

## Le circonferenze di Fermat

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza.  Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrittibili e circoscrittibili.	<u>Spazio e figure.</u>  Argomentare, congetturare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Configurazioni geometriche del piano.

Questa attività può essere proposta nel primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle configurazioni geometriche del piano.

Gli strumenti di cui avvalersi sono un software di geometria che permette agevolmente di esplorare le varie proprietà relative alla circonferenza e dei poligoni inscrittibili. È necessario che gli studenti conoscano le proprietà dei triangoli e sappiano utilizzare un software di geometria.

Si propone dunque un approccio per problemi (problem solving) in ambito matematico e si pone particolare attenzione anche al modo in cui inizialmente viene posto il problema. Questo verrà affrontato in forma “aperta” (problem posing), in modo da suscitare una motivazione consapevole all’ascolto e una predisposizione ad un apprendimento attivo da parte dello studente.

### Descrizione dell’attività

L’attività procede a partire dalle proprietà angolari relative alla circonferenza fino ad affrontare, nell’ultima fase, il teorema sulle circonferenze di Fermat.

#### Prima fase

Si propone agli studenti di esplorare le proprietà di alcune figure costruite usando un software di geometria. Viene data la seguente

Consegna 1

Disegnare due punti A e B, un triangolo equilatero di lato AB, la circonferenza  $c$  ad esso circoscritta, il suo centro O, un punto P sulla circonferenza  $c$  e le corde AP e BP.

Cosa possiamo dire sull’ampiezza dell’angolo APB?

Gli studenti con l’ausilio del software misurano l’ampiezza di APB, muovono il punto P sulla circonferenza e notano che l’angolo APB misura  $120^\circ$  oppure  $60^\circ$  (Figure 1 e 2).

Gli studenti sono guidati a formulare la seguente congettura:

Dato un triangolo equilatero ABC e dato un punto P sulla circonferenza ad esso circoscritta, si ha che l’angolo APB misura  $120^\circ$  oppure  $60^\circ$ .

Ciò va dimostrato o confutato. Si è di fronte ad un problema didattico significativo: l’insegnante deve far notare agli studenti che ciò che il software geometrico visualizza non è una dimostrazione.

In altre parole ci si deve rendere conto che il software geometrico ha permesso solo di formulare una congettura, ma non di dimostrare un teorema. Perché la congettura si trasformi in un teorema è necessario fornirne una dimostrazione.

Nelle fasi successive viene fornita la dimostrazione.

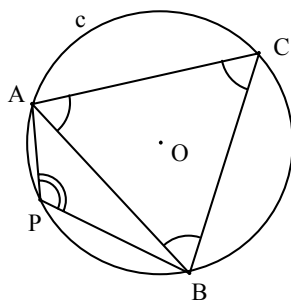


Figura 1

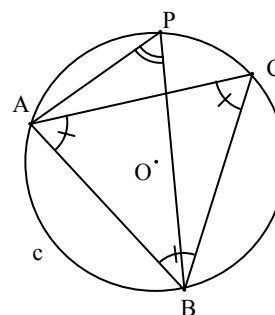


Figura 2

### Seconda fase

Si affronta l'analisi del seguente problema:

Consegna 2. Imporre al punto P di appartenere, anziché a tutta la circonferenza  $c$ , all'arco della circonferenza  $c$  delimitato da A e B non contenente il punto C.

Cosa si può dire sugli angoli formati dalla diagonale AB del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?

Disegnare la diagonale PC del quadrilatero APBC.

Cosa si può dire sugli angoli formati dalla diagonale PC del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?

Gli studenti osservano che la diagonale AB forma con i lati del quadrilatero APBC gli angoli BAC e ABC, i quali misurano  $60^\circ$  (sono angoli di un triangolo equilatero), e gli angoli BAP e ABP, i quali hanno misura variabile al variare del punto P (gli studenti misurano gli angoli avvalendosi del software). Misurano quindi gli angoli APC e CPB, facendo muovere il punto P sull'arco AB considerato. Notano che tali angoli misurano sempre  $60^\circ$  e formulano la seguente congettura:

Sia dato un triangolo equilatero ABC e la sua circonferenza circoscritta  $c$ . Sia P un punto dell'arco di circonferenza AB non contenente C. La diagonale PC del quadrilatero APBC è bisettrice dell'angolo APB.

Viene fornita la dimostrazione di tale congettura.

Gli studenti osservano che, invece, la stessa diagonale PC non è bisettrice dell'angolo ACB. Infatti la misura dell'angolo ACP cresce da  $0^\circ$  a  $60^\circ$  quando il punto P si muove da A a B. La misura dell'angolo BCP invece decresce contemporaneamente da  $60^\circ$  a  $0^\circ$  (Figura 3).

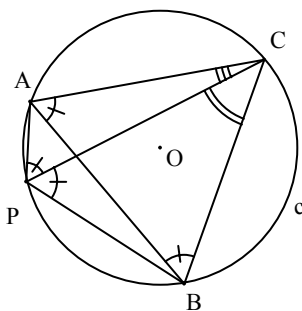


Figura 3

Gli studenti notano, infine, che gli angoli ACP e BCP sono uguali se e solo se il punto P coincide con il punto D simmetrico di C rispetto ad O.

Dimostrano quanto hanno osservato in precedenza.

Si è così dimostrato il seguente teorema:

Sia dato un triangolo equilatero  $ABC$  e la sua circonferenza circoscritta  $c$ . Sia  $P$  un punto dell'arco di circonferenza  $AB$  non contenente  $C$ . Allora la diagonale  $CP$  del quadrilatero  $APBC$  è bisettrice dell'angolo  $APB$ , qualunque sia il punto sull'arco considerato, mentre è bisettrice dell'angolo  $ACB$  se e solo se il punto  $P$  coincide con il punto  $D$ , simmetrico di  $C$  rispetto ad  $O$ .

### Terza fase

Gli studenti passano quindi a esaminare il caso particolare in cui  $PA$  è uguale a  $PB$ , quindi  $P \equiv D$ .

Consegna 3. Nella Figura 3 sostituire il punto  $P$  con il punto  $D$  simmetrico di  $C$  rispetto a  $O$ .

Disegnare il quadrilatero  $ADBC$  e le sue diagonali. Disegnare i segmenti  $AO$  e  $OB$ .

Cosa si può dire sui triangoli  $AOD$  e  $BOD$ ?

Cosa si può dire sulle distanze del punto  $D$  dai vertici del triangolo  $ABC$ ?

Dalla misure risulta che i triangoli  $AOD$  e  $BOD$  sono equilateri.

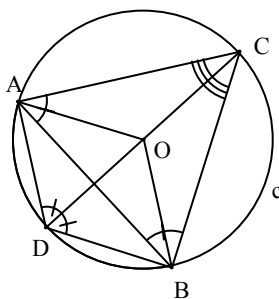


Figura 4

Si ha quindi il seguente teorema:

Dato un triangolo equilatero  $ABC$ , sia  $c$  la circonferenza ad esso circoscritta,  $O$  il suo centro e  $D$  il punto simmetrico di  $C$  rispetto a  $O$ . Allora i triangoli  $AOD$  e  $BOD$  sono equilateri.

Dal teorema precedente segue immediatamente che i triangoli  $ABD$  e  $ACO$  sono uguali, quindi

$$DC = DO + OC = DA + DB.$$

Si è così dimostrato che:

Dato un triangolo equilatero  $ABC$ , sia  $c$  la circonferenza circoscritta ad esso,  $O$  il suo centro e  $D$  il punto di  $c$  simmetrico di  $C$  rispetto ad  $O$ . Si ha allora:  $DC = DA + DB$ .

### Quarta fase

Si propone agli studenti di tentare una generalizzazione del precedente teorema ponendo il seguente problema:

Consegna 4. Il precedente teorema può essere generalizzato al caso in cui il punto  $D$  sia sostituito da un qualsiasi punto appartenente all'arco della circonferenza  $c$ , delimitato dai punti  $A$  e  $B$  e non passante per il punto  $C$ ?

Non ci sono a prima vista elementi per confutare o dimostrare l'affermazione del problema.

Gli studenti, aiutandosi con il software, possono misurare le distanze del punto  $P$  da  $A$ , da  $B$  e da  $C$ , al variare del punto  $P$  sull'arco.

Si può, per esempio, ottenere la Figura 5.

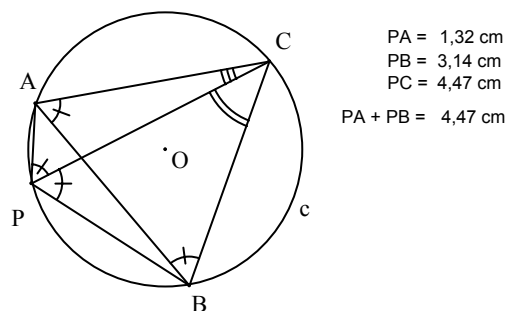


Figura 5

Sommando le misure di PA e di PB e confrontando il risultato con la misura di PC si ottiene lo stesso valore. È facile vedere che tale relazione continua a valere al variare del punto P sull'arco considerato.

È bene sottolineare ancora una volta che tutto ciò che si è osservato con il software non è sufficiente a enunciare una proprietà generale senza averne dato una dimostrazione.

In questo caso la dimostrazione non è assolutamente facile.

Consegna 5. Dimostrare che per qualunque punto P sull'arco AB considerato si ha  $PC = PA + PB$ . (Viene dato il seguente suggerimento: considerare il triangolo equilatero APP' con P' interno alla circonferenza).

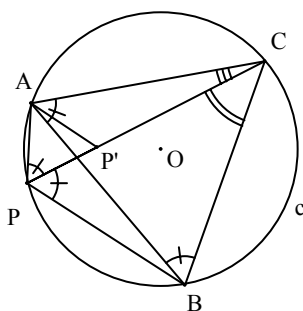


Figura 6

Nonostante il suggerimento, non sempre gli studenti riescono a rispondere alla consegna data. L'insegnante può allora fornire, ad esempio, la seguente dimostrazione:

Per costruzione si ha  $AP = PP'$ . Se si riesce a dimostrare che si ha  $PB = P'C$ , si deduce:

$$PC = PP' + P'C = PA + PB,$$

che è quel che si vuole dimostrare.

In effetti, dalla Figura 6 appare che i triangoli APB e AP'C sono uguali.

La dimostrazione di ciò è semplice: essi hanno uguali due lati ( $AP = AP'$  e  $AB = AC$ ) e i tre angoli ( $\angle ABP = \angle ACP'$  perché insistono sullo stesso arco e  $\angle APB = \angle AP'C$  perché entrambi misurano  $120^\circ$  l'angolo AP'C è supplementare dell'angolo AP'P).

L'appartenenza di P' al segmento PC, più volte assunta, è giustificata dal fatto che gli angoli APC e APP' misurano entrambi  $60^\circ$ .

In tal modo si è dimostrato il seguente teorema:

Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza ad esso circoscritta e sia P un punto appartenente all'arco di estremi A e B non contenente C, allora:

$$PC = PA + PB .$$

#### Quinta fase

A questo punto si può affrontare il seguente problema sulle circonferenze di Fermat.

Consegna 6. Dato un triangolo  $ABC$ , costruire sul lato  $AB$  il triangolo equilatero  $ABR$  esterno al triangolo e la circonferenza  $c_1$  ad esso circoscritta; ripetere la stessa operazione sul lato  $BC$  e sul lato  $AC$ . Si ottengono i triangoli equilateri  $BCP$  e  $ACQ$  e le circonferenze  $c_2$  e  $c_3$  ad essi circoscritte. Quali proprietà suggerisce la figura? Le circonferenze  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  sono dette circonferenze di Fermat.

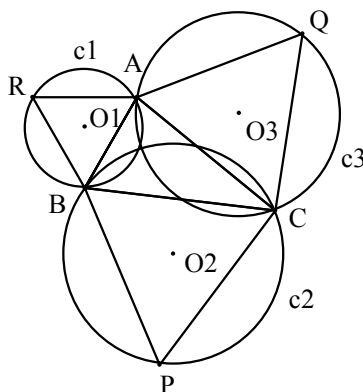


Figura 7

Utilizzando gli strumenti messi a disposizione dal software di geometria, gli studenti osservano che le tre circonferenze sembrano intersecarsi in un punto. Si enuncia pertanto la congettura:

Le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto (Figura 7).

Naturalmente tale affermazione va dimostrata.

Può anche accadere che l'evidenza della figura spinga gli studenti a dare per scontato che le tre circonferenze si intersechino in un punto e a non formulare pertanto la congettura precedente.

In tal caso è l'insegnante a proporre di dimostrare o confutare la congettura prima enunciata.

Una possibile dimostrazione consiste nel considerare le circonferenze  $c_1$  e  $c_2$ . Esse si intersecano nel punto  $B$  e in un punto che chiamiamo  $F$  (Figura 8). Si vuole dimostrare che il punto  $F$  appartiene anche alla circonferenza  $c_3$  circoscritta al triangolo equilatero  $ACQ$ . In altre parole si vuole dimostrare che il quadrilatero  $FCQA$  è inscrivibile in una circonferenza.

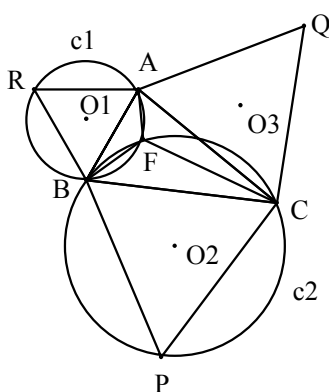


Figura 8

Si nota che in questo caso i punti  $F$  e  $Q$  si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per  $A$  e  $C$ . Pertanto si deve dimostrare che l'angolo  $AFC$  misura  $120^\circ$ . In effetti, l'angolo  $AFC$  misura  $120^\circ$  perché gli angoli  $AFB$  e  $BFC$ , per come sono stati costruiti, misurano  $120^\circ$ .

A prima vista appare che la congettura sia stata dimostrata: le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto. Questa è anche la prima risposta degli studenti. Ma se si riguarda con attenzione la dimostrazione effettuata, si comprende che essa si basa sul fatto che gli angoli  $AFB$  e

BFC misurino  $120^\circ$  e che i punti F e Q si trovino in semipiani distinti rispetto alla retta passante per A e C. Ciò sicuramente avviene quando F è interno al triangolo ABC. Si è pertanto dimostrato il seguente teorema:

Se il punto F, punto di intersezione di  $c_1$  e  $c_2$  distinto da B, è interno al triangolo ABC, allora esso appartiene anche alla circonferenza  $c_3$ . Le tre circonferenze di Fermat si intersecano quindi in uno stesso punto.

### Possibili sviluppi

1. Individuare e studiare il caso in cui il punto di Fermat è esterno al triangolo (Figura 9).

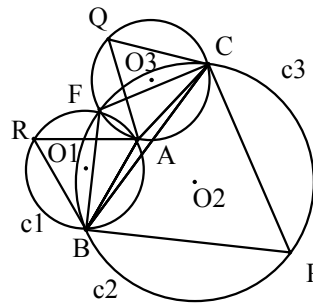


Figura 9

2. (Teorema di Napoleone) Dato un triangolo ABC, costruire sui lati ed esternamente ad esso i triangoli equilateri di lato AB, BC e CA. Osservare le proprietà del triangolo individuato da  $O_1$ ,  $O_2$  e  $O_3$ , centri delle circonferenze di Fermat.
3. Dato un triangolo con gli angoli minori di  $120^\circ$ , un punto P interno al triangolo, trovare la posizione del punto P che rende minima la somma delle sue distanze dai vertici.

## Alla ricerca del rettangolo più bello

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine e descrivere le figure con la terminologia specifica.  Individuare proprietà invarianti per similitudini.  Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini.	Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze.  Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia.	Spazio e figure  Numeri e algoritmi  Argomentare, congetturare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Musica Scienze Disegno

### Contesto

Trasformazioni geometriche nel mondo reale.

Questa attività viene proposta nel secondo biennio, all'inizio della classe terza. Il contesto è quello delle trasformazioni geometriche nel mondo reale. Gli strumenti di cui avvalersi sono, oltre ad un software di geometria, immagini e fotografie di edifici, di costruzioni antiche e moderne, ...Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle trasformazioni isometriche del piano, delle similitudini e delle equazioni di secondo grado. L'obiettivo principale dell'attività è quello di riconoscere in contesti reali - arte, architettura, tecnica - figure simili e di individuare negli strumenti della tecnica (computer, software, stampanti, fotocopiatrici, macchine fotografiche,...) le applicazioni delle similitudini.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Viene proposta un'analisi preliminare dei formati dei fogli di quaderni, libri, fogli da disegno, fogli di formato A4 (il "formato A4" ha le dimensioni di 210 mm x 297 mm.), ... Si calcola il rapporto tra i due lati delle forme rettangolari considerate. La stessa attività viene proposta studiando le facciate di alcuni monumenti ed edifici storici, come per esempio, il frontone del *Partenone* di Atene (Figura 1), l'*Arco di Costantino* a Roma, ....

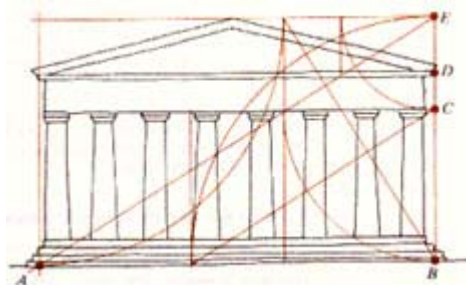


Figura 1

Dopo questa analisi si focalizza l'attenzione degli studenti sul quadrato, sul foglio A4 e sul rettangolo aureo (il rettangolo aureo ha uno dei lati uguale alla sezione aurea dell'altro).

Inizialmente si consegna agli studenti una scheda dove sono disegnati una decina di rettangoli di forma diversa, tra i quali almeno un "rettangolo A4", un quadrato e un rettangolo aureo.

Si chiede di individuare, tra i rettangoli disegnati nella scheda, quello ritenuto di aspetto più gradevole e si discutono in classe le risposte ottenute, che sono di tipo diverso, supportate da motivazioni talvolta oggettive, talvolta di tipo personale.

### Seconda fase

Con la grande diffusione delle stampanti e delle fotocopiatrici, siamo abituati al foglio A4; ma qual è la storia del foglio A4 e, soprattutto, perché si usa un tale formato di carta piuttosto di altri formati?

