

# Algebra lineare

## 1. Vettori: definizioni

### Definizione

Un **vettore**  $\mathbf{x}$  a  $n$  dimensioni è un insieme ordinato di  $n$  numeri

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

I numeri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono detti **componenti** del vettore  $\mathbf{x}$ .

I vettori possono essere scritti sotto forma di **vettori riga**

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

o di **vettori colonna**

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Per indicare la relazione tra vettore riga e vettore colonna si usa il simbolo T (operazione di **trasposizione**)

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

I vettori di due componenti possono essere rappresentati su un piano: le coordinate del punto  $P(x_1, x_2)$  coincidono con le componenti del vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ; l'insieme di tutti i vettori di due componenti si indica con  $\mathbf{R}^2$ .

Il vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  può essere anche identificato con il segmento orientato che unisce l'origine con il punto  $P(x_1, x_2)$  (vedi fig.1).

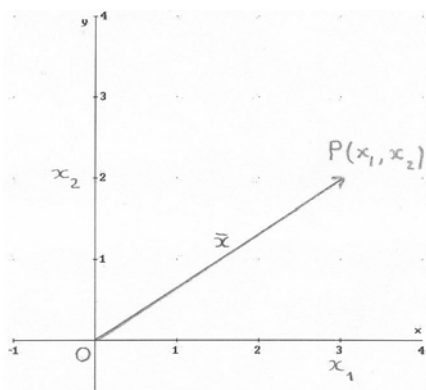


Fig. 1

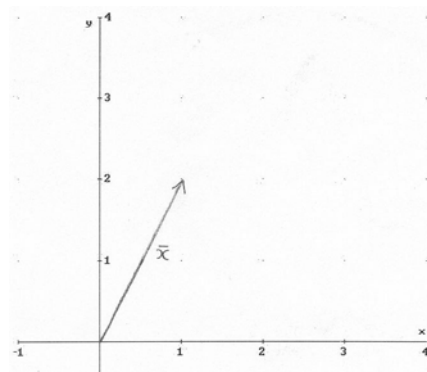


Fig. 2

Nella figura 2 è rappresentato come esempio il vettore  $\mathbf{x} = (1, 2)$ .

La corrispondenza biunivoca fra vettori a due componenti e punti del piano può essere estesa al caso di vettori a tre componenti, che possono essere rappresentati nello spazio tridimensionale; l'insieme di tutti i vettori a tre componenti viene quindi indicato con  $\mathbf{R}^3$ . Più in generale l'insieme di tutti i vettori con  $n$  componenti si indica con  $\mathbf{R}^n$ .

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  due vettori a  $n$  dimensioni

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

### Definizione

Due vettori sono **uguali** se le componenti con lo stesso indice sono uguali:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## 2. Operazioni fra vettori

Definiamo delle operazioni fra vettori e fra un vettore e uno scalare (numero reale) e esaminiamo in particolare il caso dei vettori in  $\mathbf{R}^2$ .

### Somma di vettori

Si definisce somma di due vettori

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

il vettore che si ottiene sommando ogni componente del primo vettore con la corrispondente componente del secondo vettore:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

### Esempi

$$\mathbf{x} = (-1, 0, 2, 4) \quad \mathbf{y} = (3, -2, 4, 8)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (2, -2, 6, 12)$$

$$\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4) \quad \mathbf{y} = (4, 3, 2, 1)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (5, 5, 5, 5)$$

### Proprietà della somma

1 – **Commutativa**  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

2 – **Associativa**  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

3 – Esistenza del **vettore nullo**

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

$\mathbf{0}$  è l'elemento neutro della somma:

$$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}$$

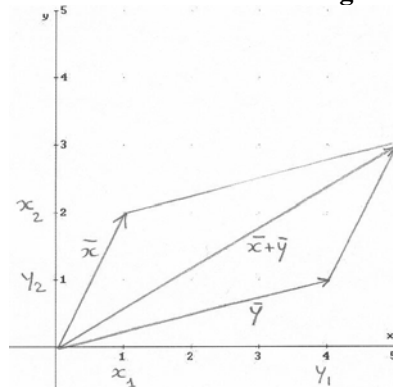
4 – Esistenza dell'**opposto** di un vettore

$$-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

La **differenza** di due vettori si definisce come somma del primo vettore con l'opposto del secondo

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

Rappresentazione geometrica della somma di due vettori in  $\mathbf{R}^2$ : **regola del parallelogramma**.



