioni sul ruolo della riga e del compasso come strumenti teorici nella geometria euclidea.

### Elementi di prove di verifica

#### 1. Poligoni con numero di lati pari a potenze di due

Dato un foglio di carta qualsiasi, piegare il foglio una volta, piegare di nuovo il foglio facendo coincidere la piega. Riaprire il foglio: come sono le due pieghe? Come mai?

Richiudere il foglio secondo le piegature; tagliare il foglio piegato in modo da ottenere un triangolo rettangolo, riaprire. Che figura geometrica si ottiene? Se a foglio ripiegato si taglia il triangolo rettangolo in modo che sia isoscele, quale figura si otterrà una volta aperto?

Con un foglio piegato come sopra, si piega nuovamente in modo che i due lati coincidano (angolo al vertice di  $45^\circ$ ). Ritagliare perpendicolarmente ad uno dei due lati (in due modi) e in maniera da avere un triangolo isoscele. Quali figure si ottengono nei tre casi?

Come si può ottenere con la piegatura della carta un poligono di 16 lati? E di 32?

#### 2. Quadrati e triangoli con riga e compasso

Costruire un quadrato con riga e compasso. Sempre con riga e compasso costruire un triangolo equilatero con lo stesso lato all'interno del quadrato. Sul lato adiacente del quadrato, costruire all'esterno del quadrato il triangolo equilatero di stesso lato. Tracciare la retta che passa per i vertici costruiti dei due triangoli equilateri: che cosa si osserva?

#### 3. Il foglio punteggiato con un software geometrico

Dati due punti presi come estremi del lato di un quadrato, definire la procedura che costruisce gli altri due vertici.

Con questa procedura si costruiscano punti del piano a partire sempre da punti costruiti in precedenza. Come sono i punti ottenuti?

## Problemi di minimo nel piano

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, ...). Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi. Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

### Contesto

Geometria sintetica e analitica.

L'attività può essere svolta nel primo biennio alla fine del primo anno oppure agli inizi del secondo anno.

Gli strumenti di cui ci si avvale sono la carta e la riga, un software di geometria dinamica e le calcolatrici grafico-simboliche.

Lo studente per affrontare questa attività deve avere una adeguata conoscenza delle simmetrie assiali, delle traslazione, del piano cartesiano, e inoltre deve sapere tabulare numericamente una relazione tra due grandezze. L'obiettivo è quello di utilizzare le proprietà della simmetria assiale e di applicarla in un contesto concreto.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

L'insegnante distribuisce un foglio su cui sono disegnati una retta e due punti A e B situati nello stesso semipiano rispetto alla retta data, come mostrato nella Figura 1, gli studenti disegnano e misurano con il righello, ordinano numeri.

#### Consegna 1

Disegnare sulla retta i punti D, E, F, G, misurare la lunghezza delle spezzata ADB, AEB, AFB, AEG con un righello, ordinare le misure effettuate in modo crescente.



Figura 1

Dopo aver raccolto e ordinato le misure, gli studenti osservano che la lunghezza delle spezzate dipende dalla posizione del punto sulla retta e che si può scegliere tra i punti disegnati quello che rende minima la lunghezza della spezzata.

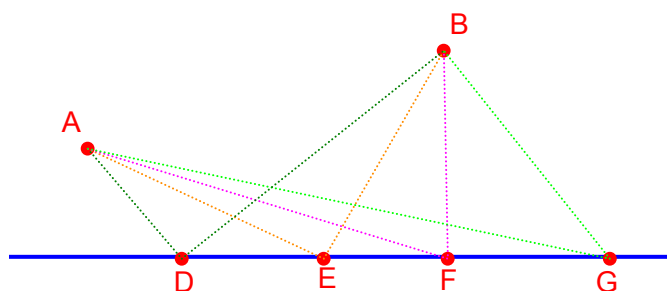


Figura 2

L'insegnante chiede a ognuno di comunicare il valore più piccolo trovato. I valori vengono scritti alla lavagna e si determina il valore più piccolo tra quelli comunicati.

Osservazioni. L'attività precedente permette agli studenti di riflettere sul significato di valore minimo, sulla possibilità di individuarlo tra gli elementi di un insieme finito e comprendere che il valore determinato può non essere quello cercato poiché i casi analizzati non esauriscono tutti i casi possibili.

### Seconda fase

Gli studenti, divisi in gruppi, utilizzano tutti lo stesso disegno fatto con un software di geometria, tabulano i valori delle lunghezze dei percorsi sfruttando lo strumento "Tabella" del software di geometria oppure una calcolatrice grafico simbolica.

#### Consegna 2

Rappresentare i percorsi da A a B che toccano la retta nel punto Q, tabulare i valori trovati in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.

Gli studenti leggono la tabella per trarre informazioni (Figura 3), determinano il valore minimo tra quelli tabulati, inoltre, riescono a individuare graficamente la zona in cui il percorso ha lunghezza minima.

