Variabili Aleatorie Discrete

Definizione:
dato (Ω, P) spazio di probabilità discreto, diciamo **variabile aleatoria(discreta)**(v.a) una funzione

$$\boxed{\begin{aligned} X: \ \ \Omega &\longmapsto \mathbf{R}, \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}}$$

- Poichè lo spazio campionario Ω è discreto i valori assunti dalla v.a. X costituiscono una successione a valori reali $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$;

- per ogni $a \in \mathbf{R}$ ha senso considerare l'evento $\{\omega \in \Omega \quad ; \quad X(\omega) = a\}$ che per brevità indichiamo $(X = a)$;

- allo stesso modo dati $a, b \in \mathbf{R}$ o un generico $I \subset \mathbf{R}$ scriviamo:

$$(a < X < b) = \{\omega \in \Omega \quad ; \quad a < X(\omega) < b\}$$

$$(X \in I) = \{\omega \in \Omega \quad ; \quad X(\omega) \in I\}$$

Distribuzione di X.

Data X variabile aleatoria (discreta) su (Ω, P) diciamo **distribuzione** (o legge) di X, l'applicazione che ad ogni intervallo (o più generalmente insieme) $I \subset \mathbf{R}$ associa la probabilità $P(\{\omega; X(\omega) \in I\})$.
Ossia:

$$\boxed{I \subset \mathbf{R} \qquad I \longmapsto P(\{\omega; X(\omega) \in I\}).}$$

Anche in questo caso scriveremo per brevità $(X \in I) = \{\omega; X(\omega) \in I\}$.

Densità discreta.

Data uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) ed una variabile aleatoria:

$$X : \Omega \longmapsto \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{R},$$

Diciamo **densità** (discreta) di X l'applicazione:

$$\boxed{\begin{aligned} p_X : \quad \{x_i\}_{i=1}^{\infty} &\longmapsto [0,1] \\ x_i &\longmapsto P(X = x_i). \end{aligned}}$$

- Dato $x \in \mathbf{R}$, si pone per definizione:

$$\boxed{p_X(x) = 0 \text{ se } x \neq x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \ldots};$$

- Vale la seguente proprietà:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1}.$$

Calcolo di Distribuzioni Discrete.

Sia $X : \Omega \mapsto \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una v.a. discreta e $p_X(x)$ la sua densità.
Poichè per ogni $I \subset \mathbf{R}$ si ha:

$$(X \in I) = \bigcup_{x_i \in I} (X = x_i),$$

ove l'unione è chiaramente disgiunta, la distribuzione di X è definita per ogni $I \subset \mathbf{R}$ da:

$$\boxed{\begin{aligned} I \mapsto P(X \in I) &= \sum_{x_i \in I} P(X = x_i) \\ &= \sum_{x_i \in I} p_X(x_i). \end{aligned}}$$

Dunque lo studio della distribuzione di una variabile aleatoria discreta X è ricondotta al calcolo di serie, che spesso si ridurranno a somme finite.

Studio di un fenomeno aleatorio.

Il modello fondamentale di fenomeno aleatorio sarà costituito da:

- uno spazio di probabilità (discreto) (Ω, P) (di cui spesso ignoriamo la descrizione);
- X_i variabili aleatorie (d'ora in poi v.a.);
- $I \longmapsto P(X_i \in I)$ distribuzioni di cui studieremo le proprietà.

Variabili aleatorie indipendenti

Definizione.
Diciamo che le v.a. discrete X, Y sono **indipendenti** se per ogni $I, J \subset \mathbf{R}$ si ha:

$$\boxed{P\{X \in I, Y \in J\} = P\{X \in I\}P\{Y \in J\}.}$$

Considerando che X e Y assumano rispettivamente i valori $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, possiamo equivalentemente dire che :

$$\boxed{P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},}$$

per ogni $i, j = 1, \ldots, \infty$.

Osservazione:
- se X e Y sono indipendenti, la conoscenza dei valori assunti da X non dà informazioni che influenzino la previsione di quelli assunti da Y e viceversa

Indipendenza di n variabili aleatorie

Più in generale diciamo che le v.a $X_1, \ldots X_n$ sono **indipendenti** se comunque scelti gli intervalli $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbf{R}$ si ha:

$$P(X_1 \in I_1, \ldots, X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1) \ldots P(X_n \in I_n).$$

Attenzione

- Nel caso di $n \geq 3$ variabili l'indipendenza non può essere verificata "*per punti*" come nel caso di due variabili;

- non è necessario considerare anche l'indipendenza k a k $(0 < k < n)$ come nel caso dell'indipendenza di n eventi.