**Moltiplicazione di un vettore per uno scalare**

Dato un vettore  $\mathbf{x}$  e uno scalare  $c \in \mathbf{R}$ , il prodotto di  $\mathbf{x}$  per lo scalare  $c$  è un vettore che ha come componenti ogni componente di  $\mathbf{x}$  moltiplicata per  $c$

$$c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$

Esempi

$$\mathbf{x} = (1, 2, 3) \quad c = 4$$

$$c\mathbf{x} = (4, 8, 12)$$

$$\mathbf{x} = (-1, 0, 3, 5) \quad c = -2$$

$$c\mathbf{x} = (2, 0, -6, -10)$$

$$\mathbf{x} = (1, 2, 4, 8, 16) \quad c = \frac{1}{16}$$

$$c\mathbf{x} = \left( \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

**Proprietà** della moltiplicazione di un vettore per uno scalare

1 – Proprietà **distributiva rispetto agli scalari**  $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$

2 – Proprietà **distributiva rispetto ai vettori**  $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$

3 – Proprietà **associativa** rispetto agli scalari  $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$

**Definizione**

Due vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  si dicono **collineari** (o **paralleli**) se esiste uno scalare  $c \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq 0$ , tale che

$$\mathbf{x} = c\mathbf{y}$$

ossia le componenti sono proporzionali

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = c$$

Esempi

I vettori seguenti sono collineari

$$\mathbf{x} = (1, -6, 4, 2) \quad \mathbf{y} = \left( \frac{1}{2}, -3, 2, 1 \right)$$

Infatti

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{4}{2} = 2 \quad \frac{x_4}{y_4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$c = 2 \quad \mathbf{x} = 2\mathbf{y}$$

I vettori seguenti sono collineari

$$\mathbf{x} = (3, -9) \quad \mathbf{y} = (-3, 9)$$

Infatti

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{-3} = -1 \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$c = -1 \quad \mathbf{x} = -\mathbf{y}$$

I vettori seguenti non sono collineari

$$\mathbf{x} = (3, -9) \quad \mathbf{y} = (3, 9)$$

Infatti

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{-9}{9} = -1$$

I vettori seguenti non sono collineari

$$\mathbf{x} = (0,1,2) \quad \mathbf{y} = (1,0,-3)$$

Infatti

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{1}{0} = ? \quad \frac{x_3}{y_3} = -\frac{2}{3}$$

### Prodotto scalare di due vettori

Il prodotto scalare fra due vettori (o prodotto interno) è un'operazione che a due vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  associa un numero reale indicato con  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  (Si usa anche il simbolo  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ )

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

### Esempi

$$\mathbf{x} = (1,0,5,-1) \quad \mathbf{y} = (-2,3,0,7)$$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = -2 + 0 + 0 - 7 = -9$$

$$\mathbf{x} = (1,1,1,1) \quad \mathbf{y} = (0,-3,5,1)$$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0 - 3 + 5 + 1 = 3$$

$$\mathbf{x} = (1,2,3,4,5) \quad \mathbf{y} = (5,4,3,2,1)$$

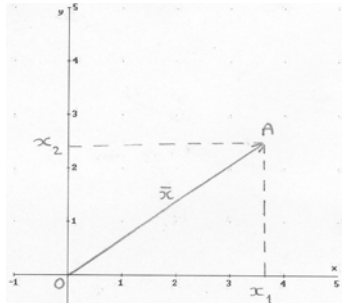
$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35$$

### Proprietà del prodotto scalare

- 1 - **Commutativa**  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (\mathbf{y} | \mathbf{x})$
- 2 - **Distributiva**  $((\mathbf{x} + \mathbf{y}) | \mathbf{z}) = (\mathbf{x} | \mathbf{z}) + (\mathbf{y} | \mathbf{z})$
- 3 -  $(c\mathbf{x} | \mathbf{y}) = c(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \quad c \in \mathbf{R}$

Dato il vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  in  $\mathbf{R}^2$ , il prodotto scalare di  $\mathbf{x}$  con se stesso è

$$(\mathbf{x} | \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$



Il prodotto  $(\mathbf{x} | \mathbf{x})$  è il quadrato della lunghezza del segmento OA (teorema di Pitagora). E' quindi naturale definire come **lunghezza del vettore x** la radice quadrata di  $(\mathbf{x} | \mathbf{x})$

$$\overline{OA} = \sqrt{(\mathbf{x} | \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Si può generalizzare a  $\mathbf{R}^n$ .