L'insegnante chiede agli studenti di rappresentare graficamente l'andamento della lunghezza dei percorsi.

#### Consegna 3

Costruire, con l'ausilio dello strumento "Luogo" del software di geometria, il grafico della variazione della lunghezza dei percorsi AQB in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.

Gli studenti costruiscono il luogo di punti, imparano a interpretare le informazioni date dal grafico, congetturano che esiste almeno un punto Q, sulla retta, corrispondente al percorso di minima lunghezza (Figura 4).

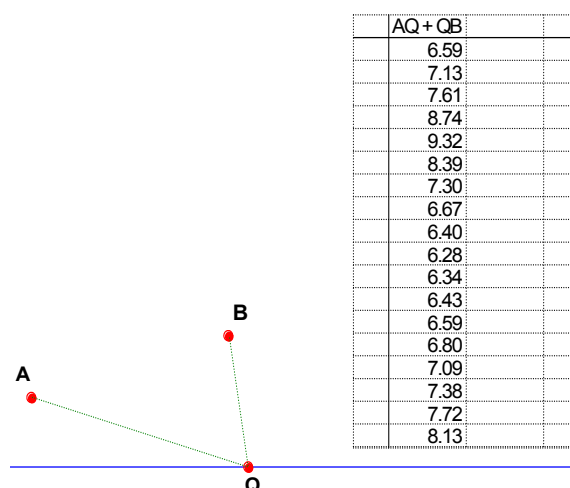


Figura 3

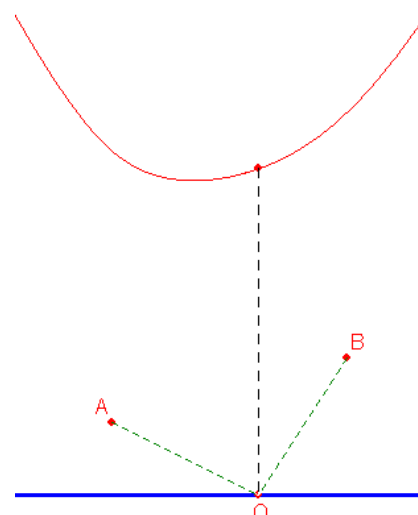


Figura 4

### Terza fase

Realizzazione di un'esperienza concreta con gli specchi (per osservare la riflessione delle immagini sugli specchi piani e intuire la caratterizzazione geometrica del percorso di lunghezza minima).

#### Consegna 4

Analizzare con il software di geometria l'immagine che riproduce la riflessione di un foglio di carta sul quale sono disegnati due punti posto perpendicolarmente allo specchio. Tracciare e misurare i segmenti che uniscono i punti. Descrivere quello che si osserva.

Gli studenti osservano sulla riproduzione della foto quattro punti (Figura 5a), quelli disegnati sul foglio e quelli ottenuti come loro immagini nella riflessione.

Tracciano i segmenti che uniscono rispettivamente il punto A con il punto A', riflesso del punto A, e con il punto B', riflesso del punto B, e i segmenti che uniscono rispettivamente il punto B con il punto B', riflesso del punto B, e con il punto A', riflesso del punto A (Figura 5b).

La discussione porta gli studenti a osservare che:

- i segmenti AB' e A'B si intersecano in un punto P;
- i segmenti AA' e BB' sembrano essere perpendicolari al bordo del foglio appoggiato contro lo specchio;
- il punto P sembra appartenere all'asse di riflessione.

Inoltre, dopo aver misurato i segmenti, il punto P sembra essere equidistante da A e dal suo riflesso e così anche da B e dal suo riflesso.

