

## LIMITI DI FUNZIONI

### 1. Limiti al finito (ossia per $x \rightarrow x_0$ )

#### Limite finito per $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad L \in \mathbf{R}$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0$  è  $L$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente vicino a  $L$ , scegliendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , con  $x \neq x_0$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

I punti che soddisfano la condizione  $0 < |x - x_0| < \delta$  costituiscono un **intorno** completo del punto  $x_0$  di raggio  $\delta$ , privato del punto  $x_0$ .

#### Esempio 1

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 12| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

#### Esempio 2

Verificare con la definizione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\text{Per } x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x+1}{2} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < 2\varepsilon \quad \delta = 2\varepsilon$$

#### Limite destro (finito) per $x \rightarrow x_0^+$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad L \in \mathbf{R}$$

Il limite destro di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0^+$  è  $L$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente vicino a  $L$ , scegliendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , con  $x > x_0$  (ossia  $x$  tende a  $x_0$  da destra).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

I punti che soddisfano la condizione  $x_0 < x < x_0 + \delta$  costituiscono un **intorno** destro del punto  $x_0$ , di raggio  $\delta$ , privato del punto  $x_0$ .

**Limite sinistro (finito) per  $x \rightarrow x_0^-$** 

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad L \in \mathbf{R}$$

Il limite sinistro di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0^-$  è  $L$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente vicino a  $L$ , scegliendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , con  $x < x_0$  (ossia  $x$  tende a  $x_0$  da sinistra).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, \quad x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

I punti che soddisfano la condizione  $x_0 - \delta < x < x_0$  costituiscono un **intorno** sinistro del punto  $x_0$ , di raggio  $\delta$ , privato del punto  $x_0$ .

Esempio 3

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

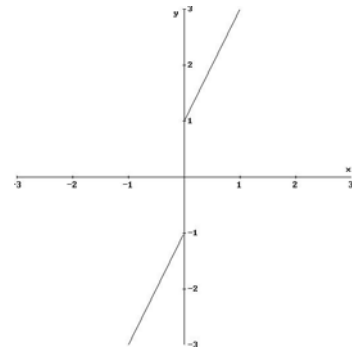
Esempio 4

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2x + \frac{|x|}{x} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2x + \frac{|x|}{x} \right) = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{dom} f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$



Limite destro

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, \quad 0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\text{Per } x > 0 \quad |f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 1 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Limite sinistro

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, \quad -\delta < x < 0 \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$$

$$\text{Per } x < 0 \quad |f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 1 + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

**Proprietà**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Negli esempi 3 e 4 i limiti destro e sinistro esistono entrambi, ma sono diversi, perciò il limite ordinario non esiste.

**Limite infinito per  $x \rightarrow x_0$** 

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0$  è  $+\infty$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente grande, scegliendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , con  $x \neq x_0$ .

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

**Esempio 5**

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: 0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > A$$

$$\frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

**Esempio 6**

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} > A$$

$$\frac{1}{|x-2|} > A \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{A} \quad \delta = \frac{1}{A}$$

**Limite destro (infinito) per  $x \rightarrow x_0^+$** 

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0^+$  è  $+\infty$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente grande, scegliendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , con  $x > x_0$  (ossia  $x$  tende a  $x_0$  da destra)..

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > A$$

**Limite sinistro (infinito) per  $x \rightarrow x_0^-$** 

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0^-$  è  $+\infty$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente grande, scegliendo  $x$  sufficientemente vicino a  $x_0$ , con  $x < x_0$  (ossia  $x$  tende a  $x_0$  da sinistra).

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

Definizioni analoghe nei casi in cui la funzione tende a  $-\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad (\text{limite destro})$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \quad (\text{limite sinistro})$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -A$$

### Esempio 7

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: 0 < |x| < \delta \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < -A$$

$$-\frac{1}{x^2} < -A \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

### Esempio 8

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: 0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > A$$

$$\frac{1}{x} > A \Leftrightarrow x < \frac{1}{A} \quad (\text{ricordare che } x \text{ tende a } 0 \text{ da destra}) \quad \delta = \frac{1}{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: -\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -A$$

$$\frac{1}{x} < -A \Leftrightarrow x > -\frac{1}{A} \quad (\text{ricordare che } x \text{ tende a } 0 \text{ da sinistra}) \quad \delta = \frac{1}{A}$$

### Definizione di asintoto verticale

La retta  $x = x_0$  è un **asintoto verticale** per la curva  $y = f(x)$  se vale **almeno una** delle seguenti condizioni:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

Esempio 9

Dal limite (esempio 5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

segue che  $x = 0$  è un asintoto verticale per la curva  $y = \frac{1}{x^2}$ .

Dal limite (esempio 6)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$$

segue che  $x = 2$  è un asintoto verticale per la curva  $y = \frac{1}{|x - 2|}$ .

Dal limite (esempio 7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

segue che  $x = 0$  è un asintoto verticale per la curva  $y = -\frac{1}{x^2}$ .