Un foglio A4 è un rettangolo costruito in modo che piegandolo a metà rispetto al lato maggiore si ottiene un altro rettangolo simile a quello di partenza che viene indicato come foglio A5. Se si raddoppia un foglio A4, affiancandone due per il lato più lungo, si ottiene il foglio A3 simile al foglio A4 (Figura 2).

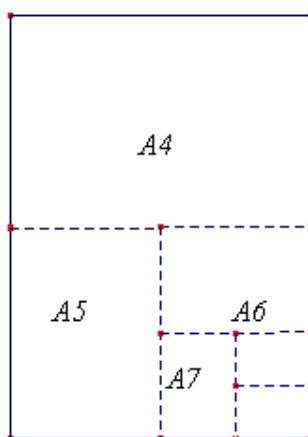


Figura 2

Chiamato  $a$  il lato maggiore e  $x$  il lato minore di un rettangolo, si vuole determinare il rapporto tra  $a$  e  $x$  in modo che piegando il foglio secondo la linea tratteggiata di Figura 3 si ottenga un rettangolo simile a quello dato. Ciò si traduce nella seguente proporzione:

$$a : x = x : \frac{a}{2}$$

Da cui si ottiene:  $\frac{a}{x} = \sqrt{2}$ .

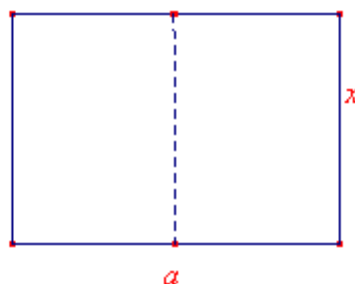


Figura 3

Quindi in un foglio A4 il rapporto tra i lati dovrebbe essere  $\sqrt{2}$ .

Eseguendo il rapporto tra le lunghezze dei lati (297 mm x 210 mm) si ottiene: 1,4142857... che è un'approssimazione di  $\sqrt{2}$  con quattro cifre decimali esatte,  $\sqrt{2} \approx 1,414213562373...$

In molte fotocopiatrici il massimo dell'ingrandimento lineare ottenibile è di 1,41%. Si chiede agli studenti di provare a motivare questo fatto.

Il foglio A3 ha per dimensioni 297 mm e 420 mm.

### Terza fase

*La sezione aurea e il rettangolo aureo: un'applicazione della similitudine.*

Per introdurre la sezione aurea, in una classe terza di scuola secondaria superiore, si può partire da un rettangolo e ritagliare da esso un quadrato (Figura 4). Se il rettangolo "rimasto" è simile a quello di partenza allora quello iniziale è detto "aureo". Per ragioni misteriose viene considerato il rettangolo più "bello" anche se attualmente siamo più abituati al formato A4 piuttosto che al rettangolo aureo.

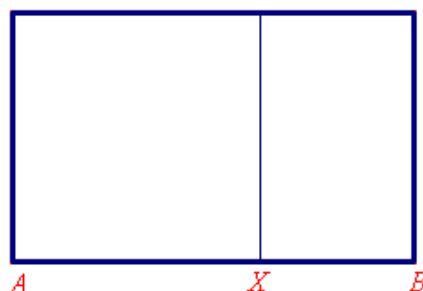


Figura 4

Il rapporto tra il lato maggiore e il lato minore di questo rettangolo si dice "rapporto aureo" (in inglese, "golden ratio"; in francese "nombre d'or"). Il *rapporto aureo* di solito è indicato con la lettera greca *tau*  $\tau$ . Il matematico Luca Pacioli (circa 1445-1509) ha chiamato tale rapporto *divina proporzione* e, ispirato da Piero della Francesca (circa 1416 - 1492), ha scritto su di esso un trattato dal titolo *De divina proporzione* (1509).

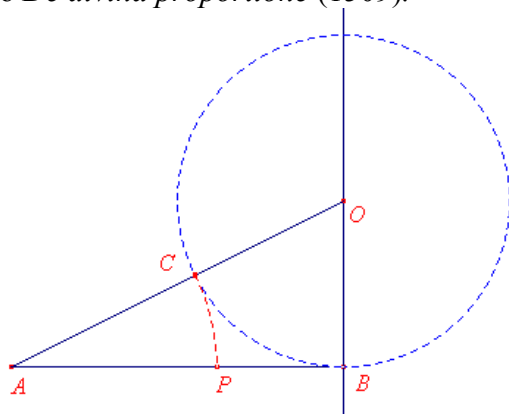


Figura 5

Nella figura 5 è indicata la costruzione della sezione aurea di un segmento AB:

- si traccia la perpendicolare ad AB per B;
- si prende il punto O in modo che OB sia la metà di AB;
- si traccia la circonferenza di centro O e raggio OB;
- si congiunge O con A;
- si interseca OA con la circonferenza e si trova il punto C;
- si riporta OC su AB, trovando il punto P.

La sezione aurea di AB è AP.

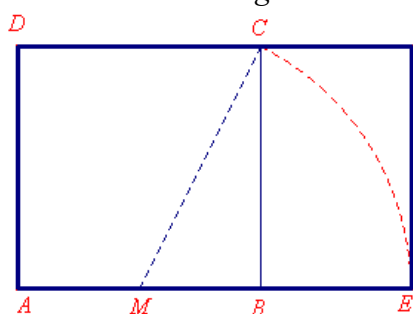


Figura 6

Nella figura 6 è rappresentata la costruzione di un rettangolo aureo a partire da un quadrato iniziale di lato AB (costruzione detta di Leon Battista Alberti, 1404-1472).

Considerato il quadrato di lato AB, si disegna il punto medio M di AB. Con apertura del compasso AB, si riporta a partire da M il segmento MC sul prolungamento di AB, ottenendo il punto E.

AB è la sezione aurea di AE.

La costruzione della figura 5 si trova negli *Elementi* di Euclide e rappresenta la soluzione geometrica della equazione

$$x^2 = a(a - x)$$

ottenuta dalla proporzione:

$$a : x = x : (a - x),$$

la quale esprime la similitudine tra il rettangolo di partenza (di lato maggiore  $a$ ) e quello che rimane togliendo un quadrato (di lato  $x$ ).

Se poniamo  $a = 1$ , si ottiene l'equazione quadratica:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

la cui radice positiva è il numero cercato

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Un rettangolo in cui il lato minore sia la sezione aurea dell'altro lato si chiama "rettangolo aureo". Il rapporto  $a/x$  (Figura 4) del rettangolo aureo è il numero:

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,61803398\dots$$

Quindi  $x = \frac{1}{\tau}$ .

Dall'equazione  $x^2 + x - 1 = 0$ , si ottiene:  $x^2 + x = 1$ , ovvero:  $x + 1 = \frac{1}{x}$ , che fornisce la notevole

proprietà:  $1 + \frac{1}{\tau} = \tau$  (\*).

Moltiplicando per  $\tau$ , si ottiene:  $\tau + 1 = \tau^2$  e ancora

$$\tau^2 + \tau = \tau^3$$

$$\tau^3 + \tau^2 = \tau^4$$

.....

cioè ogni potenza ad esponente intero di  $\tau$  è somma delle due potenze precedenti. Qui osserviamo una proprietà che "assomiglia" a quella che definisce la celebre successione dei numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, .....

Con sorpresa si scopre che in realtà vi è un legame più stretto con la successione dei numeri di Fibonacci. Si può anche fare osservare, mediante una esplorazione numerica, che il rapporto tra due numeri di Fibonacci successivi, al crescere di  $n$ , tende al rapporto aureo, ovvero:  $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \tau$ , dove

$F_n$  è l'ennesimo numero di Fibonacci.

La relazione (\*) è rappresentata nella figura del rettangolo, dove l'altezza del rettangolo aureo è unitaria, la base  $AB$  misura  $\tau$  e il segmento  $XB$  misura  $1/\tau$ . Questa relazione ci dice che se si toglie un quadrato da un rettangolo aureo, il rettangolo rimasto è ancora aureo. Continuando si può ottenere la Figura 7 e la spirale "quasi aurea" della Figura 8 (formata da archi di circonferenza).

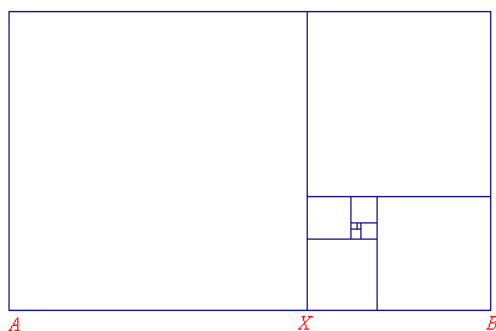


Figura 7

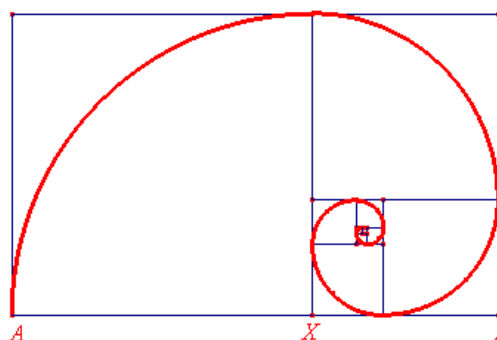


Figura 8

#### Quarta fase

Si dimostra che il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta (Figura 9 e Figura 10). Se  $r$  è la misura del raggio della circonferenza, allora la misura del lato del decagono regolare inscritto è:

$$l_{10} = r \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

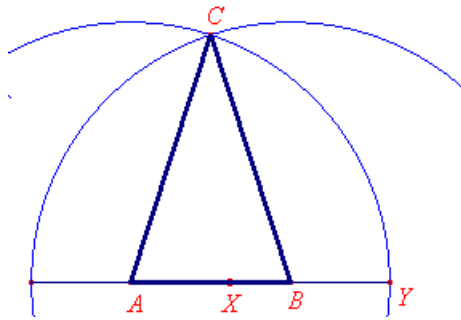


Figura 9

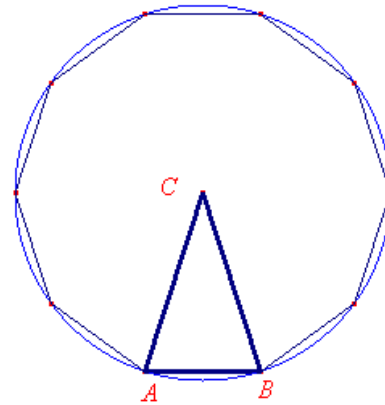


Figura 10

Determinato il lato del decagono regolare, si può costruire il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza.

Il lato del pentagono regolare è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza circoscritta al pentagono e la sua sezione aurea (lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza).

Si possono proporre le seguenti costruzioni:

1. Data una circonferenza costruire il pentagono regolare inscritto nella circonferenza. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare il seguente teorema: il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza e la sezione aurea del raggio.
2. Dato il segmento AB costruire il pentagono regolare di lato AB. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare la seguente proprietà: il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea della sua diagonale.

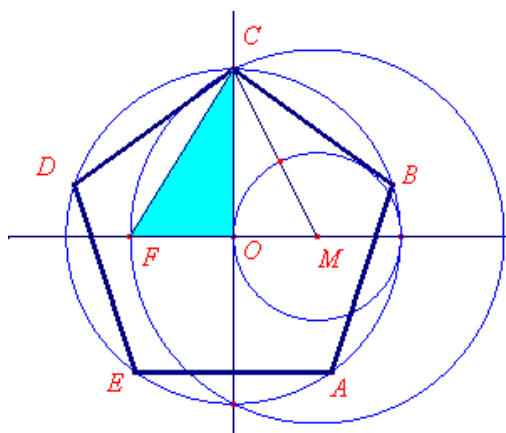


Figura 11

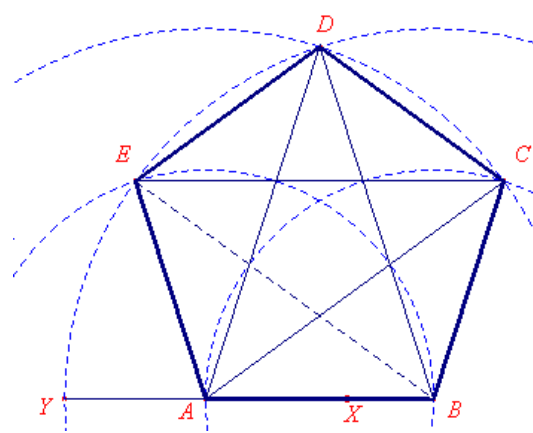


Figura 12

**Possibili sviluppi**

1. Il pantografo.

Si illustra l'azione del pantografo (sarebbe bene portarne uno in classe).

Si considerano due semirette di origine il punto O. Si considera un poligono e un punto P su di esso. Il punto P descrive il contorno della figura da ingrandire; nel punto P' si mette una matita. Si ottiene un ingrandimento tramite una omotetia.

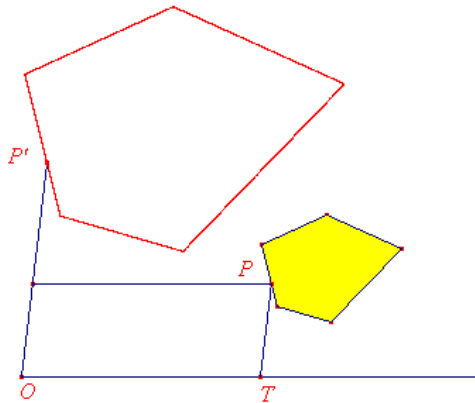


Figura 13

2. Il triangolo dei punti medi.

Si consideri il triangolo avente per vertici i punti medi MNQ dei lati del triangolo ABC. Tale triangolo ha lo stesso baricentro G del triangolo ABC. Il baricentro G è il centro di una omotetia. Trovare il rapporto di omotetia.

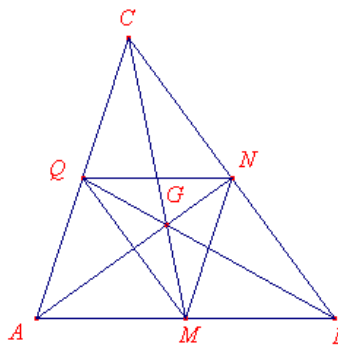


Figura 14

3. La media geometrica.

Dati due segmenti di misura  $a$  e  $b$  si vuole costruire un segmento di lunghezza  $x$  in modo che il quadrato costruito su esso sia equivalente al rettangolo di lati i segmenti dati: si ha:  $x = \sqrt{ab}$ . Il modo più facile di eseguire la costruzione è di utilizzare il secondo teorema di Euclide, come nella figura indicata di seguito.

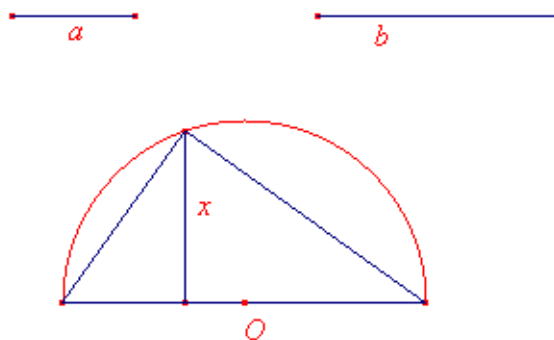


Figura 15

## Tutte le parabole sono simili?

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare proprietà invarianti per similitudini.  Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini.  Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici.  Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze.  Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia.  Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	<u>Spazio e figure</u>  Numeri e algoritmi  Relazioni e funzioni  Argomentare, congetturare, dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Coniche e trasformazioni geometriche.

L'attività viene proposta per il 2° biennio, all'inizio della quarta classe. Strumento privilegiato per svolgere il lavoro previsto è un software di geometria che permette facilmente di costruire e visualizzare le coniche, in particolare le parabole. Il contesto è quello delle coniche e delle trasformazioni geometriche.

Prerequisiti necessari sono la conoscenza delle isometrie, delle similitudini, del piano cartesiano e delle equazioni delle coniche in opportuni sistemi di riferimento.

Si è quindi in un contesto matematico e si propone un'attività in cui si evidenzia come l'intuizione, che pure è alla base della scoperta di molti concetti matematici, talvolta può indurre in affermazioni errate.

In questa attività si utilizzano le funzionalità del software per una verifica immediata di una proprietà che inizialmente non è così evidente dal punto di vista intuitivo; successivamente si convalida l'affermazione mediante una verifica analitica.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Viene proposta una scheda preliminare che contiene varie figure: poligoni, circonferenze, figure mistilinee e alcune parabole.

Si chiede agli studenti di individuare se tra quelle proposte esistono figure simili. Gli studenti, probabilmente individueranno dei poligoni simili, ... e diranno che le circonferenze sono tutte simili. L'insegnante proporrà alla discussione il caso delle parabole, che non è affatto evidente.

Nella figura 1 sono rappresentate alcune parabole che hanno lo stesso vertice e lo stesso asse, collocate nello stesso semipiano rispetto alla retta tangente nel vertice. Nella scheda si chiede agli studenti se queste parabole hanno la stessa "apertura" (qui usiamo in modo informale il termine

“apertura”; alla fine dell’attività si dovrebbe invece discutere e mettere in crisi questa concezione intuitiva).

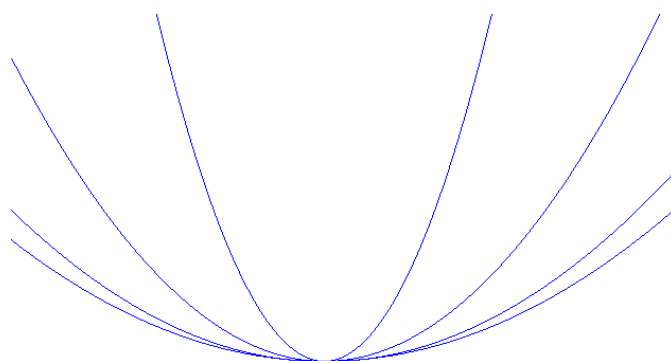


Figura 1

### Seconda fase

Si prende in considerazione il caso in cui le due parabole sono disposte in modo qualunque nel piano. E’ sempre possibile, mediante un’isometria, ricondurle ad avere vertici coincidenti e ad appartenere allo stesso semipiano rispetto alla comune tangente nei vertici. Si discutono le osservazioni degli allievi emerse nella scheda proposta nella fase 1. L’attività prosegue con l’ausilio di un software di geometria: si propone la Figura 2 e si chiede di individuare l’isometria che trasforma le parabole come descritto precedentemente.