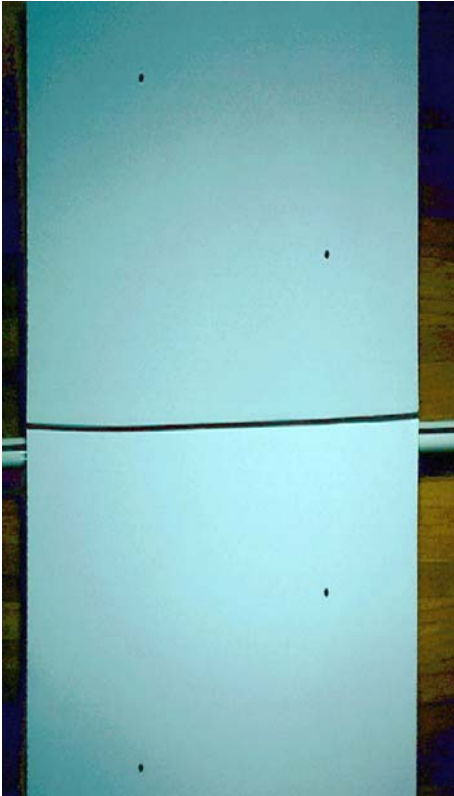


Figura 5a

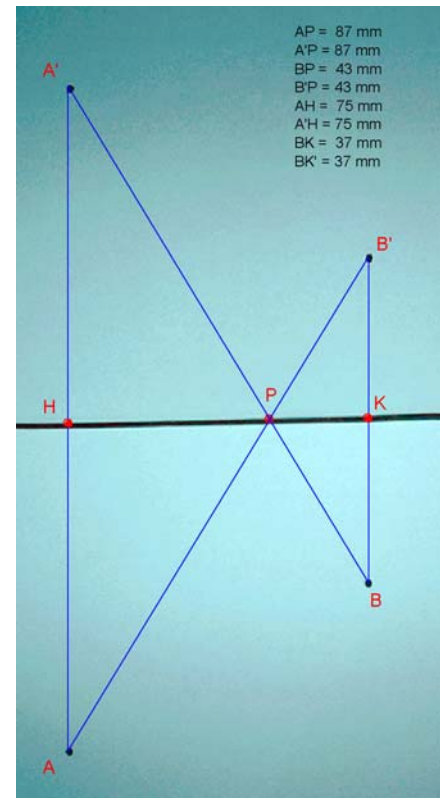


Figura 5b

Si termina con la formulazione della congettura che segue:

l'immagine ottenuta con lo specchio si può costruire mediante la simmetria assiale che ha per asse la retta che passa per P ed è perpendicolare ai segmenti AA' e BB'.

Quarta fase

Gli studenti rappresentano con il software di geometria quanto osservato nella consegna precedente (Figura 6a).

Consegna 5

Riprodurre con il software di geometria la configurazione dei punti A e B e dei loro riflessi A' e B'.

Quinta fase

Gli studenti riconoscono che APB è uno dei possibili percorsi che collega il punto A con il punto B. Individuano, con l'aiuto dell'insegnante, le proprietà che caratterizzano il punto della retta che rende minimo il percorso che collega il punto A al punto B toccando la retta.

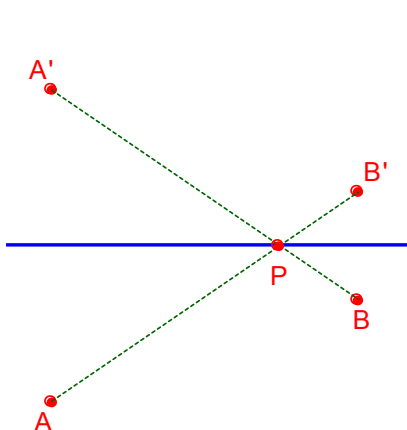


Figura 6a

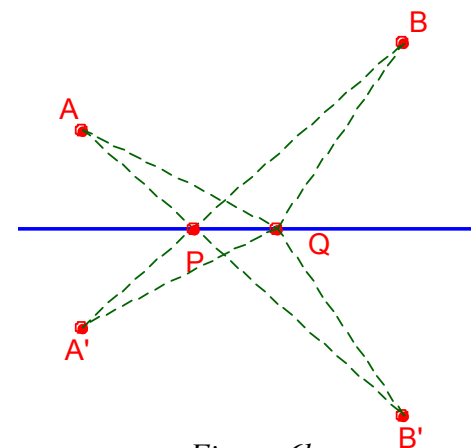


Figura 6b

### Consegna 6

Prendere sull'asse di riflessione un punto  $Q$  diverso dal punto  $P$  e collegarlo con il punto  $A$ , con il punto  $B$  e con il punto  $B'$  (Figura 6b). Misurare il percorso  $APB$ ,  $AQB$ ,  $AQB'$ . Descrivere quello che si osserva.

Questa fase di congettura e scoperta permette agli studenti, servendosi della possibilità offerta dal software, di modificare la configurazione trascinando il punto  $Q$ . In questo modo individuano la proprietà che caratterizza la posizione del punto che rende minimo il percorso.

Congettura:

Il punto di minimo percorso corrisponde al punto  $P$  intersezione del segmento  $AB'$  con l'asse di riflessione.

### Consegna 7

Dimostrare o confutare la congettura precedente.

Gli studenti utilizzano le conoscenze acquisite nel corso dell'attività per svolgere una dimostrazione in geometria.

Per le proprietà della simmetria assiale la lunghezza del percorso  $AQB'$  è uguale alla lunghezza del percorso  $AQB$ . Quindi il percorso  $APB$  è quello di lunghezza minima.

L'insegnante chiede agli studenti di confrontare le ampiezze degli angoli che l'asse di riflessione forma rispettivamente con il segmento  $AQ$  e con il segmento  $BQ$ .

