

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET THEORIES SÉMIOTIQUES

Vers une analyse des processus de production et
d'interprétation des signes mathématiques dans les
situations d'apprentissage

- Les approches sémiotiques en didactique des mathématiques
- Ostensifs, registres, représentants
- La sémiotique triadique de C.S.Peirce
- Analyse d'un exemple
- Conclusion : les sémoses dans les situations

Isabelle Bloch

INTRODUCTION

Les signes dans l'enseignement des mathématiques

- L'utilisation de symboles ne garantit pas l'attribution à des concepts : **calculateurs aveugles**
- Les théories sémiotiques utilisées ne distinguent pas le sens 'institutionnel mathématique' d'un signe, du sens que peuvent lui donner les élèves
- Ces théories se placent tantôt côté sujet, tantôt côté contexte, tantôt côté objets mathématiques
- **L'interaction** Elèves / Situation : la composante sémiotique est à analyser

Isabelle Bloch

Concepts et objets : la « réalité » mathématique et la TSD

Concepts (idéalisés)

Objets mathématiques → **recherche Situation
Fondamentale**

Formel

Pragmatique – **signes mathématiques** - savoirs
Situations a-didactiques

Savoirs sur les situations

Expérience - **Connaissances** → quel usage des
signes mathématiques ?



Isabelle Bloch

I. ETUDES DES SIGNES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

A. Les ostensifs dans la TAD

- Les objets mathématiques sont de deux espèces : ostensifs et non ostensifs (concepts)
 - Chevallard 1995, Bosch & Chevallard 1999, Godino 2002
- Les ostensifs sont les symboles usuels des maths ; les concepts sont donnés par une définition
- Le travail sur les ostensifs (système de pratiques) produit l'accès aux non ostensifs : la conceptualisation
- On distingue signification institutionnelle /personnelle

Isabelle Bloch

B. Les registres de R.Duval

- Différents registres de représentation
 - Numérique, algébrique, graphique, formel
 - Cadre géométrique
- Trois fonctions des registres :
 - Communication , Objectivation , Traitement
- Problèmes de conversion
 - Congruence ou non congruence

Isabelle Bloch

Le traitement et la conversion en algèbre

- Énoncé : un bassin est alimenté par deux fontaines A et B. Si A coule pendant 4h et B pendant 2h, on obtient 64l. Si A coule pendant 3h et B pendant 4h, on obtient 62l. Quel est le débit de chaque fontaine ?
- Deux opérations référentielles de conversion
 - Désigner les inconnues et les autres quantités
 - Discriminer les relations entre quantités et les traduire
- Deux opérations substitutives de traitement
 - Manipuler les signes opératoires → algorithmique
 - Déplacer des termes 'salva veritate' → exigence sémantique
- Ceci suppose l'attribution correcte des signes à des objets : expressions algébriques, inconnues, indéterminées
 - cf. Drouhard, Maurel, Sackur et la dénotation

Isabelle Bloch

Les dérives interprétatives

- Signalées par J.Rogalski dès 1988, et par Dreyfus (1997) : registre producteur et réducteur
 - Un registre ne permet pas de voir certaines propriétés
 - Par contre, il induit des propriétés 'parasites'
- La représentation graphique d'une fonction
 - L'équation comme « étiquette »
 - La courbe comme icône
 - Le tableau numérique comme interprétation ponctuelle
- Le statut de la figure en géométrie

Isabelle Bloch

C. Le triangle épistémologique

- Radford, Steinbring
 - Le triangle épistémologique comprend 3 pôles : contexte, concepts, symboles
 - L'étude consiste à regarder les signes produits et le cheminement vers le savoir visé
 - Les signes langagiers occupent une place importante
 - L'interprétation n'est pas étudiée en tant que telle ; on renvoie à des 'conceptions' de l'élève
 - La situation proposée n'est pas considérée comme signe

Isabelle Bloch

Difficultés théoriques

- Un problème posé par ces approches est un problème de définition des objets théoriques 'registres', 'ostensifs'... et de lien avec l'apprentissage
- Le point de vue bascule tantôt du côté du sujet, ou du côté du savoir, ou du côté des symboles
- Ces théories regardent les signes produits ou à produire en fonction du résultat mathématique correct à obtenir et non de l'interprétation qui a lieu dans la situation
- Aucune de ces théories ne pose le problème des variations d'interprétation auxquelles peuvent être soumis les signes dans une situation, *dans le processus même de faire des mathématiques*