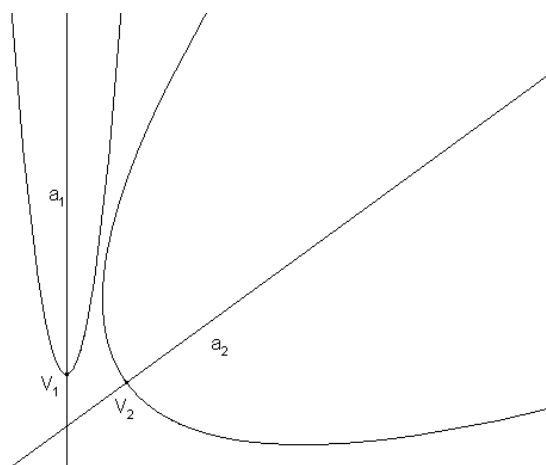


Figura 2

Si chiede ora agli studenti di verificare analiticamente che le due parabole si possono ottenere una dall’altra mediante una omotetia avente come centro l’origine degli assi e rapporto da determinare. Con lo strumento “verifica proprietà”, presente nel software di geometria, si “scopre” che il segmento  $P_1Q_1$  è parallelo a  $P_2Q_2$ , per ogni coppia di rette passanti per il vertice  $O$  (Figura 3).

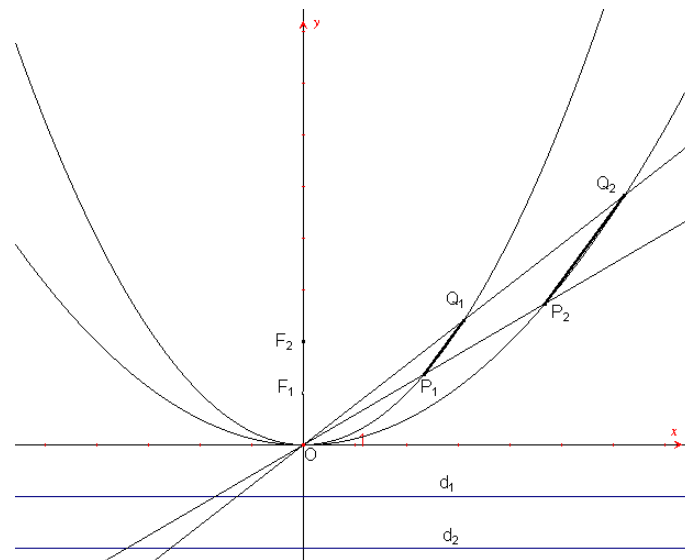
Introducendo un sistema di assi cartesiani di origine coincidente con il vertice e asse delle ordinate coincidente con l’asse delle parabole, considerata una generica retta passante per il punto  $O$ , questa interseca le parabole nei punti  $P_1$  e  $P_2$ . Si verifica che il rapporto  $\frac{OP_2}{OP_1}$  è costante e non dipende

dalla retta scelta. Questo dimostra che due generiche parabole sono tra loro simili.

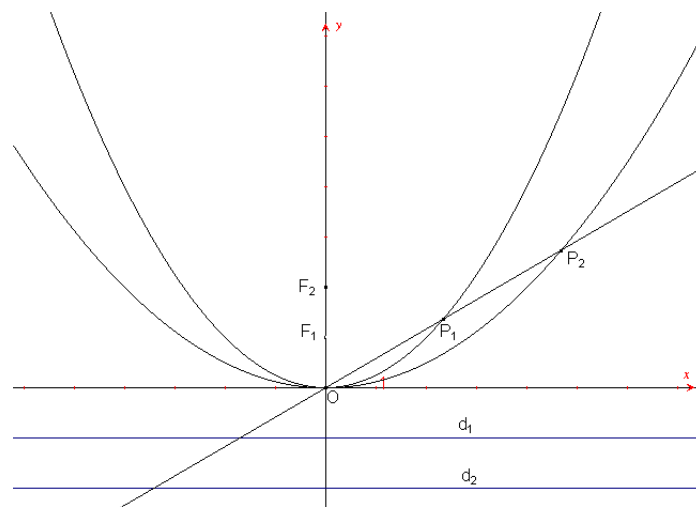
Il calcolo può essere eseguito usando un programma di manipolazione simbolica. Chiamate  $y = a_1x^2$  e  $y = a_2x^2$  le equazioni delle due parabole, intersecando con una generica retta  $y = mx$ , si ottiene:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a_1 x^2 \end{cases}$$

che fornisce i punti  $O$  e  $P_1$ , con  $P_1\left(\frac{m}{a_1}, \frac{m^2}{a_1}\right)$ .



*Figura 3*



*Figura 4*

Analogamente, intersecando la seconda parabola con la stessa retta si ottiene:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a_2 x^2 \end{cases}$$

che fornisce i punti  $O$  e  $P_2$ , con  $P_2\left(\frac{m}{a_2}, \frac{m^2}{a_2}\right)$ .

Si arriva, dopo alcuni calcoli, alla relazione:

$$\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Quindi le due parabole sono omotetiche e il rapporto di omotetia vale  $\frac{a_1}{a_2}$ .

Il calcolo tuttavia contrasta con l'osservazione della Figura 1. Per ottenere una figura che sia "convincente" anche dal punto di vista intuitivo occorre prendere in considerazione la Figura 5, nella quale sono disegnate le due parabole, i fuochi e per ciascuna parabola il *lato retto*, cioè la corda della parabola ottenuta intersecando la parabola con la retta perpendicolare all'asse e passante per il fuoco. Nella Figura 5, il lato retto della prima parabola è  $A_1B_1$  e quello della seconda parabola è  $A_2B_2$ . I due triangoli  $OA_1B_1$  e  $OA_2B_2$  sono omotetici.

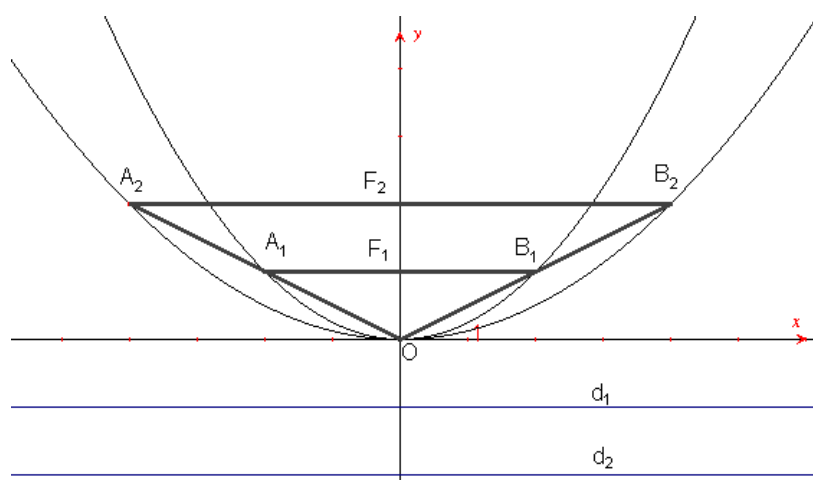


Figura 5

### Possibili sviluppi

Si analizza rispetto alla similitudine il caso dell'ellisse e dell'iperbole. Ci si può soffermare, in particolare, sulle iperboli equilatera e scoprire che anche queste sono tutte simili tra loro (Figura 6).

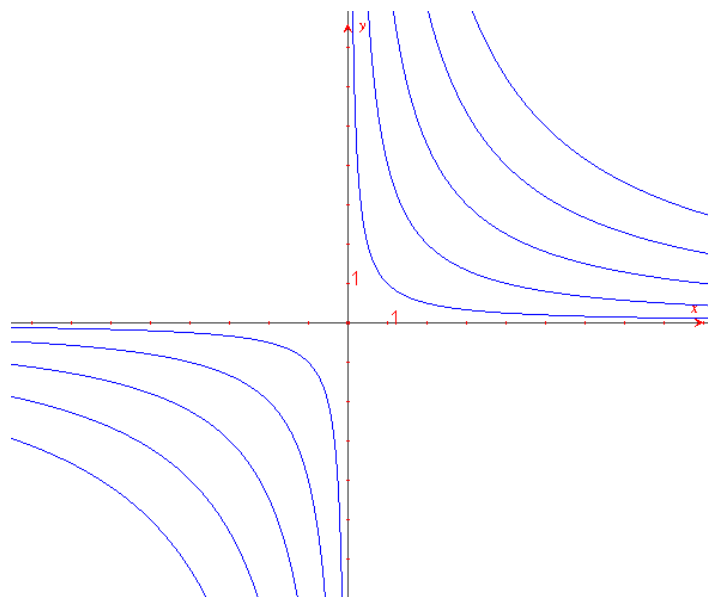
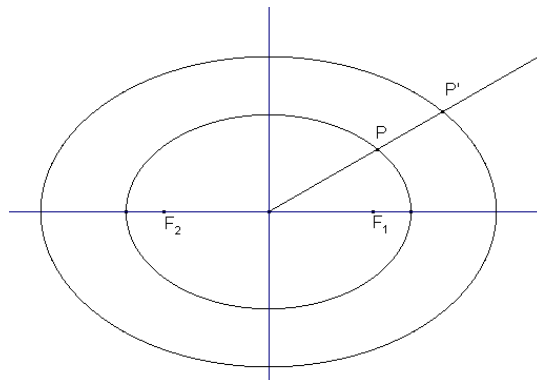


Figura 6

Possiamo infine porre le seguenti domande:

- Quando due ellissi sono simili? (Figura 7)
- Quando due iperboli sono simili? (Figura 6)

La discussione può essere svolta facendo uso di un software di geometria.



*Figura 7*

Per una risposta completa alle domande poste, occorre introdurre la nozione di eccentricità di una conica.

## Le coniche come luoghi: un percorso costruttivo

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici.  Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	<u>Spazio e figure</u>  Relazioni e funzioni  Argomentare, congetturare, dimostrare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Storia Disegno Storia dell'arte Fisica Astronomia

### Contesto

Dalle coniche come sezioni e come luoghi alle loro equazioni.

L'attività è proposta per il primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle coniche e delle trasformazioni geometriche.

Strumento privilegiato per svolgere il lavoro previsto è un software di geometria, che permette facilmente di costruire e visualizzare le coniche.

Prerequisiti necessari sono la conoscenza delle equazioni di primo e di secondo grado, del piano cartesiano e dell'equazione della retta.

Il contesto iniziale è quindi quello matematico, ma nello sviluppo dell'attività è possibile stabilire significativi collegamenti con la Fisica, l'Astronomia e Storia dell'arte.

Con l'aiuto del software di geometria viene proposto un percorso costruttivo che è basato sulla rivalutazione, anche nello studio delle coniche, degli aspetti intuitivi e di geometria sintetica in modo che queste curve non siano viste dagli studenti soltanto come particolari equazioni.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Nello studio della geometria analitica accade spesso che l'aspetto sintetico delle figure venga messo da parte, dando una netta prevalenza al metodo analitico. Questo si verifica in particolare per il tema delle coniche nel quale prevale, già all'inizio, l'aspetto analitico, fino a "nascondere" quasi del tutto le proprietà geometriche di queste curve.

Un software di geometria, per la facilità che permette nel tracciare le coniche, può consentire di recuperare questo aspetto geometrico molto importante che tra l'altro storicamente è stato il primo. Questa impostazione evidenzia meglio le proprietà delle coniche e rivaluta le costruzioni sintetiche, oltre a rendere conto del nome dato a queste curve. In tale contesto gli allievi quindi possono operare meglio una sintesi tra il metodo analitico e quello della geometria sintetica, che costituisce la particolarità della geometria analitica.

Le potenzialità del software geometrico permettono di presentare in modo costruttivo e dinamico, come se si avesse a disposizione una "macchina matematica", tali proprietà. In questa fase, durante l'attività in classe, si possono anche presentare figure animate, nelle quali le coniche sono generate come sezioni di un cono a doppia falda (Figura 1).

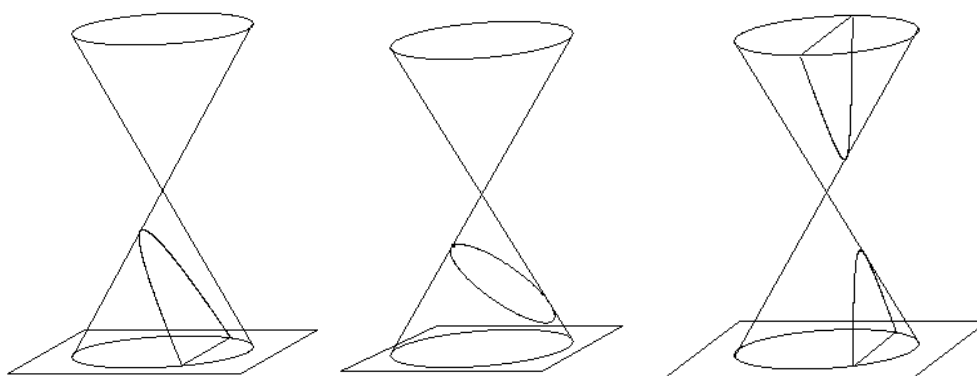


Figura 1

### Seconda fase

In questa fase le coniche vengono definite come luoghi geometrici nel piano. Occorre accennare al fatto che dalla definizione delle coniche come sezioni di un cono non sarebbe difficile, soprattutto usando le attuali tecnologie, ricavare la definizione di conica come luogo geometrico, collegando così due definizioni che di solito vengono date in modo separato in quasi tutti i libri di testo.

Dopo questa parte introduttiva gli studenti, utilizzando le funzionalità presenti nel software geometrico, costruiscono la parabola, l'ellisse (con il caso particolarmente importante, che conviene svolgere per primo, della circonferenza) e l'iperbole come luoghi geometrici. Si analizzano le proprietà delle coniche; in particolare si possono anche presentare quelle collegate ai fuochi e alle direttrici, senza fare però riferimento al concetto di eccentricità (almeno in certi indirizzi di studio). Sulla circonferenza, ad esempio, è possibile presentare alcune attività preliminari prima di arrivare all'equazione della circonferenza, in modo da collegare e integrare gli aspetti di geometria sintetica con quelli di geometria analitica.

Per la parabola, conviene presentare la costruzione a partire dal fuoco e dalla direttrice (Figura 2). Per esercizio si può proporre agli studenti di costruire la parabola a partire dal vertice e dal fuoco, oppure dal vertice e dalla direttrice.

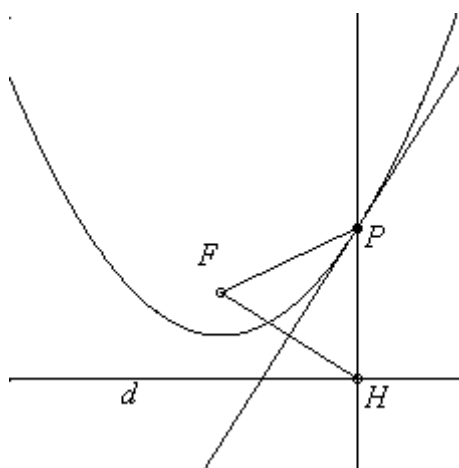


Figura 2

Una prima costruzione dell'ellisse (Figura 3), valida anche per l'iperbole (Figura 4), è la seguente: si disegna una circonferenza di centro un punto  $F_1$  e raggio a piacere ed un punto interno alla circonferenza  $F_2$ . Preso un punto  $A$  sulla circonferenza si traccia la retta  $AF_1$  e l'asse del segmento  $AF_2$ . Il loro punto di intersezione  $P$  appartiene all'ellisse. Si dimostra inoltre che l'asse del segmento  $AF_2$  è tangente all'ellisse.

Analogamente per l'iperbole si disegna una circonferenza di centro un punto  $F_1$  e raggio a piacere

ed un punto esterno alla circonferenza  $F_2$ . Preso un punto  $A$  sulla circonferenza si traccia la retta  $AF_1$  e l'asse del segmento  $AF_2$ . Il loro punto di intersezione  $P$  appartiene all'iperbole (figura 4).

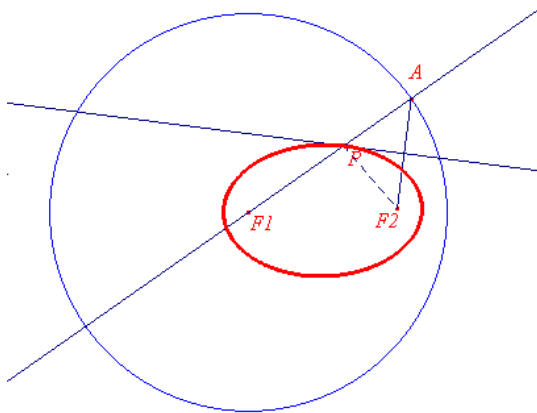


Figura 3

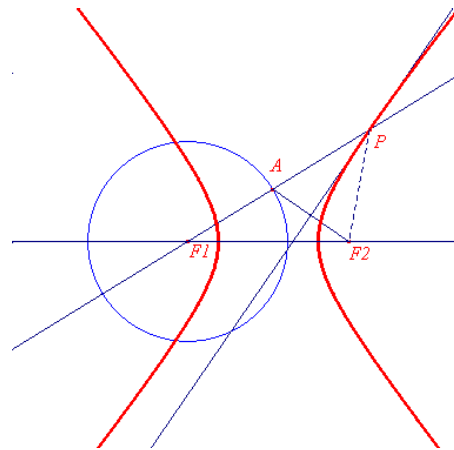


Figura 4

Le costruzioni proposte nelle figure 2, 3 e 4, possono essere riproposte, oltre che con l'uso di un software didattico, anche con macchine matematiche che usano dei fili oppure con la piegatura della carta. Con quest'ultima tecnica, per ottenere una parabola, come involuppo di "pieghe", si parte da un foglio di carta nel quale è disegnata una retta  $d$  e un punto  $P$ . Si piega il foglio, molte volte, in modo da far "sovrapporre" il punto  $P$  alla retta  $d$ . L'involuppo delle "pieghe" sarà allora una parabola. Analogamente si procede per ottenere l'ellisse e l'iperbole: si disegnano su un foglio, in questo caso, una circonferenza  $\gamma$  e un punto  $P$  e si ripete la stessa procedura, "sovrapponendo" più volte, con delle piegature del foglio, il punto  $P$  alla circonferenza  $\gamma$ .