Il processo di Bernoulli
o schema successo insuccesso

Diciamo **esperimento bernoulliano** o prova di Bernoulli una prova che può aver solo due esiti: *successo* (V) o *insuccesso* (F), rispettivamente con probabilità

$$\boxed{\begin{array}{l} P(V) = p \\ \\ P(F) = 1 - p, \end{array}}$$

dove $p \in (0,1)$ si dice **parametro** della prova di Bernoulli

Diciamo **processo di Bernoulli** una sequenza di prove di Bernoulli di uguale parametro $p \in (0,1)$ tra loro **indipendenti**

La sequenza può essere costituita da un numero finito di prove

oppure avere una infinità numerabile di prove, parliamo in quest'ultimo caso di processo di Bernoulli *illimitato*.

Processo di Bernoulli con numero finito di prove

Definizione. Data una prova di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$ diciamo

variabile bernoulliana di parametro p

la v.a. X che vale:

- 1 in caso di successo (V),
- 0 in caso di insuccesso (F).

Si scrive $X \sim \mathcal{B}(p)$ ed ha densità

$$\boxed{\begin{array}{l} p_X(1) = p \\ \\ p_X(0) = 1 - p \end{array}}$$

Variabile Aleatoria Binomiale

Definizione. Consideriamo un processo di Bernoulli di n prove di parametro $p \in (0,1)$.
Diciamo **variabile aleatoria binomiale di parametri n e p** la v.a.

X: numero di successi ottenuti nelle n prove.

X può assumere i valori $k = 0, 1, \ldots, n$;
Si indica $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ ed ha densità:

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1 \ldots n.}$$

Date $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$, **indipendenti**, si ha

$$\boxed{X = X_1 + \ldots + X_n \Rightarrow X \sim \mathcal{B}(n,p).}$$

La somma di n v.a. bernoulliane indipendenti, tutte con lo stesso parametro p è una v.a. binomiale di parametri (n,p).

Processi di Bernoulli illimitati

Dato un processo di Bernoulli illimitato di parametro $p \in (0, 1)$, consideriamo la v.a:

X: numero di prove necessario per ottenere il primo successo.

X è detta v.a **geometrica** di parametro p, si indica

$$\boxed{X \sim \mathcal{G}(p),}$$

assume i valori $X = 1, 2, \ldots$ ed ha densità

$$\boxed{p_x(k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots}$$

Assenza di memoria della v.a. geometrica

Data una v.a. geometrica $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in (0,1)$. Consideriamo h, m interi positivi. Si ha allora

$$\boxed{P(X = h + m | X > h) = P(X = m).}$$

Dunque se in un processo bernoulliano illimitato non abbiamo ottenuto alcun successo nelle prime h prove, la probabilità di dover attendere ancora m prove **è pari** alla probabilità di ottenere il primo successo dopo le prime m prove.

Ossia il numero di insuccessi ottenuti non influenza i successi successivi.

Tale proprietà, derivante dall'indipendenza delle prove, è detta *assenza di memoria* della v.a. geometrica, o del processo di Bernoulli illimitato

Variabile aleatoria geometrica traslata

Dato un processo di Bernoulli illimitato di parametro $p \in (0,1)$ diciamo v.a **geometrica traslata** la v.a.

Y: numero di insuccessi precedenti il primo successo;

si indica

$$\boxed{Y \sim \mathcal{G}'(p)}$$

assume valori $Y = 0, 1, \ldots$ ed ha densità

$$\boxed{P_Y(k) = p(1-p)^k, \quad K = 0, 1, \ldots}$$

Fissato $p \in (0,1)$ consideriamo $X \sim \mathcal{G}(p)$ e $Y \sim \mathcal{G}'(p)$, si ha allora ovviamente

$$X = Y + 1 \quad , \quad Y = X - 1$$

Variabile aleatoria binomiale negativa

Considerato un processo Bernoulliano di parametro $p \in (0, 1)$;
fissato n intero positivo;
indichiamo

Y : numero di insuccessi prima di ottenere n successi.