### Definizione

Si definisce **norma euclidea** di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  (o anche **lunghezza** del vettore) la quantità indicata con  $\|\mathbf{x}\|$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{(\mathbf{x} | \mathbf{x})}$$

### Esempi

$$\mathbf{x} = (3,0,4) \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\mathbf{x} = (2,-2,1,-1) \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{4+4+1+1} = \sqrt{10}$$

La norma di un vettore è un numero reale che ha le seguenti proprietà

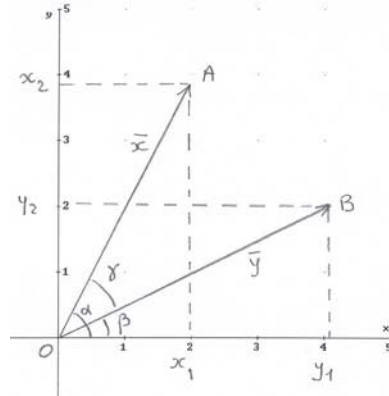
$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$$

Significato geometrico del prodotto scalare

Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori di  $\mathbf{R}^2$  non collineari



Si ha

$$x_1 = \overline{OA} \cos \alpha = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$$

$$x_2 = \overline{OA} \sin \alpha = \|\mathbf{x}\| \sin \alpha$$

$$y_1 = \overline{OB} \cos \beta = \|\mathbf{y}\| \cos \beta$$

$$y_2 = \overline{OB} \sin \beta = \|\mathbf{y}\| \sin \beta$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} | \mathbf{y}) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \beta + \|\mathbf{x}\| \sin \alpha \cdot \|\mathbf{y}\| \sin \beta = \\ &= \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\alpha - \beta) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \gamma \end{aligned}$$

Pertanto il prodotto scalare di due vettori di  $\mathbf{R}^2$  è uguale al prodotto delle loro lunghezze per il coseno dell'angolo  $\gamma$  compreso fra i due vettori

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \gamma$$

Essendo

$$|\cos \gamma| \leq 1 \quad \forall \gamma$$

si conclude che

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Si può generalizzare a ogni coppia di vettori di  $\mathbf{R}^n$  e si ha la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$$

### Definizione

Due vettori  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  di  $\mathbf{R}^n$  non nulli si dicono **ortogonali**, e si scrive  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ , se il loro prodotto scalare è nullo

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$$

Caso particolare  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  (vettori non nulli):  
dalla relazione

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \gamma$$

poiché i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  non sono nulli, si ha

$$\|\mathbf{x}\| \neq 0 \quad \|\mathbf{y}\| \neq 0$$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

ossia i vettori sono perpendicolari.

Esempi

$\mathbf{x} = (1,0)$      $\mathbf{y} = (0,1)$     sono ortogonali:

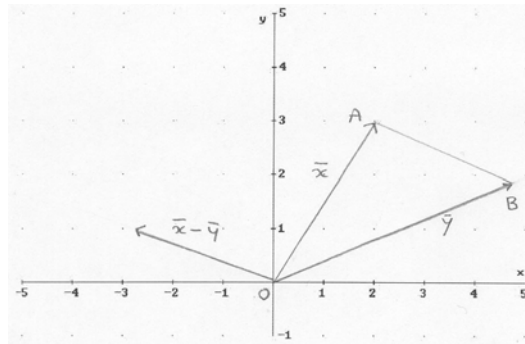
$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$$

$\mathbf{x} = (2,-1,0)$      $\mathbf{y} = (3,6,-5)$     sono ortogonali:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$$

Dati due vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ , la loro **distanza** (distanza fra due punti del piano) può essere definita come la lunghezza del segmento AB: tale lunghezza è uguale alla lunghezza (norma) di  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Esempio

Distanza fra i vettori

$$\mathbf{x} = (4,-1) \quad \mathbf{y} = (1,2)$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (3,-3)$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Esempio

Dati i vettori

$$\mathbf{x} = (1,0) \quad \mathbf{y} = (4,-1) \quad \mathbf{z} = (-1,4) \quad \mathbf{w} = (2,-2)$$

trovare qual è il vettore che ha la distanza minore dal vettore  $\mathbf{v} = (1,2)$ .

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{v} = (0,-2) \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \sqrt{0+4} = 2$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2$$

In modo analogo

$$\mathbf{y} - \mathbf{v} = (3,-3) \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \sqrt{18}$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{v} = (-2,2) \quad \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \sqrt{8}$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = (1,-4) \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sqrt{17}$$

Il vettore che ha la minor distanza da  $\mathbf{v}$  è il vettore  $\mathbf{x}$ ; quello che ha la distanza maggiore è  $\mathbf{y}$ .

Esempio

Dati i vettori

$$\mathbf{x} = (c,4) \quad \mathbf{y} = (2,3)$$

determinare il valore della costante  $c \in \mathbf{R}$  in modo che:

- 1 – siano collineari;
- 2 – siano ortogonali;
- 3 – la loro distanza sia 1;
- 4 – la loro distanza sia 2.