Si può anche proporre un'ulteriore costruzione dell'ellisse ("metodo del giardiniere"): dato il segmento  $AB$  di misura  $k$  si considera un punto  $P$  di  $AB$  e si definiscono i segmenti  $AP$ ,  $PB$ . Si considerano le due circonferenze di centri  $F_1$ ,  $F_2$  e raggi  $AP$  e  $BP$ . I punti di intersezione  $P$  e  $P'$  (due se  $k > \overline{F_1F_2}$ ) appartengono all'ellisse (Figura 5).

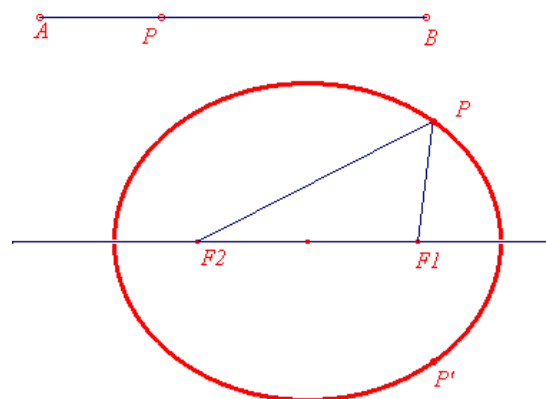


Figura 5

Le costruzioni presentate possono essere facilmente trasformate in procedure che rendono automatico, a partire dagli elementi che la individuano univocamente, la rappresentazione grafica delle coniche.

### Terza fase

In questa fase, utilizzando le definizioni delle coniche date come luoghi geometrici, vengono

determinate, in opportuni sistemi di riferimento, l'equazione della circonferenza e quella della parabola. La ricerca delle equazioni può essere effettuata anche con l'uso del software geometrico in collegamento con altri sistemi di calcolo simbolico (Computer Algebra Systems). Nella determinazione delle equazioni della circonferenza e della parabola conviene ricavare inizialmente le equazioni:  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $y = ax^2$  e poi utilizzare una traslazione per ricavare le equazioni in casi più generali.

In ogni occasione si potranno stabilire collegamenti con problemi presi dal mondo reale che si riconducono alle coniche o all'intersezione di rette e coniche. Importante è anche il collegamento continuo con il tema delle funzioni.

#### Quarta fase

Si presentano problemi e applicazioni riconducibili alla circonferenza e alla parabola e, più in generale, a semplici coniche o intersezioni di rette e coniche.

#### **Ulteriori sviluppi**

Si propongono alcuni esercizi, da svolgere con l'uso di un software di geometria, che servono a rafforzare il concetto di luogo geometrico e a collegarlo con la geometria analitica.

1. Trovare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti dati.
2. Trovare il luogo dei punti medi delle corde di stessa lunghezza di una circonferenza data.
3. Date due rette parallele  $r$  ed  $s$  e un punto  $A$  su  $r$  e un punto  $B$  su  $s$ , trovare il luogo dei punti medi descritti dal punto medio del segmento  $AB$ .
4. Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due date circonferenze concentriche.
5. Dato un triangolo inscritto in una circonferenza, trovare il luogo geometrico descritto dal baricentro  $G$  al variare di un vertice  $C$  sulla circonferenza.
6. Dato un punto  $Q$  e una circonferenza  $\gamma$ , determinare il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti  $QP$  al variare di  $P$  su  $\gamma$ .
7. Si considerano due semirette di origine il punto  $O$ . Si considera una circonferenza di centro  $C$  ed un punto  $P$  su di essa. Da  $P$  si mandano le parallele alle due semirette date (pantografo).

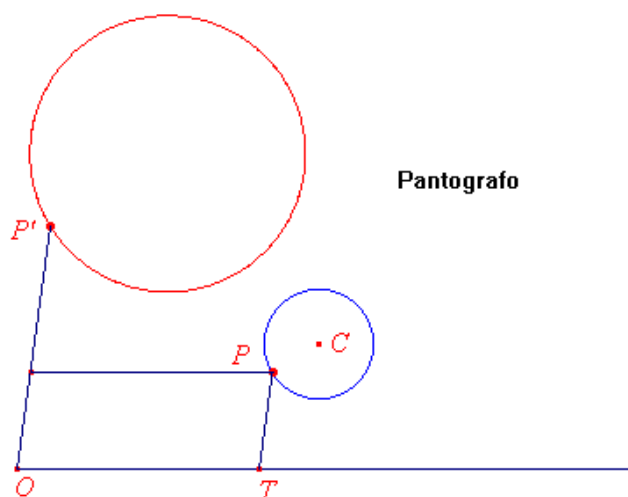


Figura 6

8. Si consideri una circonferenza  $\gamma$ , una retta  $r$  e un punto  $M$  di  $\gamma$ . Costruire le circonferenze tangenti alla retta  $r$  e tangenti nel punto  $M$  alla circonferenza  $\gamma$ . Determinare al variare di  $M$  su  $\gamma$  il luogo descritto dai centri di tali circonferenze. Variare la posizione della retta rispetto alla circonferenza e osservare come variano i luoghi.

9. Siano  $\gamma$  una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$  e  $A$  un punto non appartenente a  $\gamma$ . Sia  $M$  un punto di  $\gamma$ . Si costruisca il quadrato  $AMPN$ , in senso antiorario, di centro  $I$ , e sia  $Q$  il punto di intersezione della retta  $AP$  e dell'arco minore di cerchio di centro  $A$  e di estremi  $M$  e  $N$ . Determinare i luoghi descritti da punti  $N, Q, I, P$ .
10. Si consideri un segmento costante  $AK$  ed un punto  $B$  su di esso; si mandi la perpendicolare ad  $AK$  per il punto  $B$  e si costruisca un rettangolo di base  $AB$  ed altezza  $BC$ , con  $BC = BK$ . Si ottengono così infiniti rettangoli isoperimetrici. Come varia l'area? Costruire una tabella con i valori di  $AB$ , di  $BC$  e dell'area. Che relazione esiste tra  $AB$  e  $BC$  se  $ABCD$  ha area massima?

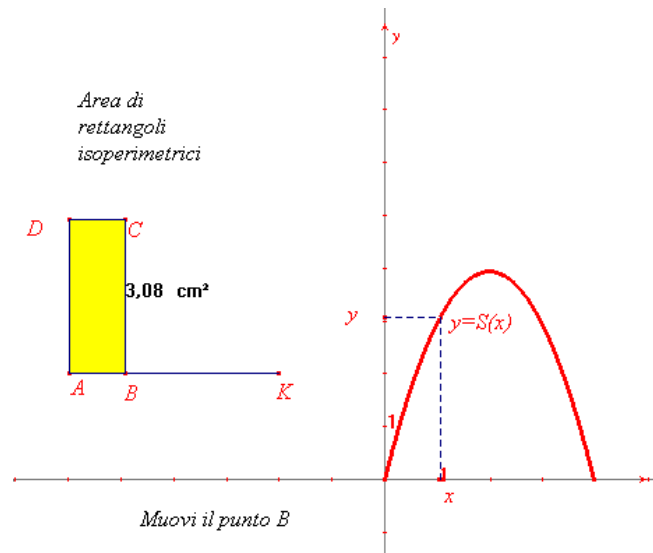


Figura 7

11. Tra tutti i triangoli rettangoli i cui cateti hanno somma 20, determinare quello che ha area massima.
12. Tra i rettangoli che hanno la stessa area, trovare quello di perimetro minimo.
13. Si consideri un triangolo rettangolo  $ABC$  ed un punto  $P$  appartenente ad  $AB$ ; per  $P$  si mandi la parallela al cateto  $BC$ . Studiare l'area del triangolo  $APQ$  in funzione di  $x$  (misura di  $AP$ ).

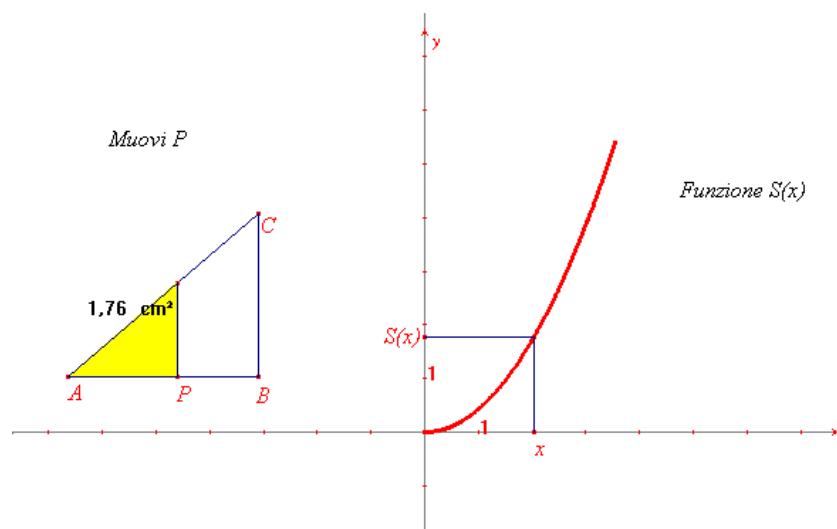


Figura 8

14. Determinare le dimensioni del rettangolo di area massima che si può inscrivere in un triangolo isoscele di base 10 e altezza 4.

15. Si consideri un quadrato di lato dato e si inscriva nel quadrato un altro quadrato di lato  $x$ . Studiare l'area del quadrato inscritto come una funzione di  $x$ .

## Circonferenze e parabole: dal grafico all'equazione

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza.  Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici.  Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	<u>Spazio e figure</u>  Argomentare, congetturare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Fisica

### Contesto

Coniche e loro equazioni.

Questa attività viene proposta per il primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle coniche e delle loro equazioni.

L'attività si avvale dell'uso di un software di geometria e consiste in un percorso di ricerca delle equazioni di circonferenze e parabole in opportuni riferimenti cartesiani.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Attività con un software di geometria.

Consegna 1

Disegnate sullo schermo una circonferenza e misuratene il raggio. Fissate un sistema di riferimento (asse delle ascisse, asse delle ordinate e origine O). Riuscite a trovare un'equazione che lega l'ordinata di un generico punto della vostra circonferenza alla relativa ascissa ?

Obiettivi della consegna

- Capire che si sta affrontando un problema nuovo: dati una funzione o una curva ed un ben determinato sistema di riferimento, si deve trovare l'equazione che soddisfano le ascisse e le ordinate dei punti della curva.
- Capire che ad una curva a volte è associata una funzione numerica che riesce a "descriverla tutta", mentre altre volte sono richieste più funzioni, racchiuse magari in un'unica equazione; in questo modo si introduce il problema della possibilità o meno dell'esplicitazione di una variabile rispetto all'altra.
- Individuare i parametri del problema: nel caso in cui l'asse delle ascisse passi per il centro della circonferenza e l'origine O sia posta nel centro stesso, si ha soltanto il raggio della circonferenza come parametro.
- Capire che l'equazione ottenuta è valida per tutti i punti della circonferenza e non solo per quelli utilizzati per ricavarla ( $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ) e cogliere il ruolo dei termini in  $x^2$  e  $y^2$  come caratterizzanti l'equazione determinata.

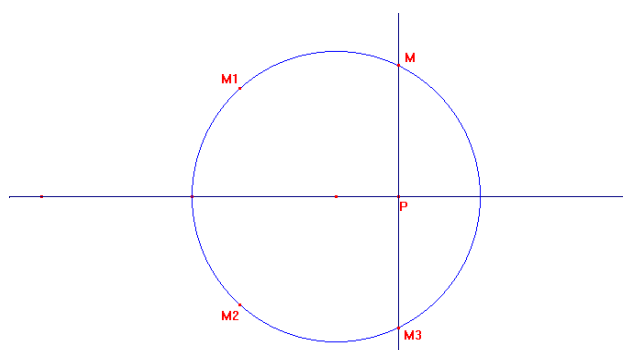


Figura 1

### Osservazioni

In base all'esperienza effettuata in classe si è osservato che alcuni studenti provano a scegliere l'asse delle ascisse non passante per il centro e rischiano di non arrivare a niente; dopo vari tentativi, alla fine, pressoché tutti gli studenti lavorano con l'asse delle ascisse passante per il centro della circonferenza, con l'origine collocata proprio in tale punto, e si servono del teorema di Pitagora per ottenere l'equazione. Quasi tutti gli studenti, inoltre, non partono da un punto M sulla circonferenza, ovvero dalla relativa ordinata per ricavare l'ascissa, ma al contrario partono da quest'ultima, ottenuta con un punto vincolato all'asse  $x$  (come P in Figura 1) o trasportando una misura numerica su tale asse nei due versi possibili a partire da O, al fine di descrivere anche i valori negativi dell'ascissa  $x$ .

I risultati ottenuti dagli studenti vengono discussi in classe. Si può in seguito procedere nell'attività per arrivare all'equazione di una circonferenza in un riferimento generico.

### Consegna 2

Determinare l'equazione di una circonferenza nei seguenti sistemi di riferimento, in cui RS è l'asse delle ascisse ed O è il punto origine.

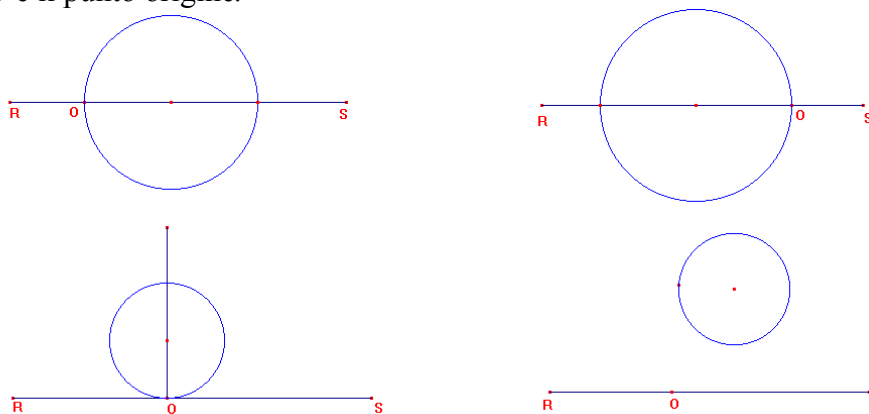


Figura 2

### Obiettivi della consegna

- Capire che l'equazione di una curva dipende dal sistema di riferimento scelto.
- Ottenere l'equazione di una circonferenza di raggio  $r$  in un sistema di riferimento in cui l'ascissa e l'ordinata del centro sono  $x_c$  ed  $y_c$ , partendo da alcuni casi particolari.
- Individuare i parametri del problema.
- Sapersi inventare il testo di un problema relativo alla situazione data. Ad esempio, per la prima situazione si può avere: "Determinare l'equazione di una circonferenza di raggio 3 in un sistema di riferimento in cui l'ascissa del centro è 3 e l'ordinata del centro è 0".
- Capire che l'equazione determinata va bene per tutti i punti della circonferenza e non solo per quelli che si sono utilizzati per determinarla e cogliere il ruolo dei termini  $(x - x_c)^2$  e  $(y - y_c)^2$  come caratterizzanti l'equazione trovata.

### Osservazioni

In generale si è osservato che gli studenti adoperano di nuovo il teorema di Pitagora, anche se si può trovare qualcuno che sfrutta il secondo teorema di Euclide applicato, ad esempio, al triangolo HKM (Figura 3).

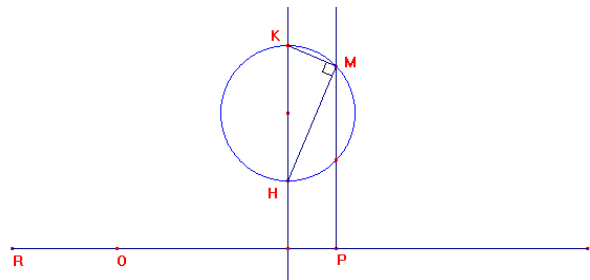


Figura 3

Una volta analizzati e discussi i risultati trovati, deve essere chiaro agli studenti che una circonferenza possiede un'equazione del tipo  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ .

### Consegna 3

Individuate il sistema di riferimento in cui una circonferenza ha equazione  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  e determinate la misura del suo raggio.

#### Obiettivo della consegna

- Arrivare all'equazione generica della circonferenza  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  partendo da quella fino ad ora conosciuta, ovvero  $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ , e ricavare dal confronto tra le due equazioni le formule:  $x_c = \frac{-a}{2}$ ,  $y_c = \frac{-b}{2}$  e  $x_c^2 + y_c^2 - r^2 = c$ , che permettono di ricavare l'ascissa e l'ordinata del centro e la misura del raggio per poter introdurre il sistema di riferimento opportuno e tracciare la curva.

Una volta corretta in classe la precedente consegna, si suggerisce l'applicazione dei concetti finora introdotti sulla circonferenza mediante i seguenti esercizi.

- 1) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e la misura del suo raggio.
- 2) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e le coordinate di un suo punto.
- 3) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e sapendo che passa per l'origine degli assi cartesiani. (Da questo esercizio si prende lo spunto per dimostrare che non è un caso che nelle circonferenze che passano per l'origine degli assi cartesiani il termine noto sia uguale a 0).
- 4) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate di tre suoi punti. (In questo caso è bene rimarcare il fatto che, poiché per tre punti passa una ed una sola circonferenza, l'equazione che si determina è unica, con coefficienti numerici ben determinati e senza parametri).

Per casa si possono assegnare esercizi analoghi a quelli svolti in classe ed in più è opportuno dare il seguente esercizio:

Determinare le equazioni delle infinite circonferenze che passano per due punti dei quali si conoscono le coordinate.

Dal momento che si è già notato nei precedenti esercizi come siano sempre necessarie tre condizioni per determinare l'equazione corrispondente ad una circonferenza univocamente individuata, l'esercizio serve per mettere ancora meglio a fuoco il ruolo dei parametri nell'equazione  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e comprendere quali implicazioni possiede il fatto che tali parametri siano esattamente tre.

### Osservazione

Durante la risoluzione di tutti gli esercizi è importante sottolineare la corrispondenza tra la circonferenza ed i punti che le appartengono e la corrispondenza tra l'equazione della circonferenza, ottenuta dopo aver fissato un certo sistema di riferimento, e le coordinate dei punti che le appartengono. Il punto chiave consiste nel far interiorizzare agli studenti la proprietà secondo cui, se un punto appartiene ad una curva, allora le sue coordinate cartesiane devono verificare l'equazione della curva stessa e viceversa.

### Seconda fase

Consegna 1. Assegnati una retta ed un punto ad essa esterno, costruite 5 punti equidistanti dalla retta e dal punto dati.