Dai limiti (esempio 7)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

segue che  $x = 0$  è un asintoto verticale per la curva  $y = \frac{1}{x}$ .Esempio 10

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0: 0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < -A$$

$$\ln x < -A \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln x} < e^{-A} \quad (\text{ricordare che l'esponenziale } e^x \text{ è una funzione crescente})$$

$$x < e^{-A} \quad (\text{ricordare che l'esponenziale è l'inversa del logaritmo}) \qquad \delta = e^{-A}$$

Da questo limite segue che  $x = 0$  è un asintoto verticale destro ( $x$  tende a 0 da destra) per la curva  $y = \ln x$ .**2. Limiti all'infinito (ossia per  $x \rightarrow \pm\infty$ )****Limite finito per  $x \rightarrow +\infty$** 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \qquad L \in \mathbf{R}$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $+\infty$  è  $L$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente vicino a  $L$ , scegliendo  $x$  sufficientemente grande.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esempio 11

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B: \forall x, x > B \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon} \quad x \text{ tende a } +\infty, \text{ perciò la soluzione che}$$

$$\text{interessa è } x > \frac{1}{\varepsilon}; \text{ quindi} \quad B = \frac{1}{\varepsilon}$$

### Limite finito per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad L \in \mathbf{R}$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $-\infty$  è  $L$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente vicino a  $L$ , scegliendo  $x$  negativo e sufficientemente grande in valore assoluto.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

### Esempio 12

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon} \quad x \text{ tende a } -\infty, \text{ perciò la soluzione che}$$

$$\text{interessa è } x < -\frac{1}{\varepsilon}; \text{ quindi} \quad B = \frac{1}{\varepsilon}$$

### Esempio 13

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow e^x < \varepsilon$$

$$e^x < \varepsilon \Leftrightarrow \ln e^x < \ln \varepsilon \quad (\text{ricordare che il logaritmo naturale } \ln x \text{ è crescente})$$

$$x < \ln \varepsilon \quad (\text{ricordare che il logaritmo è l'inversa dell'esponenziale})$$

$$B = -\ln \varepsilon \quad (\text{osservare che } \varepsilon \text{ è un numero positivo arbitrariamente piccolo, quindi } \ln \varepsilon < 0 \text{ per } \varepsilon \text{ sufficientemente piccolo})$$

### Definizione di asintoto orizzontale

La retta  $y = L$  è un **asintoto orizzontale** per la curva  $y = f(x)$  se vale una delle seguenti condizioni:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

### Esempio 14

Dai limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{esempi 11 e 12})$$

segue che la retta  $y = 0$  è un asintoto orizzontale completo (cioè sia per  $x \rightarrow +\infty$  che per  $x \rightarrow -\infty$ ) per la curva  $y = \frac{1}{x}$ .

Dal limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

segue che la retta  $y = 0$  è un asintoto orizzontale sinistro (cioè solo per  $x \rightarrow -\infty$ ) per la curva  $y = e^x$ .

Si possono anche avere due asintoti orizzontali diversi per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ ; ad esempio si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$$

perciò la curva  $y = \arctg x$  ha come asintoto orizzontale destro (cioè per  $x \rightarrow +\infty$ ) la retta  $y = \frac{\pi}{2}$ , e

come asintoto orizzontale sinistro (cioè per  $x \rightarrow -\infty$ ) la retta  $y = -\frac{\pi}{2}$ .

### Limiti infiniti per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $+\infty$  è  $+\infty$  se è possibile rendere il valore di  $f(x)$  arbitrariamente grande, scegliendo  $x$  sufficientemente grande.

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow f(x) < -A$$

### Esempio 15

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow \sqrt{x} > A$$

$$\sqrt{x} > A \quad \Leftrightarrow \quad x > A^2 \qquad B = A^2$$

### Esempio 16

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow x^2 > A$$

$$x^2 > A \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{A} \vee x > \sqrt{A}$$

$x$  tende a  $+\infty$ , perciò la soluzione che interessa è  $x > \sqrt{A}$

$$B = \sqrt{A}$$

Esempio 17

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow -x^3 < -A$$

$$-x^3 < -A \quad \Leftrightarrow \quad x^3 > A \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt[3]{A} \quad B = \sqrt[3]{A}$$

Esempio 18

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow x^2 > A$$

$$x^2 > A \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{A} \vee x > \sqrt{A}$$

$$x \text{ tende a } -\infty, \text{ perciò la soluzione che interessa è } x < -\sqrt{A} \quad B = \sqrt{A}$$

Esempio 19

Verificare con la definizione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x < -B \Rightarrow x^3 < -A$$

$$x^3 < -A \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt[3]{A} \quad B = \sqrt[3]{A}$$

Esempio 20Verificare con la definizione (**limiti fondamentali**)

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow e^x > A$$

$$e^x > A \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^x > \ln A \quad (\text{vedi esempio 13})$$

$$x > \ln A \quad B = \ln A$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0: \forall x, x > B \Rightarrow \ln x > A$$

$$\ln x > A \quad \Leftrightarrow \quad x > e^A \quad B = e^A \quad (\text{vedi esempio 10})$$