### Consegna 8

Misurare, con l'aiuto del software di geometria, l'angolo  $AQX$  e l'angolo  $AQY$ . Trascinare il punto  $Q$  sull'asse di riflessione (Figura 7). Descrivere quello che si osserva.

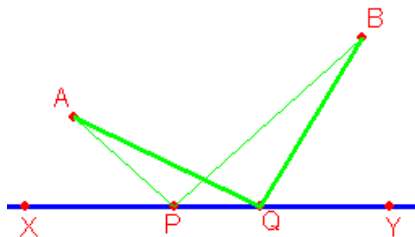


Figura 7

Gli studenti osservano che se  $Q$  coincide con  $P$  gli angoli sono uguali, formulano la seguente congettura: Gli angoli  $APX$  e  $BPY$  hanno la stessa ampiezza.

### Consegna 9

Dimostrare o confutare che  $APX$  e  $BPY$  sono angoli uguali.

Gli studenti osservano nuovamente la costruzione fatta nella Consegna 6: l'ampiezza dell'angolo  $APX$  è uguale all'ampiezza dell'angolo  $XPA'$ , in quanto corrispondenti nella simmetria assiale. Inoltre l'ampiezza dell'angolo  $XPA'$  è uguale all'ampiezza dell'angolo  $BPY$  perché angoli opposti al vertice. Ne segue che l'ampiezza dell'angolo  $APX$  è uguale all'ampiezza dell'angolo  $BPY$ .

### Sesta fase

Gli studenti sono ora in grado di descrivere il fenomeno della riflessione in termini matematici

### Consegna 10

Descrivere il fenomeno della riflessione rispetto a uno specchio piano.

### Settima fase

Gli studenti descrivono con l'uso delle coordinate il percorso di minima lunghezza.

### Consegna 11

Dato il punto  $A(0, 1)$  e  $B(1, 2)$  determinare il punto  $A'$  corrispondente di  $A$  rispetto alla simmetria il cui asse è l'asse delle ascisse. Scrivere l'equazione della retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$ .

Determinare il punto P di intersezione della retta  $r$  con l'asse  $x$ . Scelte a piacere le coordinate del punto A e del punto B, determinare le coordinate del punto P come nel caso precedente.

Gli studenti utilizzano la definizione sintetica di simmetria assiale e individuano le coordinate del punto A'.

Risolto questo problema, l'attenzione è rivolta alla strategia risolutiva; quindi, con l'aiuto di una calcolatrice grafico-simbolica, utilizzata come "scatola nera", determinano l'equazione della retta e il suo punto di intersezione con l'asse  $x$  (Figura 7a e Figura 7b).

Assegnati alle coordinate dei punti A e B nuovi valori, con le ordinate positive, ottengono, con l'istruzione della calcolatrice di "assegnazione di valore a una variabile", il ricalcolo dei vari passi.

Dopo questa attività, acquisita la consapevolezza della procedura di soluzione, gli studenti possono affrontare il caso generale.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Warn Find... Mode
:retta(a,b,D)
:Func
:(x-a[1])*(b[2]-a[2])-(y-a[2])*(b[1]-a[1])=0
:EndFunc
MAIN END AUTO FUNC
    
```

Figura 7a

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up
:retta({0 -1},{1 2}) 3*x-y-1=0
:3*x-y-1=0|y=0 3*x-1=0
:solve(3*x-1=0,x) x=1/3
:retta({0 -2},{3 5}) 7*x-3*(y+2)=0
:7*x-3*(y+2)=0|y=0 7*x-6=0
:solve(7*x-6=0,x) x=6/7
:solve(7*x-6=0,x)
MAIN END AUTO FUNC 26/30
    
```

Figura 7\_b

### Consegna 12

Determinare le coordinate del punto P sull'asse delle ascisse che determina il percorso di minima lunghezza congiungente il punto A( $a_1, a_2$ ) al punto B( $b_1, b_2$ ). Descrivere l'algoritmo che ha come dato iniziale le coordinate dei punti A e B e come dato finale le coordinate del punto P.

Gli studenti traducono formalmente le scelte fatte nella consegna precedente: devono saper scrivere la condizione di appartenenza allo stesso semipiano dei punti A e B rispetto all'asse delle ascisse.

Risolto questo problema determinano, sempre con l'aiuto della calcolatrice grafica, l'ascissa del punto che individua il percorso di minima lunghezza tra A e B (Figura 8a) e discutono alcuni casi particolari (Figura 8b).