#### Osservazioni

L'esperienza ha mostrato che normalmente gli studenti tra i cinque punti richiesti individuano con facilità il punto medio  $V$  del segmento di perpendicolare  $FH$  condotto dal punto assegnato  $F$  alla retta data e quasi tutti riescono a trovare gli altri due punti  $M_1$  e  $M_2$  (Figura 4).

In generale essi non riescono sempre ad iterare il procedimento di costruzione in relazione ad una distanza generica, diversa da  $FH$ . Qualcuno può anche avere l'idea di adoperare due opportune rette bisettrici, sempre nel caso particolare della distanza (dal punto e dalla retta assegnati) uguale a  $FH$  (Figura 5).

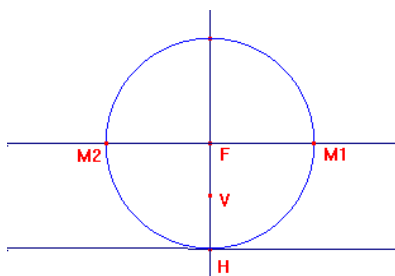


Figura 4

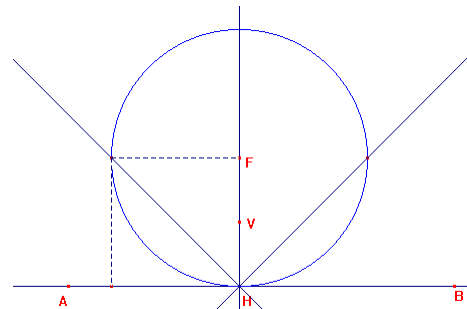


Figura 5

#### Osservazioni

La discussione relativa ai risultati della consegna 1 deve essere svolta con cura ed ha come scopo primario il passaggio alla costruzione di una parabola come luogo geometrico mediante il software di geometria. In più di un caso si è rilevato che, per affrontare la consegna 1, molti studenti partono prendendo una circonferenza di raggio scelto a caso (pertanto variabile) e costruiscono due punti aventi la proprietà di equidistanza voluta intersecando tale circonferenza con la retta parallela alla retta data, posta ad una distanza da essa uguale al raggio della circonferenza tracciata. Dopo aver analizzato in classe con attenzione tale procedimento di costruzione, è opportuno invitare gli studenti ad applicare il comando del software denominato "Traccia" ai due punti determinati. Il software descrive la traccia dei due punti costruiti, in relazione alla variazione del raggio della circonferenza utilizzata. Dopo che è emerso il fatto decisivo che in realtà sono infiniti i punti che soddisfano la proprietà geometrica richiesta nella consegna 1, si può porre il problema di come determinare l'insieme di tali punti con il comando del software denominato "Luogo". Ciò richiede di rappresentare un'opportuna grandezza variabile "vincolata" ad un'altra grandezza variabile, cosicché il software possa interpretare il comando "Luogo" nel senso corretto di tracciare sullo schermo l'insieme delle posizioni che assume un punto variabile in funzione delle posizioni che assume un altro punto variabile, entro un possibile insieme di configurazioni. Tale problema può essere risolto prendendo ad esempio un punto variabile su una semiretta generica ed utilizzando di conseguenza il segmento che lo congiunge con l'origine della semiretta per individuare il raggio (variabile) della circonferenza della costruzione. Si realizza così il luogo generato dai due punti di volta in volta costruiti, al variare sulla semiretta fissata del punto che determina il raggio della

circonferenza necessaria per la costruzione stessa. Alla fine si attribuisce la denominazione di parabola al luogo di punti così ottenuto e si introducono con gli usuali significati i termini fuoco, direttrice, vertice. Riconosciuta poi l'evidente proprietà di simmetria del suddetto luogo, è opportuno dare la definizione di asse di una parabola: si chiama asse della parabola di fuoco  $F$  e direttrice  $d$ , la retta perpendicolare a  $d$  passante per  $F$ .

Si possono ora proporre agli studenti una serie di situazioni da studiare, per consolidare quanto appreso.

### Consegna 2

Determinate le equazioni di una parabola nei seguenti sistemi di riferimento.

- L'asse delle ascisse  $RS$  coincide con la direttrice della parabola e l'origine  $O$  è il punto d'intersezione tra l'asse e la direttrice (Figura 6).

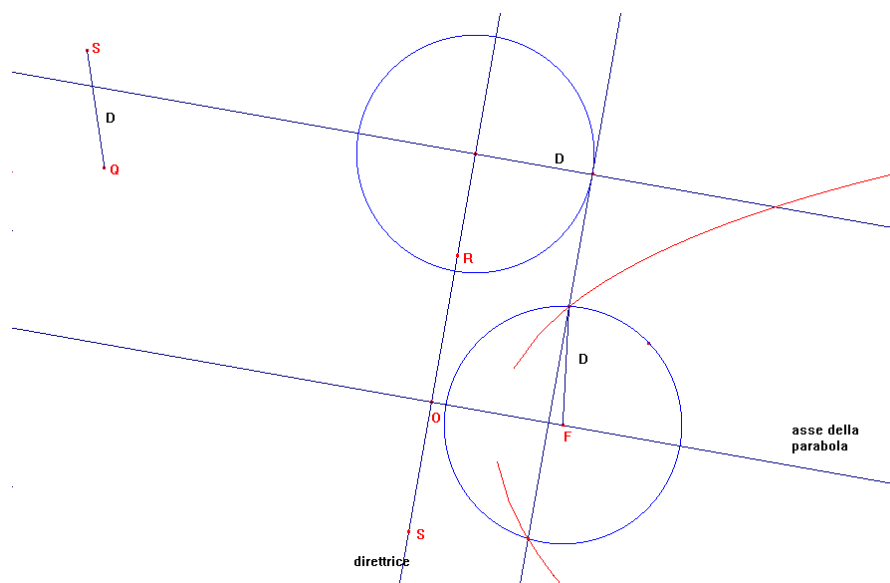


Figura 6

(Risposta:  $x^2 + (y_F - y)^2 = y^2$  ovvero  $y = \frac{1}{2y_F} x^2 + \frac{y_F}{2}$ )

- L'asse delle ascisse  $RS$  coincide con l'asse della parabola e l'origine  $O$  è il punto d'intersezione tra l'asse e la direttrice (Figura 7).

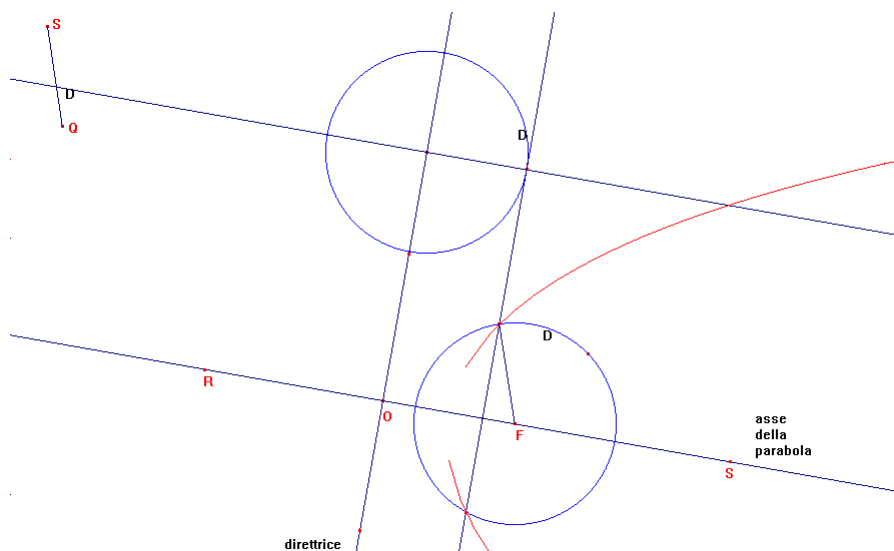


Figura 7

(Risposta:  $y^2 + (x - x_F)^2 = x^2$  ovvero  $x = \frac{1}{2y_F}y^2 + \frac{y_F}{2}$  ma  $y = \pm\sqrt{2xx_F - x_F^2}$  )

- L'asse delle ascisse RS è parallelo alla direttrice e passa per il vertice V della parabola e l'origine O coincide con il vertice V (Figura 8).

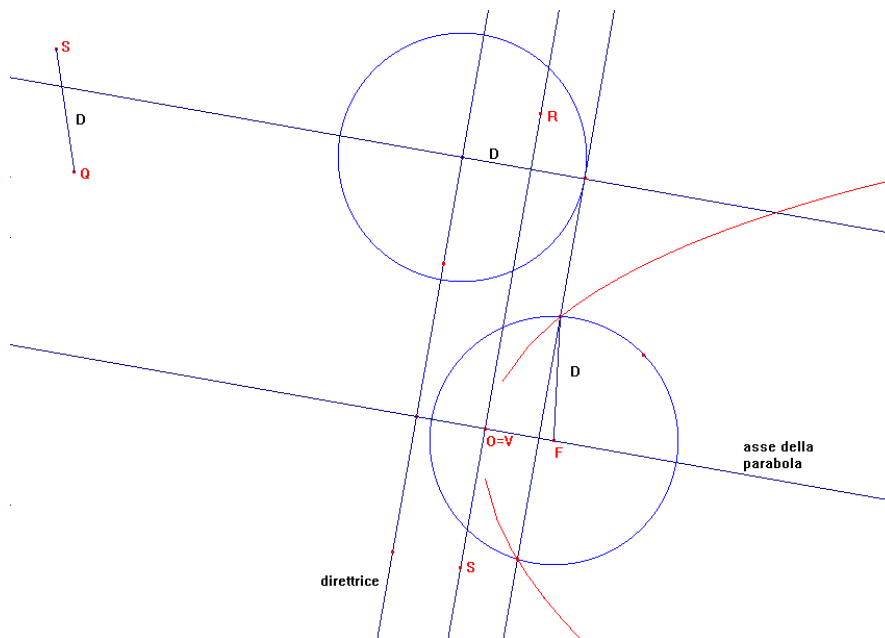


Figura 8

(Risposta  $x^2 + (y - y_F)^2 = (y + y_F)^2$  ovvero  $y = \frac{1}{4y_F}x^2$ )

- L'asse delle ascisse RS è l'asse della parabola e l'origine O coincide con il vertice V (Figura 9).

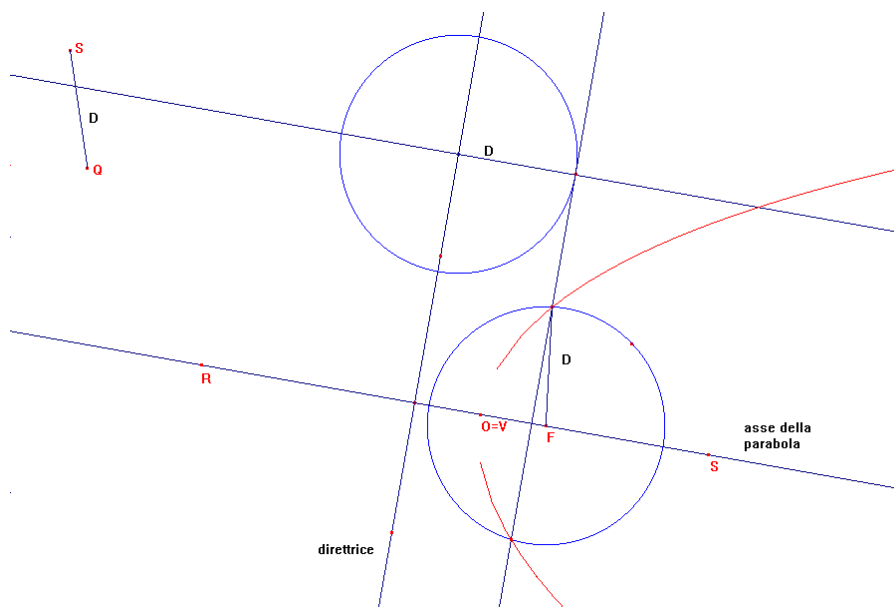


Figura 9

(Risposta:  $y^2 + (x - x_F)^2 = (x + x_F)^2$  ovvero  $x = \frac{1}{4x_F}y^2$  ma  $y = \pm\sqrt{4xx_F^2 - x^2}$  ).

Osservazioni

Durante la discussione sui precedenti esercizi,

- 1) si deve fare il punto sulle diverse equazioni ottenute, mettendo bene in evidenza il fatto che una stessa equazione vale per tutti i punti della parabola in ciascuno dei casi analizzati;
- 2) si deve osservare che nel primo e nel terzo caso, poiché ad ogni punto sull'asse delle ascisse RS corrisponde un unico punto sulla parabola, è possibile individuare un'equazione per la parabola che rappresenti una funzione numerica del tipo  $y = f(x)$ ; vale la pena ribadire che ciò equivale alla proprietà algebrica che si può esplicitare la variabile  $y$  rispetto alla variabile  $x$ ;
- 3) si deve mettere in evidenza che nel secondo e nel quarto caso, poiché ad ogni punto sull'asse delle ascisse RS non corrisponde un unico punto sulla parabola, non è possibile individuare un'equazione per la parabola che rappresenti una funzione numerica del tipo  $y = f(x)$ ; è bene in questo caso ribadire che non si può esplicitare la variabile  $y$  rispetto alla variabile  $x$  in un unico modo; per ciascuna delle due parabole servono due diverse funzioni numeriche del tipo  $y = f(x)$  per descrivere tutti i loro punti.

Si passa quindi alla terza consegna della seconda fase.

### Consegna 3

Individuate il sistema di riferimento in cui una parabola ha equazione  $y = 2x^2$  e descrivetelo; disegnatela la parabola assegnata dopo averne trovato il fuoco e la direttrice.

### Obiettivi

- Riconoscere che un'equazione del tipo  $y = ax^2$  rappresenta una parabola in un sistema di riferimento in cui l'origine  $O$  coincide con il vertice  $V$  della parabola e l'asse delle ascisse  $RS$  è perpendicolare all'asse della parabola in  $V$ .
- Capire che da un'equazione del tipo  $y = ax^2$  si ricava la formula  $y_F = \frac{1}{4a}$  per l'ordinata del fuoco e che quindi si possono individuare nel riferimento scelto le coordinate del fuoco stesso e l'equazione della direttrice della parabola.

A questo punto si propongono alcuni esempi di semplici esercizi da introdurre in un'eventuale prova di verifica scritta sui contenuti dell'intera attività.

### Elementi di prove di verifica

1. Considerate la costruzione, qui sotto riprodotta, di due punti di una parabola in modo da sfruttare la retta parallela alla direttrice, posta a distanza  $D$  da essa, e la circonferenza di centro il fuoco e di raggio  $D$  (Figura 10).

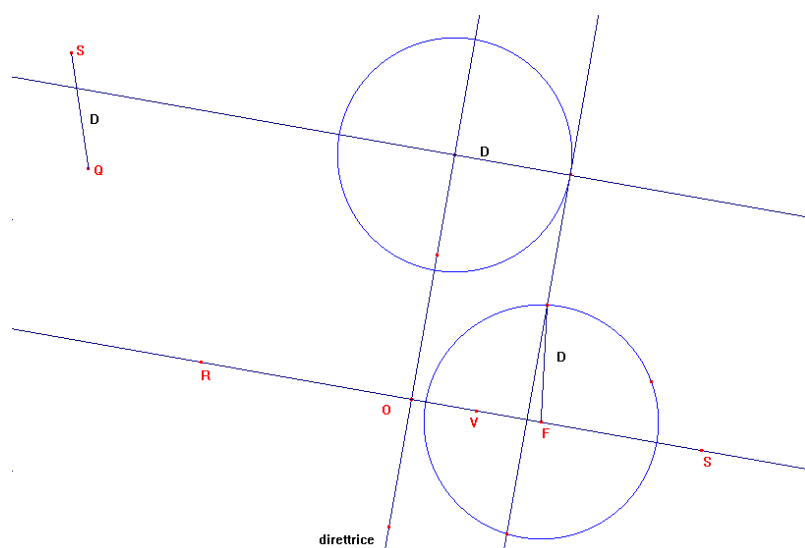


Figura 10

- a) Dite quali punti appartengono alla parabola motivando la risposta.
- b) Scelti la retta OF come asse delle ascisse ed il punto O come origine, è possibile definire una funzione numerica di cui la parabola sia il grafico? Nel caso in cui ciò sia possibile, ricavate tale equazione.
- c) Scelti ancora la retta OF come asse delle ascisse ed il punto medio V tra O e F come origine, è possibile definire una funzione numerica di cui la parabola sia il grafico? Nel caso in cui ciò sia possibile, ricavate tale equazione.

2. Sono date le seguenti equazioni:

d)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$ ;

e)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ ;

f)  $y = -\frac{1}{4}x^2$  .

Rappresentate le curve associate alle equazioni assegnate in un unico riferimento  $xOy$  di ascisse ed ordinate.

## Triangoli equilateri e parabole

**Livello scolastico:** 2° biennio

<b>Abilità interessate</b>	<b>Conoscenze</b>	<b>Nuclei coinvolti</b>	<b>Collegamenti esterni</b>
Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici.  Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	Spazio e figure  Numeri e algoritmi  Relazioni e funzioni  Argomentare, congetturare, dimostrare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	

### Contesto

Geometria e aritmetica.

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, nella seconda classe del secondo biennio, quando gli studenti hanno già acquisito una certa abilità nella rappresentazione analitica di oggetti geometrici, nella rappresentazione delle successioni e nell'uso di software di geometria e di manipolazione simbolica. Il contesto è quello della geometria e dell'aritmetica.

L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. La soluzione del problema richiede la capacità da parte degli studenti di applicare in un unico contesto conoscenze e abilità diverse.

### Descrizione dell'attività

L'attività proposta consente di applicare e approfondire i seguenti temi:

- il teorema di Pitagora,
- le proprietà dei triangoli equilateri,
- le proprietà sintetiche e analitiche della parabola,
- la somma dei primi  $n$  numeri dispari,
- la nozioni di funzione (in particolare la scrittura formale di una successione),
- la scelta di un sistema di riferimento cartesiano.

Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica "lunga", tipica del laboratorio di matematica.

La compresenza di approcci di tipo grafico, di tipo numerico e di tipo formale rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, in particolare dei software di geometria e dei programmi di manipolazione simbolica.

