DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Si ha una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo aperto.

Supponiamo f **due volte derivabile** in I, cioè possiamo calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$ per ogni $x \in I$.

Definiamo la funzione

$$g(x) = f''(x) \quad \forall x \in I.$$

Se g è derivabile in un punto $x \in I$, allora $g'(x)$ ($=$ derivata di f'' nel punto x) si chiama **derivata terza di f in x** e si denota $f'''(x)$.

Per induzione si definiscono le **derivate quarta, quinta, ..., n-esima** di f in un punto $x \in I$, e si denotano

$$f^{(4)}(x),\ f^{(5)}(x), \ldots, f^{(n)}(x).$$

Altra notazione: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x)$

[Terminologia: derivata n-esima $=$ derivata di ordine n]

Esercizio 1. Calcolare tutte le derivate della funzione

$$f(x) = 3 - 7x^2 + (x-2)^3 - 4(x-2)^5.$$

$$f'(x) = -14x + 3(x-2)^2 - 20(x-2)^4$$

$$f''(x) = -14 + 6(x-2) - 80(x-2)^3$$

$$f'''(x) = 6 - 240(x-2)^2$$

$$f^{(4)}(x) = -480(x-2)$$

$$f^{(5)}(x) = -480$$

$$f^{(6)}(x) = f^{(7)}(x) = f^{(8)}(x) = \ldots = 0$$

Osservazioni.

- La derivata di un polinomio di grado k è un polinomio di grado $(k-1)$.
- Un polinomio è derivabile infinite volte e tutte le sue derivate sono polinomi.
- Dato un polinomio di grado k, tutte le sue derivate di ordine $n > k$ sono nulle.

Esercizio 2. Calcolare tutte le derivate della funzione

$$f(x) = e^x.$$

$$f'(x) = e^x,\ \ f''(x) = e^x,\ \ f'''(x) = e^x, \ldots$$

cioè

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Esercizio 3. Calcolare tutte le derivate della funzione

$$f(x) = \sin x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x & f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(6)}(x) &= -\sin x \\ f^{(7)}(x) &= -\cos x & f^{(8)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & \textsf{se } n = 4,\ 8,\ 12, \ldots \\ \cos x & \textsf{se } n = 1,\ 5,\ 9, \ldots \\ -\sin x & \textsf{se } n = 2,\ 6,\ 10, \ldots \\ -\cos x & \textsf{se } n = 3,\ 7,\ 11, \ldots \end{cases}$$

Compito. Calcolare tutte le derivate di $\cos x$ e $\log x$.

POLINOMIO DI TAYLOR

Problema: data una funzione $f\colon (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ trovare un polinomio $P(x)$ che "approssimi" f vicino a x_0.

Motivazione: i polinomi sono le funzioni più semplici per il calcolo.

Ipotesi: f derivabile fino all'ordine n nel punto x_0.

Strategia: cerco un polinomio di grado n della forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

dove le costanti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vanno scelte in modo che

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ P'(x_0) = f'(x_0) \\ P''(x_0) = f''(x_0) \\ \ldots \\ P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

[In questo senso il polinomio $P(x)$ approssima la funzione $f(x)$ vicino al punto x_0]

Calcolo delle derivate di

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$P'(x) = 0 + a_1 + 2\cdot a_2(x-x_0) + 3\cdot a_3(x-x_0)^2 + \cdots + n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P''(x) = 0 + 0 + 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x-x_0) + \cdots + (n-1)\cdot n\cdot a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Eccetera

$$P^{(n)}(x) = 0+0+0+0 + \cdots + [2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n\cdot a_n]$$

Quindi

$$\begin{cases} f(x_0) = P(x_0) = a_0 \\ f'(x_0) = P'(x_0) = a_1 = 1!\,a_1 \\ f''(x_0) = P''(x_0) = 2\cdot a_2 = 2!\,a_2 \\ \dots \\ f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0) = 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n\cdot a_n = n!\,a_n \end{cases}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \\ &\qquad + \cdots + a_n(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\qquad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

cioè

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

[convenzione $f^{(0)} = f$]

Ricorda che $0! = 1$ (per definizione)

Il polinomio così trovato si chiama **polinomio di Taylor di f all'ordine n nel punto x_0.**

Nel caso $x_0 = 0$, il polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

si chiama anche **polinomio di McLaurin**.

Esercizio. Scrivere il polinomio di Taylor al secondo ordine nel punto e per la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln x).$$

La formula da applicare è:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

con $x_0 = e$.