1 – collineari:

$$\frac{c}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{8}{3}$$

2 – ortogonali: prodotto scalare = 0

$$2c + 12 = 0 \Rightarrow c = -6$$

3 – distanza = 1

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (c - 2, 1)$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(c - 2)^2 + 1}$$

$$\sqrt{(c - 2)^2 + 1} = 1 \Rightarrow (c - 2)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (c - 2)^2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

4 – distanza = 2

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (c - 2, 1)$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(c - 2)^2 + 1}$$

$$\sqrt{(c - 2)^2 + 1} = 2 \Rightarrow (c - 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow (c - 2)^2 = 3 \Rightarrow c = 2 \pm \sqrt{3}$$

### Esempio

Dati i vettori

$$\mathbf{x} = (3, 1, -1, 2) \quad \mathbf{y} = (1, 0, -2, 3) \quad \mathbf{z} = (-4, -1, 3, -5)$$

determinare il valore delle costanti  $a, b \in \mathbf{R}$  in modo che il vettore

$$\mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + \mathbf{z}$$

1 – abbia le prime due componenti nulle;

2 – abbia le ultime due componenti uguali a 1.

1 – prime due componenti nulle:

$$a\mathbf{x} = (3a, a, -a, 2a) \quad b\mathbf{y} = (b, 0, -2b, 3b)$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + \mathbf{z} = (3a + b - 4, a - 1, -a - 2b + 3, 2a + 3b - 5)$$

$$\begin{cases} 3a + b - 4 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$a = 1 \quad b = 1$$

2 – ultime due componenti uguali a 1

$$\begin{cases} -a - 2b + 3 = 1 \\ 2a + 3b - 5 = 1 \end{cases}$$

$$a = 6 \quad b = -2$$

### **Definizione**

Siano  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$   $k$  vettori di  $n$  componenti e  $c_1, c_2, \dots, c_k$   $k$  scalari; si definisce **combinazione lineare** dei vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  con coefficienti  $c_1, c_2, \dots, c_k$  il vettore

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$$

### Esempi

$$\mathbf{v}_1 = (2, 4) \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1)$$

$$c_1 = 3 \quad c_2 = 2$$

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 3(2, 4) + 2(0, 1) = (6, 12) + (0, 2) = (6, 14)$$

$\mathbf{x}$  è combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  di coefficienti  $c_1$  e  $c_2$ .

$$\mathbf{v}_1 = (3, 0, 1) \quad \mathbf{v}_2 = (-6, -1, 1)$$

$$c_1 = 2 \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 2(3, 0, 1) + \frac{1}{2}(-6, -1, 1) = (6, 0, 2) + \left(-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(3, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$\mathbf{x}$  è combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  di coefficienti  $c_1$  e  $c_2$ .

Dati  $k$  vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  di  $\mathbf{R}^n$ , e  $k$  scalari  $c_1, c_2, \dots, c_k$  è immediato ricavare il vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , di coefficienti  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .

E' più difficile invece, assegnato un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , stabilire se  $\mathbf{x}$  è esprimibile come combinazione lineare di  $k$  vettori assegnati  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  di  $\mathbf{R}^n$ , ossia se esistono  $k$  scalari  $c_1, c_2, \dots, c_k$  tali che

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$$

#### Esempio

Stabilire se il vettore  $\mathbf{x} = (2, -3)$  è esprimibile come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1) \quad \mathbf{v}_2 = (-2, 5)$$

Si deve stabilire se esistono due scalari  $c_1, c_2$  tali che

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = c_1(1, 1) + c_2(-2, 5) = (c_1, c_1) + (-2c_2, 5c_2) = (c_1 - 2c_2, c_1 + 5c_2)$$

Deve essere

$$(c_1 - 2c_2, c_1 + 5c_2) = (2, -3)$$

$$\begin{cases} c_1 - 2c_2 = 2 \\ c_1 + 5c_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{4}{7} \\ c_2 = -\frac{5}{7} \end{cases}$$

#### Esempio

Stabilire se il vettore  $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$  è esprimibile come combinazione lineare dei vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -5) \quad \mathbf{v}_2 = (4, 3, 2)$$

Si deve stabilire se esistono due scalari  $c_1, c_2$  tali che

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$$

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = c_1(1, 0, -5) + c_2(4, 3, 2) = (c_1 + 4c_2, 3c_2, -5c_1 + 2c_2)$$

Deve essere

$$(c_1 + 4c_2, 3c_2, -5c_1 + 2c_2) = (0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} c_1 + 4c_2 = 0 \\ 3c_2 = 0 \\ -5c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

Il vettore  $\mathbf{x}$  non è combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .

La definizione di combinazione lineare consente di introdurre le definizioni di dipendenza e indipendenza lineare fra vettori.

#### **Definizione**

Si dice che  $k$  vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  sono **linearmente dipendenti** se almeno uno di essi può essere espresso come combinazione lineare degli altri, cioè se esistono  $k-1$  scalari  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$  tali che

$$\mathbf{v}_k = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}$$

(E' sempre possibile riordinare i vettori in modo che sia l'ultimo vettore ad essere esprimibile come combinazione lineare degli altri).

In caso contrario i vettori si dicono **linearmente indipendenti**.

Per verificare se  $k$  vettori sono linearmente indipendenti oppure no si usa il seguente teorema.

**Teorema**

$k$  vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  sono **linearmente indipendenti** se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli, ossia

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_m \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_k = 0$$

Esempio

I vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1,0) \quad \mathbf{v}_2 = (0,1)$$

sono linearmente indipendenti. Infatti

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$c_1(1,0) + c_2(0,1) = (0,0)$$

$$(c_1, c_2) = (0,0)$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0$$

I coefficienti  $c_1, c_2$  sono entrambi nulli.

Esempio

I vettori

$$\mathbf{v}_1 = (2,-1) \quad \mathbf{v}_2 = (-6,3)$$

sono linearmente dipendenti. Infatti

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$c_1(2,-1) + c_2(-6,3) = (0,0)$$

$$(2c_1 - 6c_2, -c_1 + 3c_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2c_1 - 6c_2 = 0 \\ -c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 3c_2 \\ c_1 = 3c_2 \end{cases}$$

Esiste una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli; basta prendere ad esempio

$$c_1 = 1, c_2 = 3$$

e si ha

$$3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

ossia i vettori sono linearmente dipendenti.

Esempio

I vettori

$$\mathbf{v}_1 = (3,0,-1) \quad \mathbf{v}_2 = (4,1,0) \quad \mathbf{v}_3 = (10,1,-2)$$

sono linearmente dipendenti. Infatti

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$c_1(3,0,-1) + c_2(4,1,0) + c_3(10,1,-2) = (0,0)$$

$$(3c_1 + 4c_2 + 10c_3, c_2 + c_3, -c_1 - 2c_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 3c_1 + 4c_2 + 10c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_3 \\ c_1 = -2c_3 \\ -6c_3 - 4c_3 + 10c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall c_3 \in \mathbf{R} \\ c_2 = -c_3 \\ c_1 = -2c_3 \end{cases}$$

Esiste una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli; basta prendere ad esempio

$$c_3 = 1, c_2 = -1, c_1 = -2$$

e si ha

$$-2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

ossia i vettori sono linearmente dipendenti.

### Esempi riassuntivi

Esempio 1 – Dati i vettori

$$\mathbf{x} = (1,1) \quad \mathbf{y} = (-1,-1)$$

calcolare il prodotto scalare e dire se sono ortogonali o collineari.

I vettori non sono ortogonali:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = -1 - 1 = -2.$$

I vettori sono collineari:

$$\frac{x_1}{y_1} = -1 \quad \frac{x_2}{y_2} = -1$$

Esempio 2 – Calcolare per quale valore del parametro  $k \in \mathbf{R}$  i vettori

$$\mathbf{x} = (k, -2, 3) \quad \mathbf{y} = (2, k, 0)$$

sono ortogonali.

Il prodotto scalare deve essere nullo:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 2k - 2k = 0 \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

I vettori sono ortogonali qualunque sia il valore assegnato al parametro  $k$ .

Esempio 3 – Calcolare per quale valore del parametro  $k \in \mathbf{R}$  i vettori

$$\mathbf{x} = (2, k) \quad \mathbf{y} = (3, 5)$$

sono ortogonali.

Il prodotto scalare deve essere nullo:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 6 + 5k = 0 \quad \text{per } k = -\frac{6}{5}$$

Esempio 4 – Stabilire se i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono linearmente dipendenti oppure no.

$$\mathbf{x} = (2, 0, 1) \quad \mathbf{y} = (1, 2, 1)$$

Per verificare se i vettori sono linearmente indipendenti si usa il teorema (pag. 9):  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono linearmente indipendenti se

$$c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

$$c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} = c_1(2, 0, 1) + c_2(1, 2, 1) = (2c_1 + c_2, 2c_2, c_1 + c_2) = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = -\frac{c_2}{2} = 0 \\ c_1 = -c_2 = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono linearmente indipendenti perché  $c_1 = 0, c_2 = 0$ .