Si consiglia di proporre l'attività suddividendo la classe in piccoli gruppi di studenti, richiedendo di riportare successivamente la discussione avvenuta all'interno del gruppo classe relativamente alle

strategie risolutive. L'insegnante deve poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

### Prima fase

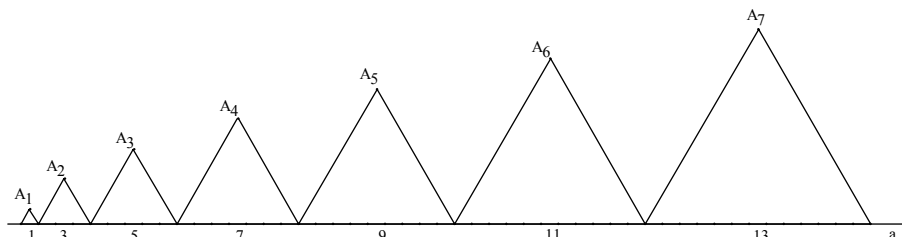
L'insegnante propone agli studenti suddivisi in gruppi il seguente problema.

Problema.

Costruire dei triangoli equilateri lungo una retta, come mostrato nella Figura 1, con i lati di lunghezza  $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$

Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta.

Determinare l'equazione della curva.



*Figura 1*

L'insegnante presenta e commenta il problema alla classe servendosi della Figura 1.

### Seconda fase

Gli studenti disegnano con l'aiuto di un software di geometria e formulano congetture per descrivere la curva.

Consegna 1

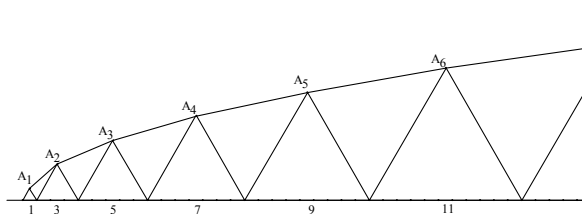
Fissato un segmento unitario costruire i triangoli equilateri e i segmenti  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ ; variare la lunghezza del segmento unitario e descrivere quello che si osserva.

Si costruisce lavorando in gruppi la Figura 2, si discutono le osservazioni dell'attività di esplorazione; alla fine del confronto gli studenti congetturano che la curva sembra essere una parabola. L'insegnante propone la discussione della congettura.

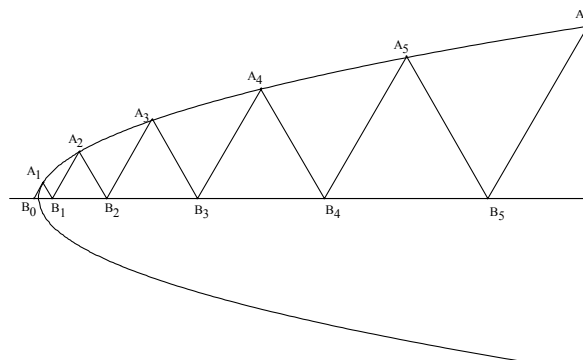
Consegna 2

Costruire, con lo strumento "Conica" del software di geometria, la conica per i cinque punti  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  e descrivere quello che si osserva.

Gli studenti disegnano la conica costruita dal software di geometria (Figura 3): è una parabola che sembra passare per tutti i punti costruiti e che ha per asse la retta  $a$ .



*Figura 2*



*Figura 3*

Terza fase

Gli studenti devono descrivere la parabola.

Consegna 3

Costruire con lo strumento “Luogo” del software di geometria le parabole che passano per il punto  $A_1$  e hanno per asse la retta  $a$ . (Utilizzare la Figura 3).

Gli studenti devono utilizzare la definizione di parabola in modo consapevole: devono, ad esempio, fissare sulla retta  $a$  un punto qualsiasi  $F$ , costruire la retta  $d$  perpendicolare ad  $a$  tale che la distanza di  $A_1$  da  $d$  sia uguale a  $A_1F$  e la parabola come luogo dei punti equidistanti da  $F$  e da  $d$  (Figura 4).

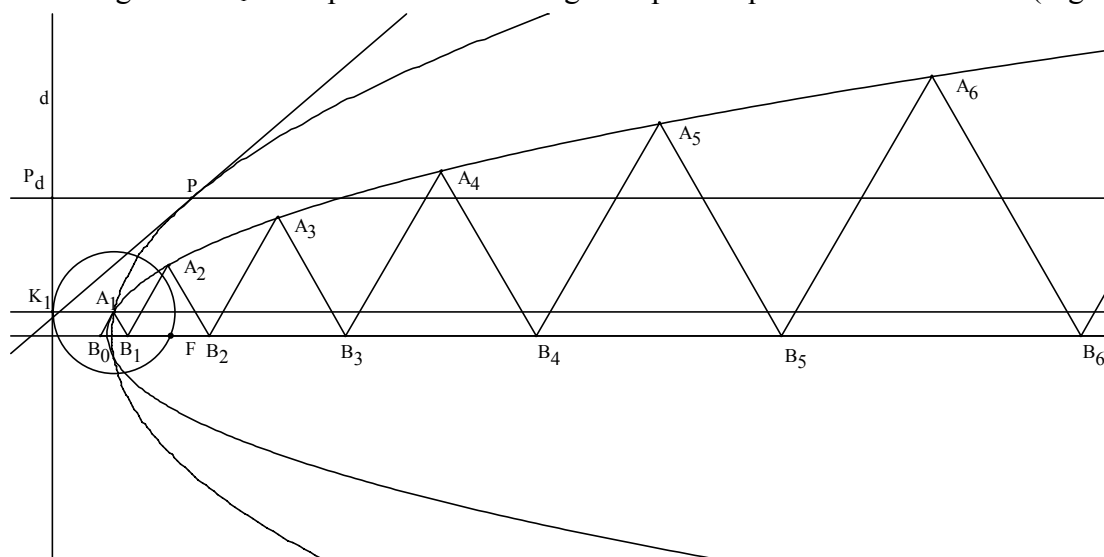


Figura 4

Consegna 4

Trascinare il punto  $F$  sulla retta  $a$ , descrivere quello che si osserva.

Gli studenti trascinano il punto  $F$  sulla retta  $a$  e scoprono che la parabola disegnata come luogo di punti coincide con la parabola per i punti  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  se  $F$  coincide con il punto  $B_1$  (Figura 5).

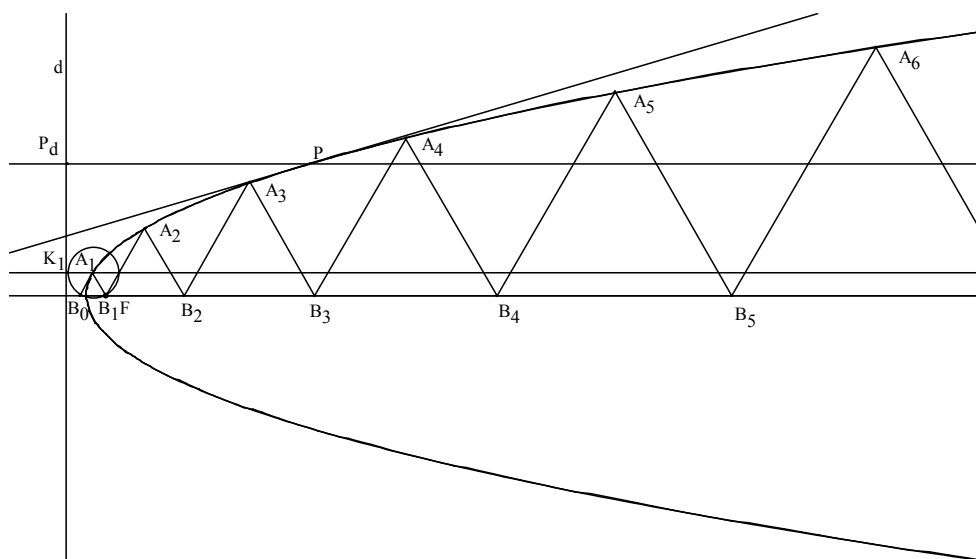


Figura 5

Con quest'ultima attività si conclude la fase di esplorazione e congettura sulla forma della parabola.

#### Quarta fase

Gli studenti devono dimostrare o confutare utilizzando per i calcoli anche un programma di manipolazione simbolico o una calcolatrice la seguente

#### Congettura

I punti  $A_2, A_3, A_4, \dots$ , appartengono alla parabola che ha il fuoco nel punto  $B_1$  e passa per il punto  $A_1$ .

Devono quindi dimostrare o confutare che  $A_n K_n = A_n F$ , per ogni  $n$ .

#### Consegna 5

Determinare la distanza dei punti  $A_2, A_3, A_4, \dots$  dalla retta  $d$ .

L'insegnante può eventualmente suggerire il seguente procedimento (Figura 6):

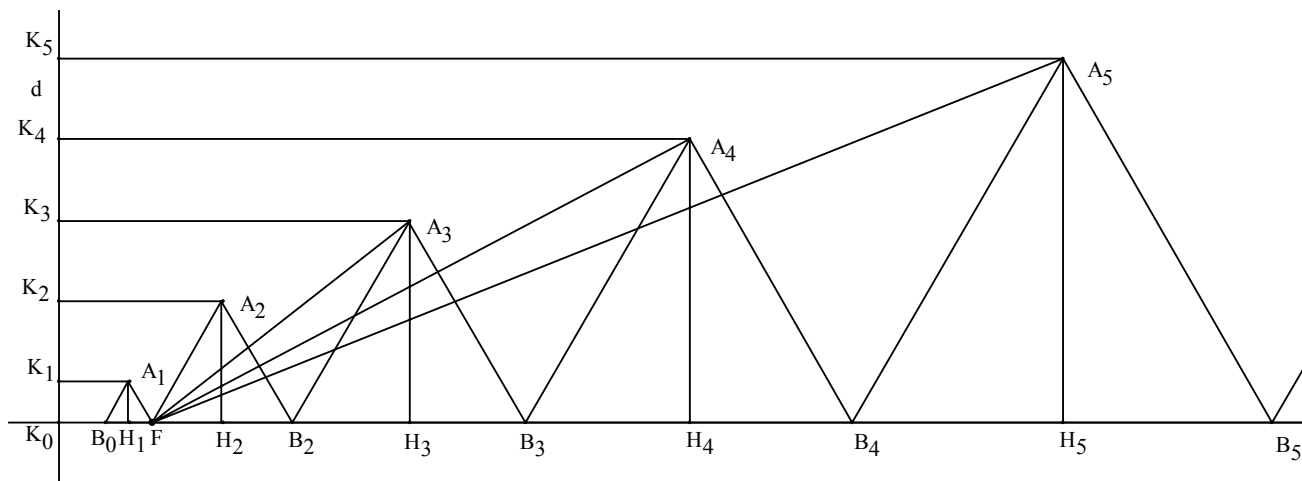


Figura 6

Il punto  $A_1$  dista 1 dalla direttrice, infatti

$$K_1 A_1 = K_0 B_0 + B_0 F - H_1 F = 1/2 + 1 - 1/2,$$

il punto  $A_2$  dista dalla direttrice 3, infatti:

$$K_2 A_2 = K_0 B_0 + B_0 F + B_1 B_2 - H_2 B_2 = 1/2 + 1 + 3 - 3/2$$

il punto  $A_3$  dista dalla direttrice 7, infatti

$$K_3 A_3 = K_0 B_0 + B_0 F + B_1 B_2 + B_2 B_3 - H_3 B_3 = 1/2 + 1 + 3 + 5 - 5/2.$$

Gli studenti utilizzano l'indicazione per calcolare la distanza del punto  $A_n$  da  $d$ .

Devono quindi scrivere la somma

$$K_n A_n = 1/2 + 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) - (2n - 1)/2,$$

e osservare che si deve determinare la somma dei primi  $n$  numeri dispari

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

calcolarla, anche con l'aiuto di una calcolatrice grafico simbolica (Figura 7):

$$K_n A_n = 1/2 + n^2 - (2n - 1)/2 = (1 + 2n^2 - 2n + 1)/2 = n^2 - n + 1.$$

#### Consegna 6

Determinare la lunghezza dei segmenti  $FH_2, FH_3, \dots, FH_n$ .

Gli studenti devono ripetere le considerazioni fatte nella consegna precedente e con alcune variazioni ottengono (Figura 7):

$$FH_n = 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) - (2n - 1)/2 = n^2 - 1 - (2n - 1)/2 = n^2 - n - 1/2.$$

#### Consegna 7

Determinare la lunghezza dei segmenti  $A_2 H_2, A_3 H_3, \dots, A_n H_n$ .

Gli studenti determinano la lunghezza utilizzando le proprietà dei triangoli equilateri:

$$A_2 H_2 = (3/2) \sqrt{3}, A_3 H_3 = (5/2) \sqrt{3}, \dots, A_n H_n = [(2n - 1)/2] \sqrt{3}.$$

Consegna 8

Determinare la lunghezza dei segmenti  $A_2F, A_3F, \dots, A_nF$ .

La distanza di ciascun vertice dal fuoco può essere calcolata mediante il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli  $A_nH_nF$ . Si ottiene allora (Figura 8):

$$A_nF = \sqrt{\left(n^2 - n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = |n^2 - n + 1|.$$

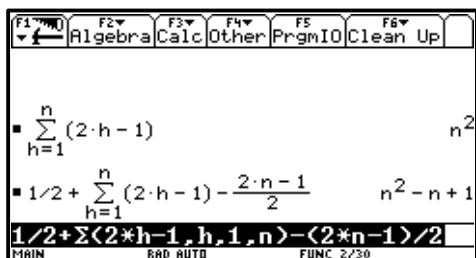


Figura 7

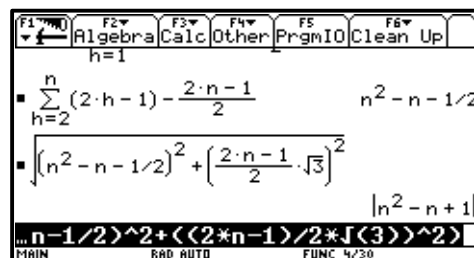


Figura 8

Gli studenti verificano, dunque, che l'ennesimo punto  $A_n$  è equidistante dalla direttrice e dal fuoco se

$$n^2 - n + 1 = |n^2 - n + 1|.$$

L'uguaglianza è vera, infatti i punti di coordinate  $(n, n^2 - n + 1)$  appartengono alla parabola di equazione  $y = x^2 - x + 1$  il cui grafico è situato nel semipiano delle ordinate positive.

Quindi tutti i punti appartengono alla parabola che ha per asse la retta  $a$ , per fuoco il punto  $F$  coincidente con il punto  $B_1$  e per direttrice la retta  $d$  che dista 1 dal punto  $A_1$ .

Quinta fase

Gli studenti a questo livello scolare possono anche tradurre il problema in modo analitico.

Gli studenti, lavorando individualmente, devono affrontare i seguenti problemi:

- a) scegliere in maniera opportuna il sistema di riferimento;
- b) determinare le coordinate dei vertici del triangolo utilizzando le esperienze fatte nelle attività precedenti;
- c) determinare l'equazione della parabola per tre punti,
- d) verificare per via analitica che il punto  $A_n$  appartiene alla parabola.

Il punto a) è abbastanza delicato, perché gli studenti potrebbero avere difficoltà a effettuare la scelta del sistema del riferimento cartesiano più opportuno.

Si discute questo problema con tutti gli studenti suggerendo di far coincidere, per esempio, l'asse delle ascisse con la retta  $a$  e l'origine degli assi con il punto  $H_1$ .

I punti b), c), d) sono analizzati con l'ausilio di una calcolatrice grafica simbolica, si domanda a questi strumenti lo sviluppo dei calcoli (Figura 9).

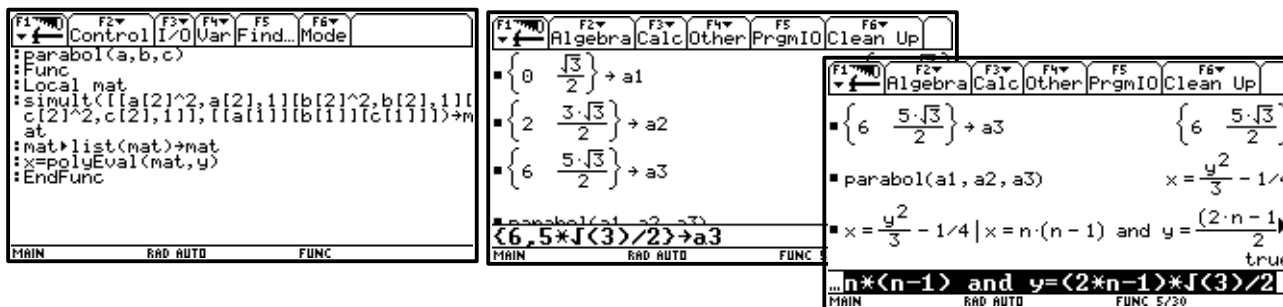


Figura 9

L'uso della calcolatrice grafico-simbolica impegna gli studenti nella ricerca di diverse strategie: ad esempio fissare l'asse delle ordinate coincidente con la retta  $d$  e l'asse delle ascisse coincidente con la retta  $a$ , scrivere rispetto a questo sistema le coordinate dei punti, determinare l'equazione della parabola e verificare l'appartenenza dei punti alla parabola; oppure ancora determinare l'equazione della parabola utilizzando le coordinate del fuoco e della direttrice. La ricchezza di approcci e la possibilità di discuterli tutti in tempi ragionevoli durante l'attività in classe può incoraggiare gli studenti alla partecipazione attiva, al confronto e alla collaborazione.

### Possibili sviluppi

1. Dimostrare o confutare che i punti  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  appartengono al grafico della funzione  $y = h\sqrt{x}$  per una scelta opportuna del parametro  $h$ .
2. Costruire su una retta una successione di triangoli equilateri con il lato di lunghezza  $2, 4, 6, \dots, 2n$ . Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta. Determinare l'equazione della curva.
3. Costruire su una retta una successione di triangoli isosceli simili con la base di lunghezza  $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ . Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta. Determinare l'equazione della curva.

## La trigonometria e il mondo reale

**Livello scolastico:** 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli.  Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari.	Seno, coseno e tangente di un angolo.  Coordinate polari.  Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo.	Spazio e figure.  Risolvere e porsi problemi.	Astronomia, Fisica, Topografia, Geografia della terra.

### Contesto

Trigonometria e applicazioni.

Questa attività può essere proposta nel secondo biennio, quando gli studenti conoscono gli elementi fondamentali di geometria piana in particolare le similitudini. Il contesto è quello della trigonometria e delle sue applicazioni.