Y assume i valori $k = 0, 1 \ldots$, ha densità

$$\boxed{p_Y(k) = \binom{n+k-1}{j} p^n (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots ,}$$

è detta v.a. **v.a. binomiale negativa di parametri n e p** ed indicata:

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}(-n, p)}$$

Proprietà Ogni v.a. binomiale negativa $Y \sim \mathcal{B}(-n, p)$ può sempre essere ottenuta come somma:

$$\boxed{Y = Y_1 + \dots Y_n,}$$

dove $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathcal{G}'(p)$ (v.a. geometriche traslate) **indipendenti**

Osservazione

Per determinare la v.a.

X: numero di prove necessarie per ottenere i primi n successi,

è sufficiente osservare che:

$$\boxed{X = Y + n \qquad \text{dove} \qquad Y \sim \mathcal{B}(-n, p);}$$

X assume i valori $k = n, n + 1, \dots$ e ha densità:

$$\boxed{p_X(k) = \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1 \dots.}$$

Variabile aleatoria ipergeometrica

Dati n, b, r interi positivi,
Supponiamo di estrarre senza reimmissione un campione di n oggetti da un insieme che ne contiene r **R**ossi e b **B**ianchi.
Consideriamo ora la v.a.:

$X=$ numero di **R**ossi nel campione di n estratti.

X è detta v.a. **ipergeometrica** di parametri n, b, r; indicata con

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim \mathcal{G}(n, b, r), \\ \\ n \leq b + r,\ k \leq r,\ n - k \leq b, \end{array}}$$

assume i valori $k = 0, \ldots, r$ e ha densità:

$$\boxed{p_X(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, r.}$$

nota
- quando si fanno estrazioni con rimpiazzo (indipendenti) si usa la distribuzione **binomiale**
-quando si fanno estrazioni senza rimpiazzo (non indipendenti) si usa la distribuzione **ipergeometrica**

Approssimazione della v.a. ipergeometrica tramite la v.a binomiale

Consideriamo la v.a. ipergeometrica $X \sim \mathcal{G}(n, b, r)$. Fissati ora la grandezza n del campione estratto ed il rapporto $\boxed{p = r/(b+r)}$ si ottiene per ogni $k = 0, \ldots, r$

$$\boxed{p_X(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \overset{b+r\to\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Osservazione
Se la quantità del campione estratto è trascurabile rispetto al numero totale degli oggetti, ossia se $\boxed{b + r >> n}$, possiamo affermare che, posto $\boxed{p = r/b + r}$:

$$\boxed{\mathcal{G}(n, b, r) \text{ si può approssimare con } \mathcal{B}(n, p).}$$

Si può verificare empiricamente che l'approssimazione è ragionevole se $\boxed{\frac{n}{b+r} \leq 0.05}$.

Variabile aleatoria di Poisson

Dato $\lambda > 0$ (reale), la v.a. Y che assume valori $k = 0, 1, \ldots$, descritta della densità:

$$\boxed{p_Y(k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots\ ,}$$

è detta v.a. di **Poisson** di parametro λ e si indica $\boxed{X \sim \mathcal{P}_0(\lambda)}$

Osservazione

Consideriamo una v.a. binomiale di parametri n e p, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, e poniamo $\lambda = np$; si ha per ogni $k = 0, \ldots$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_X(k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

Proprietà.
Una v.a Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ con il parametro p piccolo e n grande può essere approssimata tramite una v.a. di Poisson $Y \sim \mathcal{P}_0(np)$

Conclusione: Consideriamo un processo bernoulliano con un numero di prove molto elevato e con probabilità di successo, per ogni singola prova, molto piccola. Assumiamo poi che il numero medio di successi un certo periodo (intervallo) di tempo sia λ. Allora la v.a.

Y: numero di successi nel periodo di tempo considerato

è una v.a di **Poisson** $Y \sim \mathcal{P}_0(\lambda)$

Proprietà:
data la famiglia di v.a. $X_i \sim \mathcal{P}_0(\lambda_i)$, tra di loro tutte **indipendenti** ($i = 1, \ldots, n$), si ha

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{P}_0(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$