Esempio 5 – Dati i vettori

$$\mathbf{x} = (1,1) \quad \mathbf{y} = (0,0) \quad \mathbf{z} = (4,3) \quad \mathbf{w} = (2,-1)$$

trovare qual è il vettore che ha la distanza maggiore dal vettore  $\mathbf{v} = (3,0)$ .

$$\mathbf{x} - \mathbf{v} = (-2,1) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{y} - \mathbf{v} = (-3,0) \quad d(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\| = \sqrt{9}$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{v} = (1,3) \quad d(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| = \sqrt{10}$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = (-1,-1) \quad d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$$

Il vettore che ha la maggior distanza da  $\mathbf{v}$  è il vettore  $\mathbf{z}$ ; quello che ha la distanza maggiore è  $\mathbf{w}$ .

### 3. Matrici: definizioni

#### Definizione

Una **matrice** di ordine (o dimensione)  $m \times n$  è una tabella di numeri ordinatamente disposti in  $m$  righe e  $n$  colonne.

Una matrice con  $m$  righe e  $n$  colonne è detta **matrice  $m \times n$** .

La matrice si può indicare in una delle forme seguenti;  $a_{ij}$  indica l'elemento della matrice posto all'incrocio tra la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

#### Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 3 \times 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 3 \times 3$$

#### Definizione

Una matrice di ordine  $m \times 1$  si dice anche **vettore colonna**; una matrice di ordine  $1 \times n$  si dice anche **vettore riga**.

Un vettore colonna e un vettore riga si indicano rispettivamente con

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = (r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_n)$$

Ogni riga (colonna) di una matrice  $A$  può essere vista come un vettore; la matrice  $A$  è quindi l'insieme di  $m$  vettori riga o anche di  $n$  vettori colonna.

#### Esempio

La matrice  $A$  di ordine  $4 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

è formata dai quattro vettori riga

$$\mathbf{r}_1 = (2, -4, 3) \quad \mathbf{r}_2 = (1, 5, -2) \quad \mathbf{r}_3 = (3, -1, 6) \quad \mathbf{r}_4 = (2, 4, 5)$$

o anche dai tre vettori colonna

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La matrice A può essere rappresentata con questi vettori:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{pmatrix} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3).$$

### Esempio

Dati i vettori riga

$$\mathbf{r}_1 = (3,4) \quad \mathbf{r}_2 = (5,6)$$

si possono formare le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Dati i vettori colonna

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

si possono formare le due matrici

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

A seconda del valore e/o della disposizione degli elementi si possono identificare alcuni tipi di matrici, denominate con nomi diversi.

**Matrice quadrata** di ordine  $n \times n$  (detta anche di ordine  $n$ ), quando  $m = n$ , ossia il numero di righe è uguale al numero di colonne.

**Matrice rettangolare** di ordine  $m \times n$ , quando  $m \neq n$ .

Data una matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gli elementi  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  formano la **diagonale principale**.

**Matrice nulla** è una matrice i cui elementi sono tutti nulli

$$0 = (0)_{m \times n}$$

### Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{matrice quadrata di ordine 3}$$

gli elementi della diagonale principale sono

$$a_{11} = 1, a_{22} = 5, a_{33} = 9$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrice nulla di ordine } 2 \times 3$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrice nulla di ordine 3}$$

**Matrice identità**  $I$  di ordine  $n$  è una matrice quadrata in cui gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1 e gli altri elementi sono tutti nulli

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice identità di ordine 2}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice identità di ordine 3}$$

**Matrice diagonale** di ordine  $n$  è una matrice quadrata in cui gli elementi al di fuori della diagonale principale sono tutti nulli

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempi

Sono matrici diagonali

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Un importante esempio di matrice diagonale è la **matrice identità**

**Matrice triangolare superiore** è una matrice quadrata in cui gli elementi al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Matrice triangolare inferiore** è una matrice quadrata in cui gli elementi al di sopra della diagonale principale sono tutti nulli

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{matrice triangolare superiore di ordine 3}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{matrice triangolare inferiore di ordine 3}$$

**Definizione**

Due **matrici** A e B sono **uguali** se sono dello stesso ordine e ogni elemento di A è uguale all'elemento di posto corrispondente in B

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

**4. Operazioni fra matrici**

Siano date le matrici di ordine  $m \times n$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