### Descrizione dell'attività

L'attività si struttura in quattro fasi e prevede l'introduzione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto, la loro applicazione alla risoluzione dei triangoli rettangoli e alla risoluzione di semplici problemi legati al mondo reale.

#### Prima fase

L'insegnante presenta agli studenti le finalità dell'attività evidenziando che si introdurranno alcune nozioni utili a risolvere problemi di misura di grandezze.

Analizzando la Figura 1 l'insegnante fa notare che, dato un angolo acuto AOB (indicato con  $\alpha$ ), preso sul lato OB un punto P, considerata la proiezione Q di P su OA, i tre rapporti tra i segmenti PQ e OP, OQ e OP, e PQ e OQ rimangono costanti al variare di P.

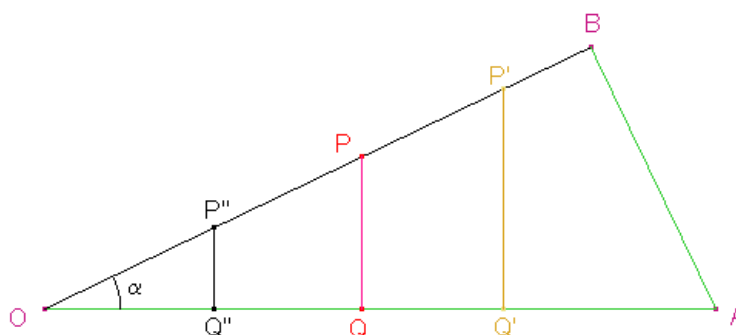


Figura 1

I valori di tali rapporti variano solo al variare dell'angolo  $\alpha$  e sono univocamente determinati per ogni sua ampiezza. Si può dunque dire che variano in funzione dell'angolo ovvero che sono funzioni dell'angolo  $\alpha$ , indicati rispettivamente con  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ .

L'insegnante può anche proporre agli studenti di esplorare la situazione attraverso misure effettuate su carta millimetrata con righello e goniometro o usando un software di geometria.

Questa prima fase porta all'introduzione delle nozioni di seno, coseno e tangente di un angolo acuto e consente di iniziare a proporre semplici esercizi di risoluzione di triangoli rettangoli.

La familiarità con i valori delle funzioni seno, coseno e tangente può essere ottenuta anche considerando triangoli rettangoli particolari, come quelli ottenuti dividendo a metà un triangolo equilatero o un quadrato. In questi casi, infatti, gli studenti devono solo applicare le loro conoscenze per ricavare i rapporti che caratterizzano le diverse situazioni.

### Seconda fase

L'insegnante mette in evidenza la relazione tra seno, coseno, tangente e il valore associato dell'angolo e invita a riflettere sulle difficoltà che si presentano nel calcolare, in generale, tali valori, chiedendo, per esempio, "qual è il seno dell'angolo di ampiezza 7 gradi?".

Tutto ciò può anche essere utilizzato come spunto motivante per un approfondimento storico sull'evoluzione degli strumenti di calcolo: dalle tavole alle calcolatrici, al software di geometria. Gli studenti, a questo punto, possono elaborare una tabella attraverso cui esaminare come, al variare dell'angolo, varino seno, coseno e tangente.

È utile sottoporre alla riflessione degli studenti i problemi che si presentano quando si deve calcolare il valore di tali funzioni cercando di operare opportune approssimazioni con l'uso di strumenti di calcolo.

### Terza fase

L'insegnante, dopo aver suddiviso la classe in piccoli gruppi, propone i seguenti problemi. I problemi riportati sono presentati per argomento: i primi due propongono delle attività di scoperta di proprietà di figure, gli altri trattano questioni legate al mondo reale.

#### 1. Teorema della corda.

La lunghezza  $L$  di una corda  $AB$  di una circonferenza è sempre data da  $L = 2r \sin \alpha$ , in cui  $r$  è il raggio della circonferenza,  $\alpha$  è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda  $AB$  e che sono inscritti nell'arco maggiore tra quelli individuati da  $AB$  (Figura 2).

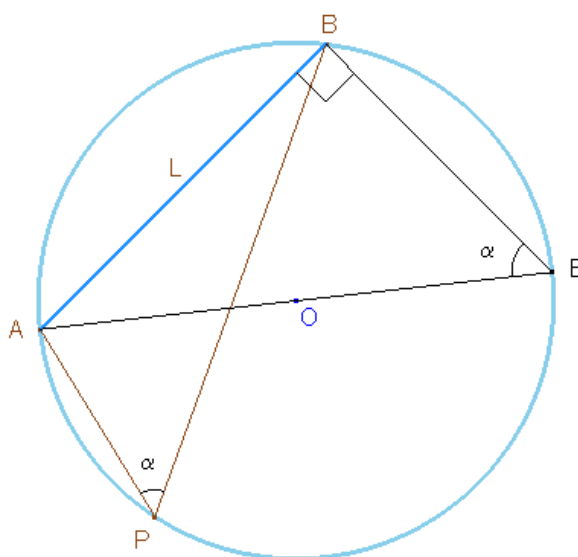


Figura 2

L'estensione di questo teorema anche agli angoli inscritti nell'arco minore verrà fatta dopo aver generalizzato le funzioni goniometriche ad un angolo qualunque.

2. L'area di un triangolo ABC di cui sono noti due lati, AC e AB, e l'angolo compreso  $\alpha$ , si può ottenere come semiprodotto fra i due lati e il seno dell'angolo compreso. Individuare una strategia per giungere a questa relazione (Figura 3).

L'insegnante guida gli studenti a osservare come l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB sia il cateto del triangolo rettangolo ACH che è opposto all'angolo  $\alpha$  e a esprimere l'area cercata come

$$S = \frac{1}{2}bc\text{sen}\alpha.$$

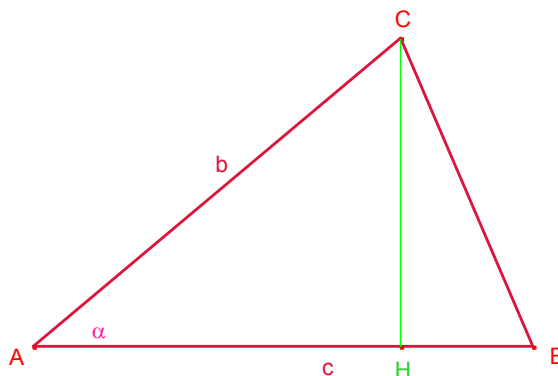


Figura 3

3. Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro in modo da toccarlo ad un'altezza di 3,6 m. Quale angolo forma la scala con il pavimento? ...e con il muro?
4. Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di  $10^\circ$  inferiore a quello della latitudine del luogo (trovandosi Roma alla latitudine di  $41^\circ$ , il pannello dovrà essere inclinato di  $31^\circ$ ). A che altezza dal pavimento della terrazza arriverà la sommità del pannello?
5. Quando una strada sale di 20 m, su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Quanto vale l'angolo di inclinazione della strada (rispetto all'orizzontale)?
6. Aristarco di Samo nel III secolo a. C. affronta il seguente problema: "Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante ( $90^\circ$ ); quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?"

Il problema si può schematizzare con un triangolo LAS, rettangolo in L, di cui si conosce l'angolo

$\hat{A} = 87^\circ$  e si vuol ricavare il rapporto AS/AL?

Risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare il rapporto AS/AL con l'angolo  $\hat{A} = 87^\circ$ ;
- calcolare il rapporto AS/AL, con le attuali misure che forniscono  $\hat{A} = 89^\circ 51'$ ;
- confrontare i risultati ottenuti.

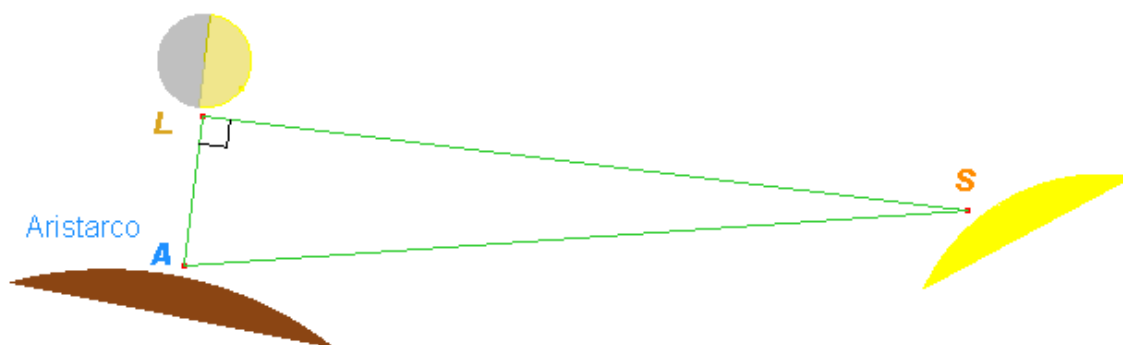


Figura 4

7. Dalla cima di una scogliera alta 50 m si vede una nave sotto un angolo di  $20^\circ$  rispetto all'orizzontale. Quanto dista la nave dalla scogliera?
8. Un ponte lungo 80 m attraversa un fiume formando un angolo di  $50^\circ$  con le sponde; qual è la larghezza del fiume?
9. Un faro è posto su un'isola. Elaborare una strategia per stimare la distanza del faro dalla spiaggia.
10. Quale strategia per la misura della profondità di un pozzo ?
11. Quale strategia per la misura dell'altezza della torre di Pisa ?

#### Quarta fase

Finora sono state analizzate situazioni relative ad angoli acuti, ma se l'angolo fosse ottuso? Per ampliare l'argomento e anche per introdurre le coordinate polari si può proporre agli studenti lo studio del radar, strumento indispensabile per la navigazione aerea e marittima, ma di cui spesso si ignora il funzionamento.

L'insegnante propone agli studenti la fotografia di un radar oppure lo mostra "funzionante" ricorrendo ai giochi di simulazione per il computer. Quando il radar è in funzione, una semiretta "spazza" lo schermo girando in senso antiorario; la presenza di un ostacolo che si trova nella direzione in cui punta la semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.

Il problema da porsi è: come individuare la posizione dell'ostacolo?

Si può schematizzare la situazione nel seguente modo (Figura 5):

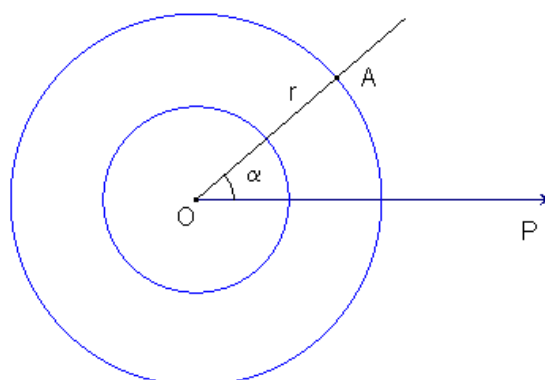


Figura 5

Sullo schermo si leggono direttamente due numeri: la distanza  $OA = r$  e l'angolo  $\alpha$  che ha descritto la semiretta  $OA$ , a partire dalla posizione  $OP$ .

L'insegnante sottolinea perciò agli studenti che la posizione del punto A sullo schermo è quindi individuata da  $r$  e  $\alpha$ , detti raggio e anomalia; precisa che il punto O è detto *polo* e la semiretta OP *asse polare*.

Dalla localizzazione del punto mediante tale coppia di numeri, legata al funzionamento del radar si può poi passare ad esprimere la posizione su una carta geografica, ricorrendo alle più consuete latitudine e longitudine: si traducono, dunque, le coordinate polari in coordinate cartesiane. L'asse polare viene fatto coincidere con il semiasse positivo delle  $x$  e gli studenti possono ora esprimere la posizione del punto considerato con le coordinate polari. Da questo o da altri esempi simili l'insegnante può prendere spunto per introdurre anche i valori di seno, coseno e tangente per angoli maggiori di  $90^\circ$ , senza limitarsi al I quadrante.

Dopo queste osservazioni il seno e il coseno di un angolo sono definiti per angoli compresi fra  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , ovvero per un angolo qualunque.

A questo punto l'insegnante guida gli studenti al passaggio dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane con l'introduzione della circonferenza goniometrica.

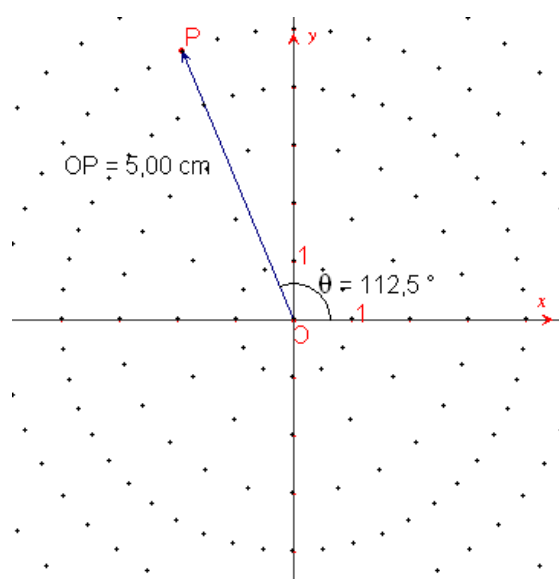


Figura 6

### Possibili sviluppi

1. Misura del raggio terrestre (Eratostene).
2. Problematiche delle misurazioni a distanza: ieri e oggi.
3. Riflessione e rifrazione della luce.
4. Introduzione storica alla trigonometria.

## Equivalenza nello spazio

**Livello scolastico:** 2° biennio

<b>Abilità interessate</b>	<b>Conoscenze</b>	<b>Nuclei coinvolti</b>	<b>Collegamenti esterni</b>
Calcolare aree e volumi di solidi.	Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi.  Proprietà dei principali solidi geometrici.	<u>Spazio e figure</u>  Numeri e algoritmi  Argomentare, congetturare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Disegno Fisica

### Contesto

Equivalenza: dal piano allo spazio.

Questa attività è proposta per il secondo biennio, alla fine della classe quarta.

Gli strumenti di cui avvalersi sono, oltre ad un software di geometria, modelli fisici di solidi, recipienti di forme diverse e ugual volume, ...

Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle proprietà dei solidi geometrici e conoscere il problema dell'equivalenza e dell'equiscomponibilità nel piano.

L'obiettivo principale dell'attività è di comprendere la necessità di stabilire un principio iniziale, il principio di Cavalieri, per arrivare alla misura dell'estensione dei solidi elementari, preliminare ad un approccio più generale al problema della misura e allo studio di altri strumenti matematici che potranno essere oggetto di studi successivi.

### Descrizione dell'attività

#### Prima fase

Si discute in classe sulla rappresentazione nel piano di figure che stanno nello spazio, con carta e matita e con l'uso di strumenti informatici.

Una buona rappresentazione prospettica di una figura solida presuppone conoscenze matematiche e tecniche grafiche non indifferenti. Si può accennare al metodo della assonometria e a quello della prospettiva, almeno nella rappresentazione dei solidi più semplici.

Le potenzialità dei software di geometria sono maggiormente utilizzate per l'insegnamento della geometria piana. Tali software, però, possono essere degli ottimi strumenti anche per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria dello spazio. Occorre inizialmente avere qualche nozione di disegno in modo da poter rappresentare nel piano delle figure che stanno nello spazio. Per questo si può usare in modo intuitivo una semplice rappresentazione come l'assonometria cavaliera. L'uso di un software di geometria permette di vedere in maniera dinamica, date le caratteristiche di variabilità delle figure che si possono tracciare, le proprietà delle figure dello spazio.

Di solito le figure nello spazio sono più difficili da realizzare rispetto a quelle piane e richiedono maggiori abilità. Non è quindi facile, con il disegno a mano libera, ottenere figure che visualizzino e rispettino le richieste dei problemi che possono nascere in geometria, ma anche in fisica o nelle altre scienze. Inoltre anche quando si utilizzano gli strumenti da disegno, e si costruisce una figura chiara e corretta con gli strumenti classici, tale figura, nella sua staticità, è ben lontana dalle possibilità offerte da una figura che si può manipolare. Usando le potenzialità dinamiche e interattive di un software di geometria e soprattutto la possibilità di creare facilmente delle animazioni sui fatti più importanti della geometria dello spazio, è possibile, invece, cambiare facilmente il punto di vista e variare tutti gli elementi di una data figura, esaminandola sotto vari aspetti.

Per disegnare correttamente nel piano una figura tridimensionale, si può usare il metodo dell'assonometria cavaliere, che è uno dei più semplici. Gli assi assonometrici,  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono situati in modo che due di essi sono fra loro ortogonali (assi  $y$  e  $z$ ) e il terzo diretto arbitrariamente (l'asse  $x$ ), purché non sul prolungamento dei precedenti. L'unità di misura sarà uguale sui primi due assi coordinati e arbitraria sul terzo (di solito, su questo asse, si sceglie la metà dell'unità di misura scelta sugli altri due assi).

L'assonometria cavaliere è un'assonometria obliqua perché si immagina di proiettare la figura solida su un piano, tramite un fascio di raggi paralleli (ad es. i raggi del sole).

Riferiamo lo spazio alla terna trirettangola  $Oxyz$ , facendo coincidere l'asse delle  $y$  con la cosiddetta "linea di terra". L'oggetto da rappresentare si suppone di solito contenuto nel triedro dei semiasse positivi.

### Seconda fase

Si rivede l'equivalenza nel piano con un altro approccio (di Cavalieri), come introduzione intuitiva allo stesso metodo applicato alle figure nello spazio. Gli studenti conoscono la proprietà che dice: due parallelogrammi compresi tra due rette parallele sono equivalenti se hanno le basi uguali. Questo fatto di solito viene introdotto elementarmente usando l'equiscomponibilità. Ma si può anche affrontare l'argomento da un punto di vista più generale, che fa uso della teoria degli "indivisibili" di Cavalieri (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647). Esaminiamo la figura 1, dove sono disegnati due parallelogrammi aventi basi uguali e altezze uguali, e immaginiamo di spostare il punto  $A'$  e con esso la retta  $A'B'$  parallela ad  $AB$ . Dall'uguaglianza tra i segmenti  $A'B'$  e  $E'F'$ , segue l'equivalenza tra i due parallelogrammi. L'equivalenza tra figure del piano viene quindi ricondotta alla uguaglianza tra segmenti,  $A'B'$  e  $E'F'$  nella figura, che Cavalieri chiamava "indivisibili".