Isabelle Bloch

Poser des questions didactiques

- L'étude des signes mathématiques est nécessaire mais non suffisante pour rendre compte des phénomènes d'interprétation dans la relation didactique
- Les études épistémologiques concèdent que l'étudiant doit construire la signification, mais en quelque sorte 'en marge' du sens 'authentiquement mathématique'
- Toutes les théories qui pensent l'interprétant comme extérieur sont obligées de considérer le processus d'apprentissage 'en parallèle' du processus de développement des signes mathématiques et de leur signification
- Une théorie dyadique permet de rendre compte d'un système formel achevé. Mais dans l'apprentissage, l'interprétant est en construction

Isabelle Bloch

II. LA SEMIOTIQUE TRIADIQUE DE C.S. PEIRCE

- Pourquoi s'intéresser à la sémiotique de C.S. Peirce:
 - Dans les théories existantes, les interactions didactiques sont envisagées tantôt du côté de l'objet : les maths, tantôt du côté du sujet : l'élève (ou le professeur) → envisager l'interaction intrinsèquement dans la situation, et se donner des outils d'analyse
 - Lorsque qu'une symbolisation est incomprise, analyser la sémiase effectuée
 - De façon générale, comment se fait un apprentissage des mathématiques avec l'usage approprié de signes ?

Isabelle Bloch

Les linguistiques classiques

- Opposition classique contenu / représentant
- Linguistique dyadique
 - Saussure : signifiant / signifié
 - Frege : signifié / référent
 - Analyses du discours : Greimas & le carré sémiotique ; projet de narratologie ; Kerbrat-Oraconni : l'implicite
 - Ces théories sont basées sur l'existence de référents culturels aux signes ou systèmes de signes
 - Le projet d'une sémiotique générale se base sur la phénoménologie et la pragmatique

Isabelle Bloch

A. La phénoménologie et le signe chez C.S. Peirce

- La phanéroscopie : accès à la réalité à travers la perception de phanéra
- Un phanéron est composé de monades, dyades, triades : phénomènes relevant de relations primaires, secondaires, tertiaires
- La sémiotique de Peirce est **triadique** : le processus interprétatif met en jeu des composantes relevant de priméité, secondéité, tiercéité

Isabelle Bloch

Priméité, secondéité, tiercéité

- Selon Peirce, trois ordres de relation suffisent à rendre compte de tout **phanéron**
- La priméité est ce qui ne dépend que d'une qualité
- La secondéité est la relation de deux choses
- La tiercéité est le troisième qui permet d'attribuer la mise en relation de deux choses
- Pour Peirce, tout phanéron peut être analysé avec ces trois catégories

Isabelle Bloch

Priméité, secondéité, tiercéité (suite)

- Un priman est de l'ordre des sentiments ou des qualités
 - Une qualité de rouge
- Un secundan est de l'ordre des faits
 - «dans un tableau (objet individuel, réel) s'incarne une qualité de rouge.» Evertaert-Desmedt
- Un tertian est de l'ordre des lois
 - Une règle

Isabelle Bloch

Representamen, objet, interprétant

- Le signe est triadique et composé de 3 éléments qui sont des **fonctions** et non des attributions
 - Le representamen : R
 - L'objet O : ce qui représenté par R
 - L'interprétant I : ce qui met en relation R et O
- Ces 3 places sont des **fonctions** identifiées dans un processus sémiotique donné
 - 'Pomme' representamen de l'objet pomme
 - 'Pomme' interprétant du mot 'golden'
 - 'Pomme' objet du mot 'mela' dans une traduction

Isabelle Bloch

Les définitions du signe chez Peirce

- <ftp.univ-perp.fr/pub/semiotics/marty/76-fr.zip>
- **1868** Un signe a, comme tel, trois références : premièrement il est un signe pour quelque pensée qui l'interprète ; deuxièmement, il est un signe qui tient lieu de quelque objet auquel il est équivalent dans cette pensée ; troisièmement il est un signe, sous quelque rapport ou qualité, qui le met en connexion avec cet objet. Posons-nous la question de savoir ce que sont les trois corrélats auxquels une pensée-signé réfère
- **1873** Un signe est quelque chose qui représente une autre chose pour un esprit. Pour son existence comme tel trois choses sont requises. En premier lieu, il doit avoir des caractères qui nous permettront de le distinguer des autres objets. En second lieu, il doit être affecté d'une façon ou d'une autre par l'objet qui est signifié ... En troisième lieu chaque représentation s'adresse à un esprit. C'est seulement pour autant qu'elle fait ceci qu'elle est une représentation