**Definizione**

**Somma di matrici:** si sommano gli elementi di posto corrispondente

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

**Proprietà della somma di matrici**

Proprietà associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Proprietà commutativa

$$B + A = A + B$$

Esistenza elemento neutro (matrice nulla)

$$0 + A = A + 0 = A$$

Esistenza matrice opposta  $-A$

$$A + (-A) = 0$$

**Definizione**

**Differenza di matrici:** si sottraggono gli elementi di posto corrispondente

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Se le matrici A e B non hanno le stesse dimensioni, non possono essere né sommate né sottratte.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 9 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$$

**Definizione**

**Moltiplicazione di una matrice A per uno scalare c:** si moltiplica ogni elemento di A per lo scalare c

$$cA = (ca_{ij})_{m \times n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-5A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -35 & -25 \\ -15 & 20 \end{pmatrix} \quad 2A-3B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 11 & 22 \\ 33 & -29 \end{pmatrix}$$

**Definizione****Prodotto di matrici**

Siano date le matrici

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad B = (b_{ij})_{n \times p}$$

aventi la proprietà che le colonne di A sono tante quante le righe di B. La matrice prodotto  $C = AB$  è una matrice di dimensioni  $m \times p$

$$C = AB = (c_{ij})_{m \times p}$$

Il generico elemento  $c_{ij}$  della matrice C è il prodotto scalare dell'  $i$ -esimo vettore riga di A per il  $j$ -esimo vettore colonna di B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Affinchè si possa fare il prodotto bisogna che il numero di colonne della matrice A sia uguale al numero di righe della matrice B.

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ordine } 2 \times 3 \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ordine } 3 \times 2$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 13 & -3 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 9 & 14 & -3 \end{pmatrix} \quad AB \neq BA$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ordine } 2 \times 2 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ordine } 2 \times 3$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 13 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Nel primo esempio si ha  $AB \neq BA$ ; nel secondo esempio il prodotto BA non si può fare perché il numero di colonne di B è diverso dal numero di righe di A: questi esempi mostrano che non vale la proprietà commutativa.

Quando le due matrici A e B sono quadrate dello stesso ordine, i due prodotti AB e BA esistono entrambi, ma non è detto che siano uguali (ossia che il prodotto sia commutativo).

Quindi in generale il **prodotto di matrici non è commutativo**.

Se  $AB = BA$  le **matrici** sono dette **commutative**.

Esempio

Matrici quadrate non commutative

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -21 & 11 & -12 \\ 29 & -1 & 15 \\ -20 & 29 & -12 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 7 \\ 14 & -19 & 21 \\ -19 & 29 & -29 \end{pmatrix} \quad AB \neq BA$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso si osserva che non vale la proprietà commutativa; inoltre non vale la legge di annullamento del prodotto: il prodotto BA è nullo, ma nessuna delle due matrici A e B è nulla.

Le seguenti proprietà, valide per i numeri reali, non valgono in generale per le matrici.

<b>Proprietà</b>	
<b>Commutativa</b>	$AB \neq BA$
<b>Annullamento del prodotto</b>	$AB = 0$ <b>non implica</b> $A = 0$ o $B = 0$
<b>Legge di cancellazione</b>	$AX = AY$ con $A \neq 0$ <b>non implica</b> $X = Y$

Siano A, B, C matrici tali che le somme e i prodotti sotto indicati abbiano senso; sia c uno scalare e I la **matrice identità** di ordine n.

<b>Proprietà del prodotto di matrici</b>	
Proprietà associativa	$A(BC) = (AB)C$
Elemento neutro: la matrice identità	$IA = AI = A$
Proprietà distributiva a sinistra	$A(B+C) = AB + AC$
Proprietà distributiva a destra	$(A+B)C = AC + BC$
Proprietà associativa rispetto allo scalare	$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Poiché i vettori sono casi particolari di matrici, il prodotto di un vettore riga di ordine  $1 \times n$  per un vettore colonna di ordine  $n \times 1$  è uguale a un numero e il prodotto di un vettore colonna di ordine  $n \times 1$  per un vettore riga di ordine  $1 \times n$  è una matrice di ordine  $n \times n$ .

Esempio

$$\mathbf{v} = (1,2,3) \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{vw} = 4+10+18 = 32 \quad \mathbf{wv} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

## 5. Matrice trasposta

<b>Definizione</b>
Data una matrice A di ordine $m \times n$ , la matrice di ordine $n \times m$ che si ottiene scambiando le righe di A con le colonne si dice <b>matrice trasposta</b> e si indica con il simbolo $A^T$

<b>Definizione</b>
Una <b>matrice</b> quadrata A di dimensione $n \times n$ si dice <b>simmetrica</b> se $A^T = A$ .