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up
:retta({a1 -a2},{b1 b2})|a2*b2 > 0
:(a2+b2)*x+(a1-b1)*y-a1*b2-a2*b1=0
:(a2+b2)*x+(a1-b1)*y-a1*b2-a2*b1=0
:(a2+b2)*x-a1*b2-a2*b1=0
:solve((a2+b2)*x-a1*b2-a2*b1=0,x)
x=(a1*b2+a2*b1)/(a2+b2)
:solve((a2+b2)*x-a1*b2-a2*b1=0,
MAIN END AUTO FUNC 18/30
    
```

Figura 8a

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgnIO Clean Up
x=(a2+b2)
: x = (a1*b2 + a2*b1) / (a2 + b2) | a2 = b2 x = (a1 + b1) / 2
: x = (a1*b2 + a2*b1) / (a2 + b2) | a1 = b1 x = b1
: x = (a1*b2 + a2*b1) / (a2 + b2) | a2 = 0 and b2 = 0
x = undef
:x=(a1*b2+a2*b1)/(a2+b2)|a2=0
MAIN END AUTO FUNC 18/30
    
```

Figura 8b

Analizzano il caso in cui i punti A e B appartengono a semipiani opposti rispetto all'asse delle ascisse e determinano, anche in questo caso, l'ascissa del punto che individua il percorso di minima lunghezza.

A questo punto gli studenti, dopo aver acquisito padronanza sull'uso delle istruzioni condizionali "se ... allora ... altrimenti ..." e sulla rappresentazione dei vettori di dimensione due, descrivono l'algoritmo per determinare il punto che rende minima la lunghezza del percorso (Figura 9a e Figura 9b).

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:er(a,b)
:Func
:If a[2]*b[2]>0 Then
: C(a[1]*b[2]+a[2]*b[1])/a[2]+b[2],0}
: Else
: C-(a[1]*b[2]-a[2]*b[1])/a[2]-b[2],0}
: EndIf
: EndFunc
MAIN          END AUTO          FUNC
    
```

Figura 9a

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
:er(0,1),(1,2)}
:er(0,-1),(1,2)}
:er(0,-1),(1,3)}
:er(0,-1),(1,-1)}
:er(0,2),(1,2)}
:er(0,2),(0,3)}
:er(-3,2),(5,3)}
:er(1,2),(7,5)}
:er(1,2),(7,5)}
MAIN          END AUTO          FUNC 18/30
    
```

Figura 9b

Come approfondimento si può affinare l'algoritmo precedente aggiungendo l'analisi del caso in cui almeno uno dei due punti ha ordinata uguale a zero.

**Possibili sviluppi**

1. Date due località A e B da parti opposte rispetto alla riva di un fiume dall'andamento rettilineo, individuare dove collocare un ponte sul fiume in modo da rendere minima la lunghezza del percorso che collega la località A alla località B (Si suppone che le sponde siano parallele e che il ponte venga costruito perpendicolarmente alle sponde).
2. Date due rette  $l, m$  e due punti P ed S situati come nella Figura 10, determinare il percorso di minima lunghezza che va da P a S toccando prima la retta  $l$  e poi la retta  $m$ .

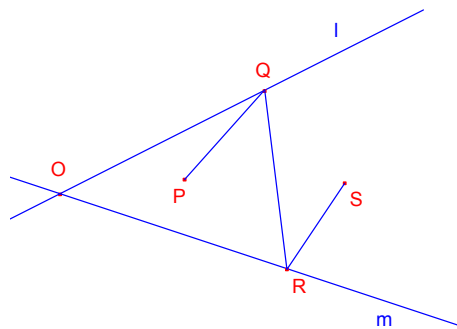


Figura 10

3. Determinare, fra tutti i triangoli PQR aventi l'area assegnata e un lato assegnato  $c = PQ$ , quello per cui è minima la somma degli altri lati  $a = PR$  e  $b = RQ$ .
4. Dati il triangolo acutangolo ABC, determinare i tre punti R, S e T, appartenenti ordinatamente ai suoi tre lati, in modo che il perimetro del triangolo RST sia minimo.

## Simmetrie nei poliedri

**Livello scolastico:** 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri. Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, ...). Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano.  Simmetrie nei poliedri regolari.	<u>Spazio e figure</u>  Numeri e algoritmi  Relazioni e funzioni  Argomentare, congetturare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Storia Scienze

### Contesto

Figure del piano e dello spazio.

L'attività si colloca alla fine del primo biennio, quando gli studenti hanno già chiare le proprietà di simmetria delle figure nel piano. Il contesto è quello delle figure del piano e dello spazio. Infatti, dalle simmetrie dei poligoni nel piano si passa ad affrontare le proprietà di simmetria delle figure nello spazio.

Si indaga su come estendere, in forma intuitiva, ai poliedri le proprietà di simmetria dei poligoni fino ad arrivare ai concetti di piano di simmetria, di centro di simmetria, di asse di simmetria, di asse di rotazione. L'obiettivo è quello di far vedere come nello spazio non si possono trasferire automaticamente le proprietà studiate nel piano. Uno dei punti fondamentali dell'attività consiste nel giungere a una descrizione corretta e condivisa di poliedro regolare.