Isabelle Bloch

B. Le processus interprétatif

- L'interprétation de la signification fait partie du signe lui-même
- Un signe est donc toujours en partie indéterminé
 - Il va de détermination en détermination → processus de précision des interprétations
 - Significations publiques et privées relèvent d'un processus de connaissance
- La nature du didactique détermine certaines interprétations → transposition didactique

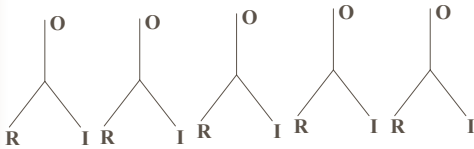
Isabelle Bloch

Le processus interprétatif : schéma

■ La triade signe :



■ Le processus sémiotique :



Isabelle Bloch

Le processus interprétatif : dynamique

- ‘Ma définition est la suivante : UN REPRESENTAMEN est sujet d’une relation triadique avec un second appelé son OBJET, POUR un troisième appelé son INTERPRETANT, cette relation triadique étant telle que le REPRESENTAMEN détermine son interprétant à entretenir la même relation triadique avec le même objet pour quelque interprétant.’
- L’interprétant devient à son tour Representamen etc...
→ interprétant final
- Ainsi une expression $y^2 - 2y + 121$ peut représenter le discriminant d’une équation du second degré, puis une fonction de y dont on étudie le signe en traçant la parabole ... dans une progression des interprétants

Isabelle Bloch

Aspect formel et dynamique

- La triadisation permet d’obtenir un système formel de saisie du processus interprétatif
- En même temps, la sémiotique de Peirce poursuit des processus d’interprétation
- sémiose : l’interprétant comme marque formelle du pragmatique (le temps, les dérives interprétatives...) + saisie formelle des moments de l’interprétation : la pensée et son ‘contenu’

Isabelle Bloch

La triadisation du triplet (R, O, I)

- Selon Peirce, chacune des trois instances du signe peut relever de la priméité, secondéité, ou tiercéité
- Le representamen peut être :
 - Un qualisigne 1 : une apparence
 - Un sinsigne 2 : un signe singulier
 - Un légisigne 3 : une loi générale
- Un légisigne doit toujours être (ou est toujours) matérialisé dans un sinsigne qui sera dit **réplique du légisigne** (Cf. type / token).

Isabelle Bloch

La triadisation du triplet (R, O, I) (suite)

- Le rapport du representamen à l’objet peut être :
 - Une icône 1 : qui ressemble à son objet **Une petite tour Eiffel comme signe de la vraie**
 - Un indice 2 : qui est en lien réel avec son objet **Une petite tour Eiffel pour évoquer Paris**
 - Un symbole 3 : le lien entre R et O est établi par une loi **Quel est le principe de construction de la tour Eiffel ?**
- L’interprétant est :
 - Un rhème 1 : interprète R/O par les qualités de R
 - Un dicisigne 2 : interprète un lien R/O (proposition) ; c’est un signe qui a la prétention à dire quelque chose de vrai, qui est interprété comme réellement affecté par son objet. Donc il peut être vrai ou faux
 - Un argument 3 : I formule la règle qui lie R et O

Isabelle Bloch

Les classes de signes

- Les signes sont hiérarchisés : on n’obtient donc pas 27 signes différents mais 10
- Un qualisigne ne peut être qu’une icône et un rhème
- Par contre un légisigne peut entretenir un rapport indicial à son objet ; et même être interprété comme une qualité → **déflation interprétative**
- → Logique des catégories

Isabelle Bloch

Exemple de 'déflation interprétative' : la proportionnalité

- Un tableau de proportionnalité
 - Le tableau comme icône
 - Le tableau comme indice
 - Le tableau comme argument
- *'Un argument est un signe dont l'interprétant représente son objet, comme étant un signe ultérieur par le moyen d'une loi'* Peirce, 1978.
- Ceci suppose la connaissance de la règle interprétative par l'interprète

Isabelle Bloch

Le treillis des classes de signes

| | R | O | I |
|---------------------------------|---|---|---|
| Qualisigne iconique rhématique | 1 | 1 | 1 |
| Sinsigne iconique rhématique | 2 | 1 | 1 |
| Sinsigne indiciel rhématique | 2 | 2 | 1 |
| Sinsigne indiciel dicent | 2 | 2 | 2 |
| Légisigne iconique rhématique | 3 | 1 | 1 |
| Légisigne indiciel rhématique | 3 | 2 | 1 |
| Légisigne indiciel dicent | 3 | 2 | 2 |
| Légisigne symbolique rhématique | 3 | 3 | 1 |
| Légisigne symbolique dicent | 3 | 3 | 2 |
| Légisigne symbolique argumental | 3 | 3 | 3 |