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 8 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 8 & 6 \\ 9 & 3 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per le matrici quadrate l'operazione di trasposizione lascia invariati gli elementi della diagonale principale:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ vettore colonna} \quad \mathbf{v}^T = (1 \ 2 \ 3) \text{ vettore riga}$$

$$\mathbf{w} = (4 \ 5 \ 6) \text{ vettore riga} \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ vettore colonna}$$

Matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**6. Determinante**

In molti casi, ad esempio per risolvere un sistema lineare di equazioni, è importante stabilire se una matrice quadrata abbia una riga o colonna ottenibile come combinazione lineare di altre righe o colonne.

A tale scopo si associa a una matrice quadrata un numero, detto determinante, che indica se ciò si verifica, a seconda che tale numero sia uguale a zero oppure diverso.

Il **determinante** di una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  è un numero reale associato alla matrice  $A$  e indicato con  $\det A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La definizione generale di  $\det A$ , nota dai testi di algebra lineare, è piuttosto complessa.

Riassumiamo solo i casi particolari di ordine  $n \leq 3$  e alcuni casi di matrici con struttura particolare.

**Proprietà**

Se  $A$  è una matrice triangolare superiore o triangolare inferiore o diagonale di ordine  $n$  allora

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

(prodotto degli elementi della diagonale principale)

In particolare per la matrice identità  $I$  si ha  $\det I = 1$ .

Esempi

Matrice identità

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det I = 1$$

Matrice triangolare superiore

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det U = -72$$

Matrice triangolare inferiore

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \det L = -100$$

**Matrice di ordine 2**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \det A = -6 - 15 = -21$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} \quad \det B = 8$$

**Matrice di ordine 3**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Per il calcolo del determinante si può usare una regola mnemonica valida solo per l'ordine 3 (**Regola di Sarrus**); si aggiungono a destra due colonne uguali alle prime due colonne del determinante e si calcolano i prodotti degli elementi delle diagonali

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -4 & 5 & -1 \\ 7 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 8 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 & -4 & 5 \\ 7 & -6 & 9 & 7 & -6 \end{array}$$

$$\det A = 90 - 21 + 192 - 280 - 12 + 108 = 77$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\det A = 5 + 24 + 6 = 35$$

Non ci sono regole simili per il calcolo del determinante di ordine maggiore di 3. La regola generale richiede una elevata mole di calcoli e non viene in pratica usata.

## 7. Matrice inversa

### Definizione

Una **matrice** quadrata  $A$  di dimensione  $n \times n$  si dice **non singolare** o **invertibile**, se esiste una matrice  $A^{-1}$  tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La matrice  $A^{-1}$  si dice **matrice inversa**.

Se la matrice inversa  $A^{-1}$  non esiste, la matrice  $A$  si dice **singolare**.

### Esempio

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

possiede l'inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Infatti

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

### Esempio

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è singolare; infatti il prodotto di  $A$  per una qualunque matrice ha sempre la prima riga formata da elementi tutti nulli, quindi tale prodotto non può essere uguale alla matrice identità  $I$  di ordine 2.

### Proprietà

La matrice inversa, se esiste, è unica.

Si dimostra il seguente teorema.

### Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata  $A$  possieda inversa (ossia  $A$  sia non singolare) è che il determinante di  $A$  sia diverso da zero.

### Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcolo del determinante con la regola di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \quad \det A = 2+24 + 2 -24 = 4 \neq 0$$

La matrice  $A$  possiede inversa.

Il calcolo della matrice inversa in generale è un'operazione non semplice; si può ottenere l'inversa in modo semplice solo nel caso di una matrice  $2 \times 2$ .

Si dimostra che data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice inversa è (se  $\det A \neq 0$ )

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

### Esempi

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 8 - 7 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 12 - 7 = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

### Esempio

Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , determinare la matrice  $B$  tale che  $AB = I$ .

La matrice  $B$  è l'inversa  $A^{-1}$

$$\det A = 1 \neq 0 \quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 4 \end{pmatrix}$$

determinare il valore del parametro  $k$  in modo che  $A$  sia non singolare.

Si impone che sia  $\det A \neq 0$ :

$$\det A = 4 - 2k$$

$$4 - 2k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2$$

Per  $k = 2$  la matrice è singolare.

### Esempio

Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} k-4 & -1 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}$ , determinare i valori del parametro  $k$  in modo che  $A$  sia singolare.

Si impone che sia

$$\det A = (k-4)(k-1) + 2 = 0$$

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \quad k = 2, \quad k = 3$$