Attraverso questo lavoro gli studenti affinano le loro capacità di visione nello spazio tridimensionale in modo non "separato" da quanto è stato già visto nel piano.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Costruzione di modelli fisici di solidi (cartoncino, cannucce, ...), che possono avere o non avere proprietà di simmetria.

Gli studenti sono invitati a costruire, con strumenti diversi, alcuni dei poliedri più semplici (prisma retta a base regolare, piramide regolare, cubo, ottaedro regolare, tetraedro regolare,...) che poi verranno analizzati dal punto di vista delle simmetrie.

Si può anche procedere, nei casi più semplici, alla visualizzazione di poliedri tramite riflessioni su specchi o combinazioni di specchi (caleidoscopio tridimensionale).

Si chiede ora agli studenti di individuare, fra tutte le configurazioni (connesse) che si possono ottenere affiancando 6 quadrati, lato contro lato, quelle che rappresentano possibili sviluppi di cubo.

Si chiede ad esempio di esaminare la figura 1 e di scegliere quelle che possono rappresentare lo sviluppo piano di un cubo.

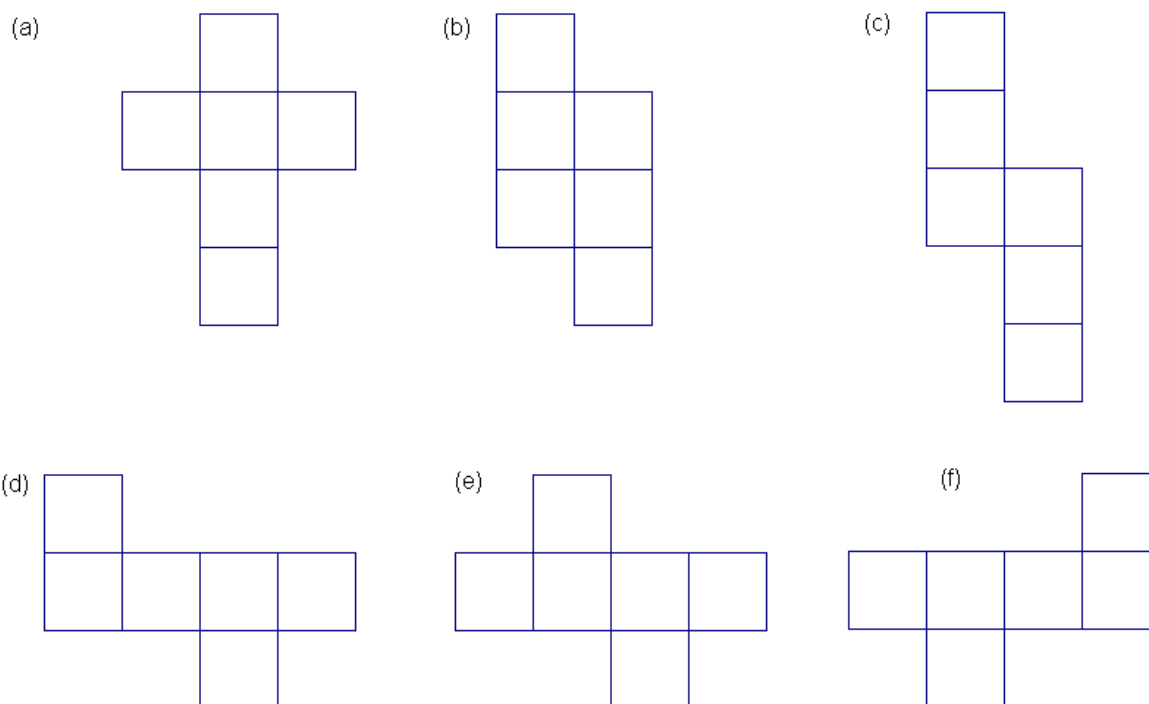


Figura 1

Si passa, quindi:

- alla discussione su cosa si debba intendere per “sviluppi diversi”;
- alla discussione sui pregi di questo o di quell’altro sviluppo;
- a colorare con lo stesso colore, a partire dal disegno di uno sviluppo piano del cubo, le coppie di spigoli che nella ricostruzione vanno a coincidere.

### Seconda fase

Riconoscimento di simmetrie in oggetti tridimensionali.

Si svolge una discussione sulle osservazioni fatte in classe e ci si avvicina gradualmente, facendole emergere da osservazioni concrete, alle definizioni di piano di simmetria, centro di simmetria, asse di rotazione, asse di simmetria (ci si può avvalere di modelli fisici, software di geometria o di figure tridimensionali prelevate dalla rete,...) a partire da casi semplici: cubo, tetraedro regolare, ottaedro regolare,...

### Terza fase

Determinazione di assi, piani e centri di simmetria.