Isabelle Bloch

L'utilisation du treillis des classes de signes

- Un signe n'est jamais **en soi** dans telle ou telle classe
- Importance du contexte de l'interprétation
- Le tableau représente des **niveaux d'interprétation** auxquels on peut soumettre un phénomène (Chauviré)
- Un representamen sera interprété de façon variable selon la sémiose dans laquelle se trouve l'interprétant effectif
- Un signe produit à un certain niveau peut être interprété à un niveau inférieur

Isabelle Bloch

Le rapport entre signes, sens et pensée

- 'Essayer de déchirer les signes et de descendre jusqu'au sens même, c'est comme essayer de peler un oignon et de descendre jusqu'à l'oignon même' (cité par Tiercelin).
- La compréhension ne précède pas la reconnaissance, elles opèrent dans une dialectique → c'est l'interprétant final qui est le sens
- Lien avec la conception wittgensteinienne de nécessité

Isabelle Bloch

Exemple : la numération décimale

- Tous les signes mathématiques sont des légisignes
- Distinguer les éléments du signe
 - Le signe entier – relation entre representamen, objet, interprétant – noté (145)
 - Le representamen noté « 145 »
 - L'objet du signe noté -145 -
- Soit un interprète mathématique (interprétant 'idéal') de « 3 » : **légisigne symbolique dicent**
- Soit un interprétant idéal de « 145 » : **légisigne symbolique argumental** (argument)

Isabelle Bloch

III. L'APPROCHE SEMIOTIQUE EN DIDACTIQUE

- L'analyse en termes de signes ne préjuge absolument pas de la situation qui devra être organisée pour déboucher sur des connaissances et des savoirs mathématiques et donc, sur des interprétants idoines cf. Bloch 2003, les fonctions
- Mais le fait d'avoir analysé les interprétants finaux souhaités peut aider à construire une situation, ou à mener son analyse a priori
- Analyser des tâches en termes sémiotiques
 - Voir A. Muller, Raisons Educatives n°7

Isabelle Bloch

A. Analyser les organisations sémiotiques en mathématiques pour construire des milieux

- Dans l'enseignement secondaire ou supérieur, les milieux matériels sont constitués de symboles d'objets fortement mathématisés
- Exemple des fonctions : analyse des sémioses possibles → construction de situation, analyse du milieu ...
- Dans le courant de la situation, les signes produits sont une part du processus d'interprétation
- Exemple : dans la situation du flocon
 $A_n = A_0 [8/5 - 3/5 \cdot (4/9)^n]$ Ici $(4/9)^n$ est un signe de fonction

Isabelle Bloch

B. Analyser les interactions dans une situation

- Les interactions des élèves avec une situation peuvent être analysées dans une perspective peircienne
 - Entropie phénoménologique qui doit être refermée sur le savoir
 - Interprétations non-conformes aux canons maths
 - Déflation interprétative
- Ceci retourne la question au didactique : quelles situations pour un savoir donné ? quels phénomènes d'interprétation dans ces situations ? Comment atteindre le savoir ?

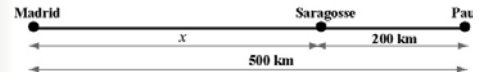
Isabelle Bloch

Analyse des situations 'ordinaires'

- Phénomènes de transposition didactique :
 - Objet de savoir implanté dans une institution didactique sans situations pertinentes, puis rehaussé en 'savoir savant' : TD *stricto sensu* cf. la valeur absolue
 - Déflation interprétative 'compensée' par une inflation de moyens 'pédagogiques' : transposition didactique *lato sensu* cf. l'algèbre au collège

Isabelle Bloch

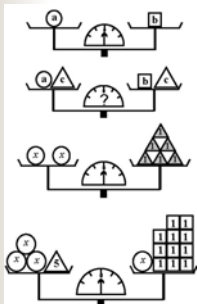
Exemple d'analyse d'une situation de classe 'ordinaire'