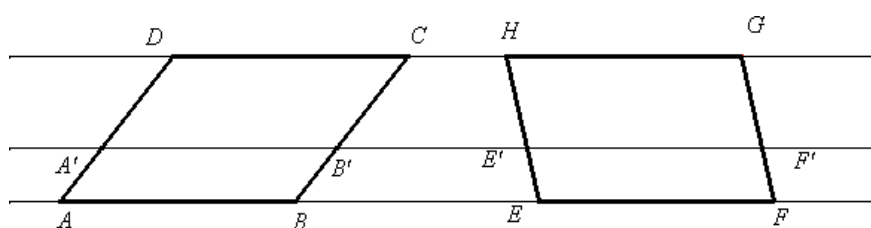


Figura 1

La precedente figura potrebbe essere generalizzata come nella seguente figura 2, ottenibile facilmente con un software di geometria.

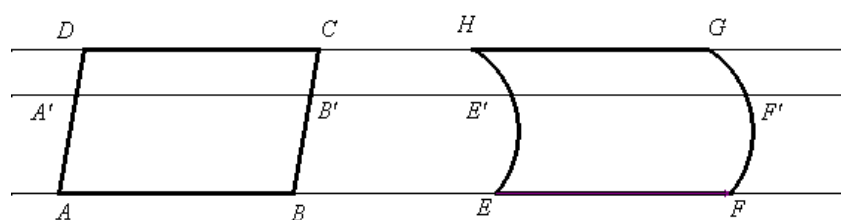


Figura 2

Analoghi ragionamenti possono essere fatti per triangoli aventi rispettivamente le basi e le altezze uguali.

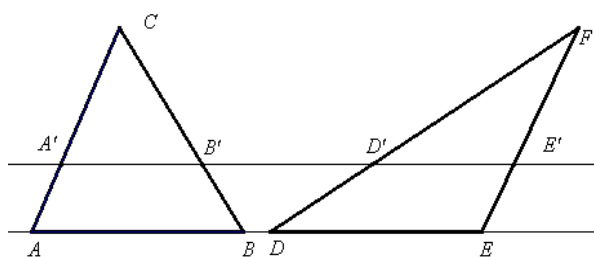


Figura 3

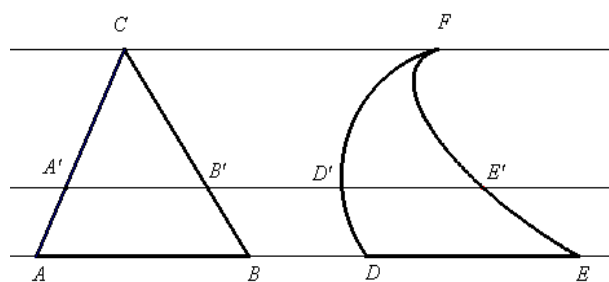


Figura 4

### Terza fase

In questa fase dell'attività, dalle precedenti considerazioni sull'equivalenza nel piano, si passa all'equivalenza tra figure nello spazio, dove si osserva che l'equivalenza tra solidi equiscomponibili è un metodo piuttosto limitato e non sono generalizzabili i risultati trovati nel piano. Si possono, infatti, presentare solidi equivalenti che non sono equiscomponibili). Per arrivare alla misura dell'estensione dei solidi notevoli occorre quindi introdurre il "principio di Cavalieri".

Si può dire, in modo intuitivo, che con il principio di Cavalieri si stabilisce, per postulato, l'equivalenza tra due figure solide comprese tra due piani paralleli se un qualunque piano parallelo al piano di base le seziona secondo due figure tra loro equivalenti. In questo modo si riconduce l'equivalenza nello spazio all'equivalenza nel piano.

Un software di geometria si presta particolarmente bene per visualizzare il principio di Cavalieri, proposizione che comunque si deve assegnare come postulato per sviluppare la teoria dell'equivalenza tra figure nello spazio.

Un primo disegno si ottiene rappresentando in assonometria due prismi aventi basi equivalenti e altezze uguali. Si ottiene la Figura 5 che può essere utilizzata per meglio comprendere l'idea che sta alla base di questo metodo per stabilire l'equivalenza tra due prismi.

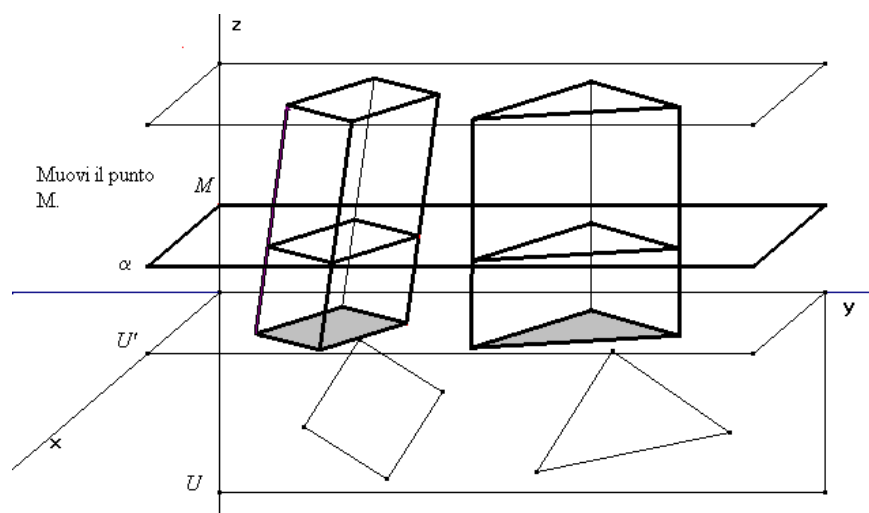


Figura 5

I poligoni di base sono equivalenti e possono essere modificati nella figura, mantenendo però la loro equivalenza. Tali poligoni si possono modificare, spostandone i vertici; analogamente il piano che seziona i prismi, parallelo al piano di base, può essere spostato parallelamente a se stesso, muovendo il punto  $M$ . I prismi possono mutare la loro altezza o diventare retti od obliqui, trascinando un punto base della figura.

In modo del tutto simile è stata ottenuta la Figura 6 su cui si possono fare le stesse osservazioni

viste in precedenza e dove è presente un solido più generale del prisma

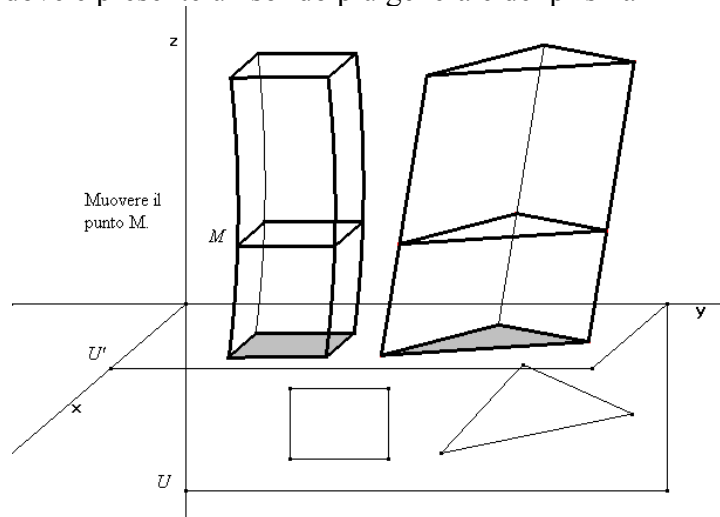


Figura 6

Analogamente si può ripetere con una coppia di piramidi aventi basi equivalenti e la stessa altezza come mostrato nella Figura 7.

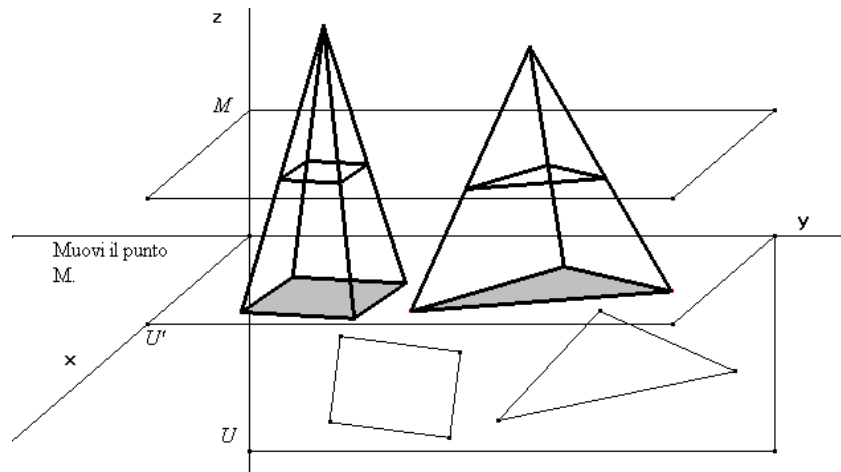


Figura 7

Una delle proposizioni più importanti nello studio del volume delle figure dello spazio afferma l'equivalenza tra un prisma a base triangolare e tre piramidi tra loro equivalenti.

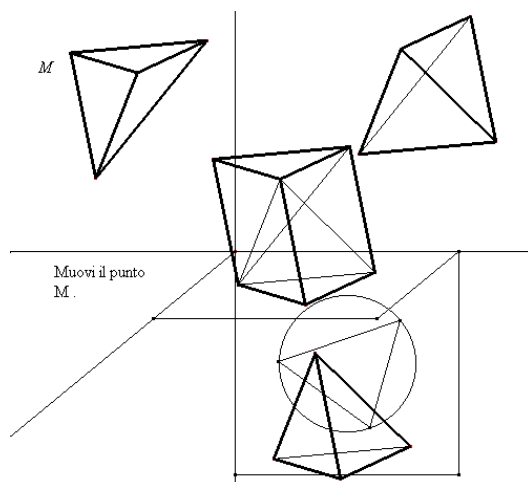


Figura 8

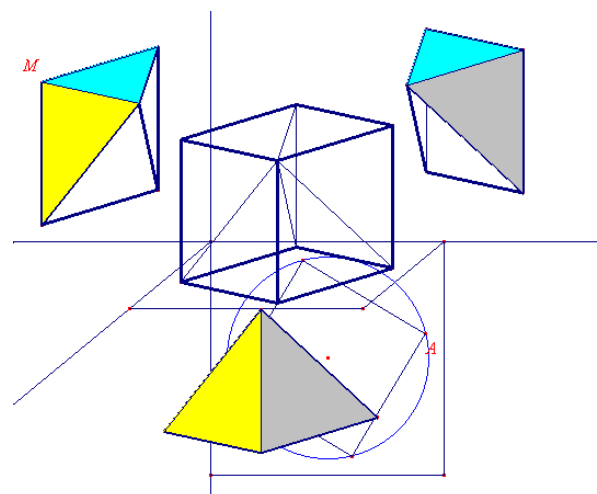


Figura 9

Per visualizzare questa proposizione si possono usare dei modelli fisici dei solidi geometrici oppure un software di geometria, con la possibilità di modificare interattivamente le caratteristiche del prisma e conseguentemente delle piramidi (Figura 8 e Figura 9).

Un'altra bella applicazione del principio di Cavalieri riguarda la determinazione del volume della sfera per via elementare. Si tratta della dimostrazione che fa uso della cosiddetta "scodella di Galileo" e che di solito viene svolta nelle classi dove non si ha a disposizione il calcolo integrale. Si dimostra che la sfera è equivalente alla figura detta "anticlessidra". L'anticlessidra si ottiene togliendo da un cilindro equilatero una "clessidra" formata da due coni uguali opposti al vertice  $O$ . Un cilindro circolare retto si dice "equilatero" se il diametro di base è uguale all'altezza. I coni che formano la clessidra hanno quindi l'altezza uguale al raggio di base.

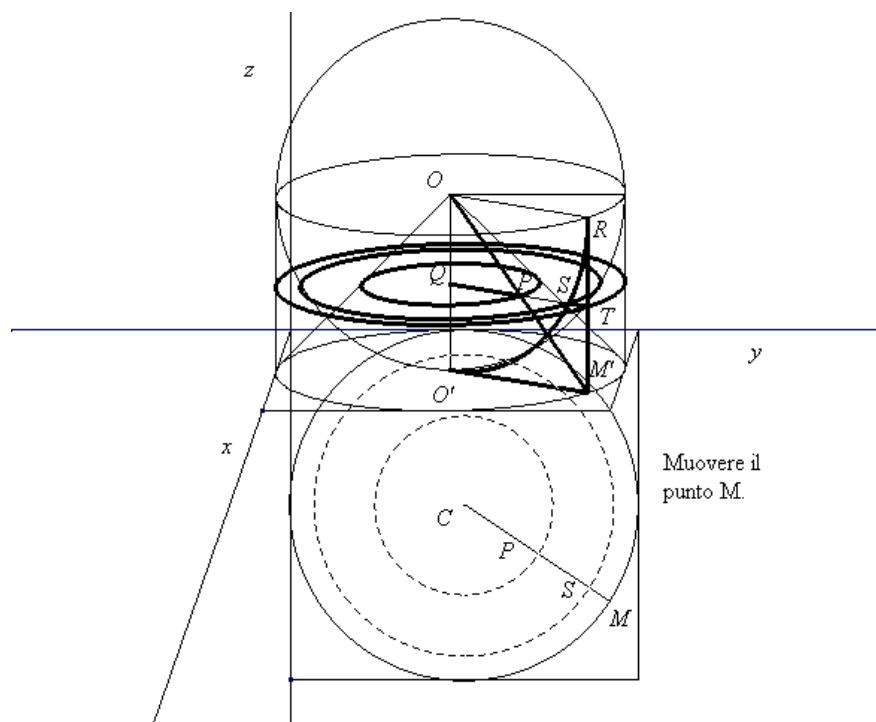


Figura 10

Nella dimostrazione citata viene usato il principio di Cavalieri per trovare l'equivalenza tra la "scodella di Galileo" e uno dei coni che formano la clessidra.

La dimostrazione è basata sull'equivalenza tra il cerchio di raggio  $QP$  e la corona circolare generata dal segmento  $ST$  in una rotazione completa attorno al punto  $Q$ .

Anche tale dimostrazione può essere visualizzata in modo dinamico con un software di geometria, spostando il punto  $T$  (Figura 10) si può visualizzare il variare del cerchio di raggio  $QP$  e della corona circolare generata da  $ST$ .

### Possibili sviluppi

1. Determinazione del volume dell'ottaedro regolare, del volume del tetraedro regolare, ...
2. Dal volume della sfera alla formula per la superficie della sfera; il "grande teorema" di Archimede (cilindro equilatero e sfera). Questa attività consente di presentare alcune questioni e approfondimenti anche con un approccio storico (il problema della misura; la "scodella" di Galileo; la nascita del calcolo integrale; ...).

**Elementi di prove di verifica**

1. Disegna due poliedri equiscomponibili, ma che non siano nella relazione di Cavalieri.
2. Dato un cubo di spigolo  $l$  determina lo spigolo del cubo di volume doppio.
3. Dimostra che in un tetraedro le aree delle sue facce sono inversamente proporzionali alle relative altezze.
4. Trovare il volume di un ottaedro regolare di spigolo  $l$ .
5. Osservando la Figura 11, verifica che il volume di un tetraedro regolare è  $1/4$  del volume di un ottaedro che ha lo stesso lato.

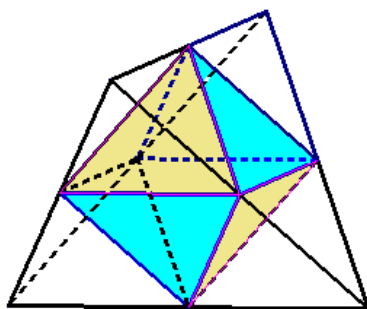


Figura 11

6. Un rettangolo di dimensioni  $a$  e  $b$  viene fatto ruotare di un giro completo attorno a uno dei suoi lati e genera così due cilindri. Hanno lo stesso volume?
7. I “tetrapack” (Figura 12), contenitori a forma di tetraedro regolare, sono costruiti a partire da un cilindro. Se il diametro del cilindro è 10 cm, trovare il volume del “tetrapak”.

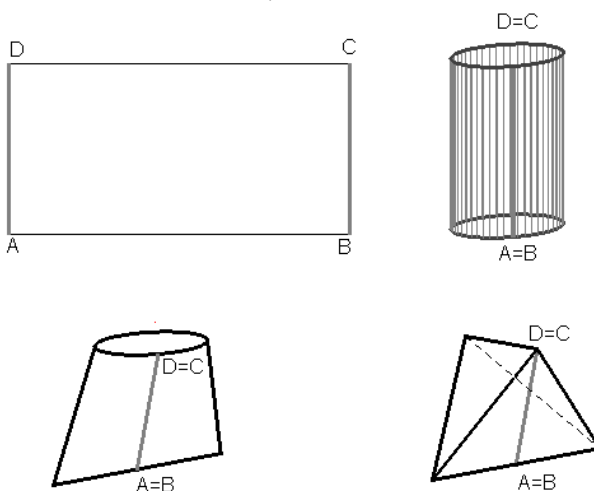
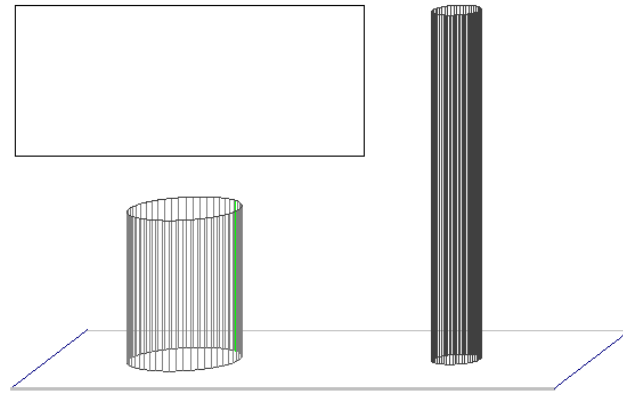


Figura 12

8. Un problema di Galileo sul cilindro (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*). Curvando in forma diversa due fogli rettangolari uguali (Figura 13), si ottengono due cilindri con lo stesso volume? I contadini del tempo di Galileo avevano capito che se con un pezzo di tela “più lungo per un verso che per l’altro”, si costruisce la superficie laterale di un sacco, allora il sacco più basso e più largo contiene una maggiore quantità di grano.



*Figura 13*