In questa fase sarà richiesto di determinare tutti gli assi di simmetria del cubo; la stessa domanda si può fare per i piani di simmetria e per il centro di simmetria, scoprendo legami tra i vari movimenti che trasformano in sé il poliedro; nello stesso modo si indaga su altri semplici poliedri: ottaedro regolare, tetraedro regolare,... (Figura 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8).

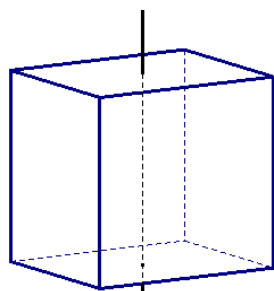


Figura 2

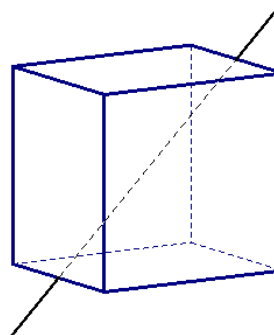


Figura 3

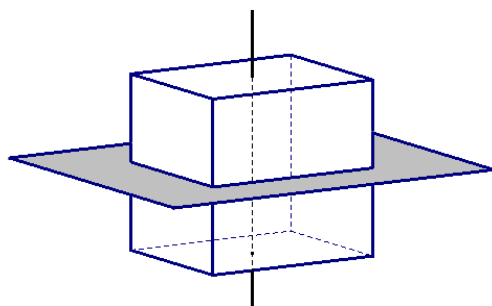


Figura 5

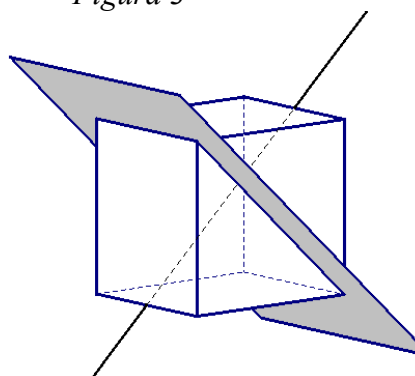


Figura 6

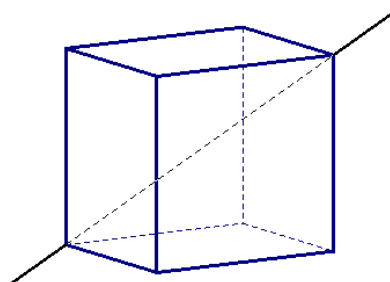


Figura 7

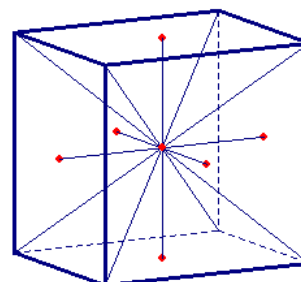


Figura 8

#### Quarta fase

Descrizione dei poliedri regolari.

In questa fase, dalle osservazioni precedenti si arriva alla descrizione dei poliedri regolari, in modo che la definizione venga “costruita” attraverso un percorso di tipo intuitivo e osservativo. Non è il caso, in questo momento, di dare una definizione formale di poliedro regolare, con il rischio di un apprendimento puramente meccanico.

Si possono anche esaminare le relazioni tra il cubo e l’ottaedro regolare che ha i vertici nel centro delle facce del cubo e scoprire che le simmetrie trovate per il cubo sono le stesse dell’ottaedro regolare. In questo modo, si ha il vantaggio di poter estendere le proprietà di simmetria di un poliedro a quello del poliedro duale. Analoghe considerazioni si possono fare, come possibile approfondimento, per il dodecaedro regolare e l’icosaedro regolare. Si può fare anche notare che il tetraedro ha come duale se stesso.

#### **Possibili sviluppi**

1. Conteggio del numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di vari poliedri (in presenza o in assenza di un modello fisico). Come approfondimento ulteriore si può proporre un’attività per arrivare, in forma intuitiva, alla formula di Eulero (o di Cartesio-Eulero).



Tetraedro regolare

Cubo

Ottaedro regolare

Dodecaedro regolare

Icosaedro regolare

Figura 9

Si può chiedere inizialmente di completare la seguente tabella mediante l'osservazione di modelli fisici di poliedri regolari.

Poliedro	Tetraedro regolare	Cubo (esaedro regolare)	Ottaedro regolare	Dodecaedro regolare	Icosaedro regolare
Numero delle facce: $F$					
Numero degli spigoli: $S$					
Numero dei vertici: $V$					

Dopo aver completato la tabella, cercare una relazione tra  $F$ ,  $V$ ,  $S$  per questi solidi.