Calcolo

$$f'(x) \ = \ \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} \ = \ \frac{1}{x\left(1 + (\ln x)^2\right)}$$

$$f''(x) \ = \ -\frac{\left(1 + (\ln x)^2\right) + x\,(2\ln x)\,\dfrac{1}{x}}{\left[x\left(1 + (\ln x)^2\right)\right]^2}$$

$$= \ -\frac{1 + (\ln x)^2 + 2\ln x}{\left[x\left(1 + (\ln x)^2\right)\right]^2}$$

Quindi

$$f(e) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,, \quad f'(e) = \frac{1}{2e}\,, \quad f''(e) = -\frac{4}{(2e)^2} = -\frac{1}{e^2}$$

In conclusione

$$P(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x - e}{2e} - \frac{(x - e)^2}{2e^2}\ .$$

Fissata una funzione $f(x)$ e un punto x_0 (in cui f sia derivabile infinite volte), possiamo scrivere infiniti polinomi di Taylor:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$\begin{aligned} P_3(x) = {} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 \end{aligned}$$

eccetera.

L'approssimazione $f(x) \approx P_n(x)$ sarà tanto più buona quanto più grande è n.

Esempio: polinomi di McLaurin di $f(x) = \sin x$.

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

So già che

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } k = 0,\ 4,\ 8, \ldots \\ \cos x & \text{se } k = 1,\ 5,\ 9, \ldots \\ -\sin x & \text{se } k = 2,\ 6,\ 10, \ldots \\ -\cos x & \text{se } k = 3,\ 7,\ 11, \ldots \end{cases}$$

Quindi

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } k = 1,\ 5,\ 9, \ldots \\ -1 & \text{se } k = 3,\ 7,\ 11, \ldots \end{cases}$$

Allora

$$P_1(x) = x \qquad\qquad P_2(x) = P_1(x)$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \qquad\qquad P_4(x) = P_3(x)$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad P_6(x) = P_5(x)$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \qquad\qquad P_8(x) = P_7(x)$$

Valutazione dell'errore

Considero una funzione $f(x)$ e un punto x_0 in cui f sia derivabile infinite volte.

Scrivo il polinomio di Taylor di f in x_0 all'ordine n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

In generale non ho che $f(x) = P_n(x)$ ma $f(x) \approx P_n(x)$.

Più precisamente

$f(x) = P_n(x) + R(x)$ dove $R(x) = R_n(x)$ è il resto o errore

Non solo $R(x) \to 0$ per $x \to x_0$ ma, più in generale, si ha:

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

[Il resto è tanto più trascurabile quanto più grande viene preso n]

Definizione di “o piccolo”

Una funzione $g(x)$ si dice “o piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \longrightarrow x_0$” se

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \longrightarrow x_0$$

In tal caso si scrive

$$g(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \longrightarrow x_0$$

Più in generale, date due funzioni $g(x)$ e $h(x)$, diciamo che “ $g(x)$ è un o piccolo di $h(x)$ per $x \longrightarrow x_0$” se

$$\frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow 0 \quad \text{per } x \longrightarrow x_0$$

In tal caso si scrive

$$g(x) = o(h(x)) \quad \text{per } x \longrightarrow x_0$$

Esempi. Data $g(x) = x^{7/3}$ stabilire se

- $g(x) = o(x)$ per $x \longrightarrow 0$
- $g(x) = o(x^2)$ per $x \longrightarrow 0$

• $g(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$.

Risposte:

$$g(x) = o(x) \text{ per } x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x)}{x} \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Ma

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{x^{7/3}}{x} = x^{4/3} \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Quindi $g(x) = o(x)$ per $x \to 0$.

$$g(x) = o(x^2) \text{ per } x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x)}{x^2} \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Ma

$$\frac{g(x)}{x^2} = \frac{x^{7/3}}{x^2} = x^{1/3} \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Quindi $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$.

$$g(x) = o(x^3) \text{ per } x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x)}{x^3} \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Ma

$$\frac{g(x)}{x^3} = \frac{x^{7/3}}{x^3} = \frac{1}{x^{2/3}} \to +\infty \text{ per } x \to 0$$

Quindi $g(x)$ NON è $o(x^3)$ per $x \to 0$.

Torniamo a esaminare la valutazione dell'errore nella formula

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \ .$$

Dire che

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

significa che

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0 \ .$$

Perciò possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0 \ .$$

È la **formula o sviluppo di Taylor col resto di Peano (nel punto x_0 all'ordine n)**.

Esercizio. Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine nel punto e per la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln x).$$

So già che il polinomio di Taylor per f al secondo ordine nel punto e è:

$$P(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-e}{2e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} \ .$$

Quindi la formula di Taylor è

$$\arctan(\ln x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-e}{2e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} + o\left((x-e)^2\right)$$

per $x \to e$.