1. La tentative de dévolution
 - a) Indiquer la distance x de Madrid à Saragosse
 - b) Si la température maximale aujourd'hui à Athènes est de 16° , et qu'elle a monté de 4° depuis hier, quelle était la température maximale hier à Athènes ?
 - c) Si la température maximale aujourd'hui à Moscou est de 3° , et qu'elle a monté de 10° depuis hier, quelle était la température maximale hier à Moscou ?
- Le signe de la situation n'est pas conforme au projet : ce n'est pas un argument de résolution algébrique

Isabelle Bloch

2. L'exemple de résolution générale



Le professeur dit qu'il faut barrer les éléments égaux sur les deux plateaux de la balance, puis qu'il faut diviser les équilibres par 2

$$x + x = 6$$

Ces signes ne correspondent pas aux signes du calcul : non congruence

$$3x - x = 11 - 5$$

Isabelle Bloch

C. De l'analyse sémiotique à la construction de situation : la multiplication

- Les phénomènes interprétatifs dans une classe d'enseignement spécialisé (Es de 13/14 ans) : généralisation de la déflation interprétative
- Le savoir désigné institutionnellement n'est pas relié par les élèves aux tâches prescrites
- Exemple : la multiplication
 - $63 = 6$ dizaines + 3 unités est un **argument** dans la numération décimale
 - 7×9 est l'**indice** d'un produit mais pas plus : **quel nombre** ?
 - 63 n'est pas même l'**icône** d'un produit

Isabelle Bloch

Première situation : le loto de la table de Pythagore

- Les élèves disposent chacun des 100 cartes : les produits, et d'une table vierge
- On tire 4 cartes et on les pose sur la table ; puis on tire une carte ; on ne peut la poser que si elle a un bord commun avec une carte déjà posée
- Les élèves découvrent que 64 ne suit pas 63... La **structure** de la table devient perceptible

Isabelle Bloch

La table de Pythagore : le signe des fréquences

| × | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

Isabelle Bloch

Deuxième situation : les fréquences

- Colorier la table suivant les fréquences d'apparition des nombres
- Ceci oblige à se demander pourquoi 12 apparaît 4 fois ... et à se guider sur les lignes et les colonnes
- La table fournit un signe de ce qu'un nombre est un produit – et même de plusieurs façons
- La tâche qui apparaît est une tâche de **décomposition en facteurs** et non plus : effectuer un produit
- Ecrire toutes les décompositions possibles des nombres connus

Isabelle Bloch

Les effets de la situation

- C'est une situation « retournée » : on ne demande plus d'effectuer un produit mais on connaît le produit et on veut le placer sur la table, ou reconnaître sa fréquence
- Ceci impose une reconnaissance de la structure de la table
- La situation oblige les élèves à interpréter les signes-nombres comme des arguments de produits : la table est un signe de la nécessité
- Le contrat didactique peut alors être reconnu **dans une démarche d'abduction** et la multiplication devient opérationnelle

Isabelle Bloch

CONCLUSION

- L'analyse des phénomènes d'interprétation dans l'enseignement des mathématiques doit prendre en compte la nature provisoire des interprétants
- Un diagnostic des difficultés d'apprentissage met en lumière une déflation interprétative liée à un contrat didactique défaillant côté élève et/ou institution
- La situation **est un signe** : ce signe est déterminant dans la construction des interprétations possibles et la démarche reconnaissant la **nécessité** des énoncés mathématiques
- Le processus d'interprétation est alors indissociable : Situation / Élèves / professeur / contrat didactique

Isabelle Bloch

Bibliographie

- Berte A. 1994 *Les signes en mathématiques* CIAEM Toulouse
- Chauviré C. 1995 '*Peirce et la signification*' PUF
- Deledalle G. 1990 '*Lire Peirce aujourd'hui*' De Boeck
- Everaert-Desmedt N. 1990 '*Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce*' Liège : Mardaga.
- Marty R. 1990 '*L'algèbre des signes*' Amsterdam : John Benjamins.
- Marty R. 1992 '*99 réponses sur la sémiotique*' CRDP Montpellier

Isabelle Bloch

Bibliographie

Longo G. L'infini et les preuves en mathématiques

Peirce C.S. 1978 '*Écrits sur le signe*'

Peirce C.S. 1995 (Cahiers de Cambridge, 1878) '*Le raisonnement et la logique des choses*'. Paris : Éditions du Cerf

Tiercelin C. 1993a '*C.S. Peirce et le pragmatisme*'
Paris : PUF

Tiercelin C. 1993b '*La pensée signe. Études sur C.S. Peirce*' Nîmes : Jacqueline Chambon.