- Si può anche arrivare, in modo intuitivo, a rispondere alla seguente domanda: perché esistono solo cinque tipi di poliedri regolari? Inizialmente si prende in considerazione il vertice di un poliedro regolare e si fa osservare che in ogni vertice convergono almeno tre facce; si può chiedere agli studenti qual è la somma degli angoli che convergono nello stesso vertice. Una volta osservato che tale somma è sempre minore di un angolo giro si possono esaminare le varie situazioni possibili.  
Un approfondimento storico da proporre: i solidi platonici.
- Individuazione dei tipi di figure geometriche che si possono ottenere sezionando un cubo mediante un piano.
- Quali, tra i poliedri regolari, consentono un riempimento dello spazio? (Si deve ipotizzare di riempire completamente, senza lasciare "buchi", tutto lo spazio, usando un solo tipo di poliedro regolare). Discutere la domanda e scrivere tutto quello che si è pensato.
- Quali poligoni regolari si possono ottenere sezionando un cubo con un piano?
- Quali poliedri ammettono un centro di simmetria?
- Considerare un cubo di spigolo  $l$ . Individuare il minimo cammino sulla superficie cubica per andare dal vertice A al vertice opposto E (vedi figura 12).
- Quante sono le direzioni e quante le giaciture individuate rispettivamente dagli spigoli e dalle facce di un ottaedro regolare. (Per rispondere conviene pensare i sei vertici dell'ottaedro come i centri delle facce di un cubo, come in figura 10).

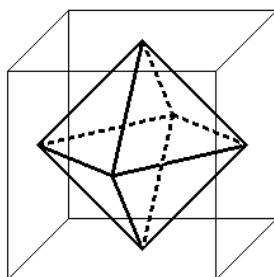


Figura 10

**Elementi di prove di verifica**

1. Qui a fianco è disegnato un cubo in assonometria. Il cubo ha uno spigolo di 8 cm. Lo si taglia in due prismi retti, sezionandolo secondo il piano DBFH. Disegnare, con le dimensioni reali, la faccia DBFH comune a questi due prismi.

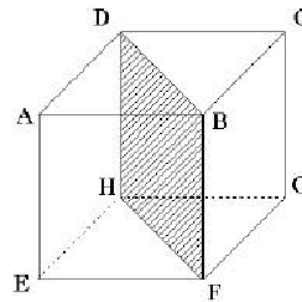


Figura 11

2. Costruire un tetraedro regolare ABCD in cartoncino oppure usando cannucce da bibita. Immaginando di congiungere in tutti i modi i centri delle facce, descrivere il poliedro che si ottiene.
3. Si seziona il cubo disegnato in Figura 12 con il piano passante per i vertici B, C, D.
- Di che tipo è il triangolo BCD? Perché?
  - Che tipo di poliedro è quello individuato dai vertici B, C, D, E? Perché?
  - Se I e J sono i punti medi dei segmenti BC e BD allora la retta IJ è parallela alla retta CD? Perché?
  - Di che tipo è il triangolo AIB? Perché?

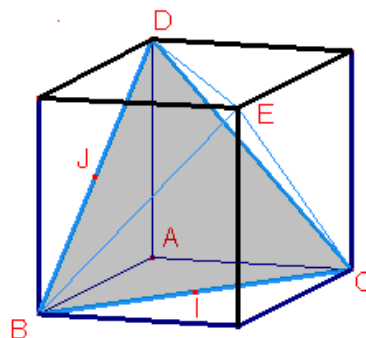


Figura 12

4. Si considera un cubo ABCDEFGH. Il punto I è il punto di intersezione dei segmenti [FC] e [GB]. Il punto J è il punto di intersezione dei segmenti [HF] e [EG].

Rispondere alle seguenti domande.

- Il triangolo EGB è rettangolo in G?
- Il triangolo IAJ è isoscele?
- Il triangolo AEJ è rettangolo in E?
- Il triangolo AEJ è isoscele?

V	F
V	F
V	F
V	F

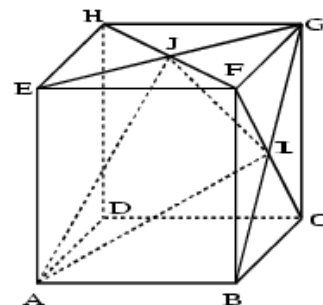
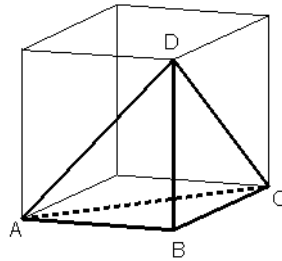


Figura 13

5. Disegnare uno sviluppo piano di uno dei solidi che si ottengono sezionando un cubo con un piano diagonale (Un piano diagonale è un piano che passa per le diagonali parallele di due facce opposte o, se si preferisce, per due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia).

6. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un cubo?
7. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un ottaedro regolare?
8. Disegnare uno sviluppo piano della piramide ABCD ottenuta a partire da un cubo, come illustrato in figura 14.



*Figura 14*

9. Nella figura 14, si disegni il centro di simmetria O del cubo e la piramide simmetrica di ABCD rispetto a O.