Elementi di logica

1. Introduzione

La logica elementare si interessa della verità di affermazioni complesse a partire dalla verità di quelle più semplici che le compongono.
Si può parlare di verità/falsità solo nel caso di affermazioni e negazioni.

Proposizione o **enunciato**: un'affermazione che descrive un fatto a cui è possibile attribuire un valore di verità: Vero o Falso (**logica binaria**), con un giudizio oggettivo.

Esempi

"7 è un numero dispari"	proposizione vera
"3 > 9"	proposizione falsa
"Torino è lontana da Roma"	non è una proposizione.

Una proposizione può essere formata da altre più semplici e queste a loro volta possono essere ulteriormente scomponibili, fino ad arrivare alle **proposizioni elementari**: le minime affermazioni che possono essere vere o false.

Esempi

"In quest'aula ci sono più di 20 studenti"	proposizione elementare
"Il gatto è sul tetto"	proposizione elementare
"O piove o nevica"	è formata da due proposizioni elementari
"Quest'aula è bella"	non è possibile fare una verifica oggettiva
"O piove oppure non piove"	è formata da due proposizioni elementari; è sempre vera

Tautologia: è una proposizione sempre vera
Contraddizione: è una proposizione sempre falsa.

Di solito le proposizioni possono essere sia vere che false e occorre svolgere una successione di deduzioni per stabilirlo.

2. Operatori logici (connettivi)

A partire dalle proposizioni elementari si costruiscono nuove proposizioni più complesse con l'uso di tre **connettivi logici**, ciascuno con la sua **tavola di verità**.

NEGAZIONE
Data una proposizione p, la sua **negazione** $\neg$ p (si legge non p) è la proposizione che è vera quando p è falsa e viceversa.
Tavola di verità

p	$\neg$ p
V	F
F	V

Esempi

p "tutti i gatti sono neri"
$\neg$ p "c'è almeno un gatto non nero", e non "nessun gatto è nero"

q "tutti gli italiani pagano le tasse"
$\neg$q "c'è almeno un italiano che non paga le tasse", e non "nessun italiano paga le tasse"

r "$x \geq 5$"
$\neg$ r "$x < 5$"

CONGIUNZIONE
Date due proposizioni p e q, la **congiunzione** di p e q, $p \wedge q$ (si legge p e q), è la proposizione che è vera quando entrambe sono vere e falsa altrimenti.
Tavola di verità

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio
$p \wedge q$ "Al concorso sono ammessi candidati nati dopo il 1985 e residenti ad Asti"
p "nati dopo il 1985" q "residenti ad Asti"

DISGIUNZIONE
Date due proposizioni p e q, la **disgiunzione** di p e q, $p \vee q$ (si legge p o q), è la proposizione che è vera quando almeno una di esse è vera (quindi anche quando sono vere entrambe).
Tavola di verità

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio
$p \vee q$ "Al concorso sono ammessi laureati in economia o in scienze politiche"
p "laureati in economia" q "laureati in scienze politiche"
(non si esclude che un candidato abbia due lauree)

I connettivi $\wedge$ e $\vee$ sono **commutativi**:

$p \wedge q = q \wedge p$
$p \vee q = q \vee p$

e sono **associativi** :

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

Non è possibile associare in modi diversi congiunzione e disgiunzione: ad esempio
$(p \wedge q) \vee r$ è diverso da $p \wedge (q \vee r)$.
Si verifica usando la tavola di verità (basta un caso!):

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
F	F	V	F	**V**	V	**F**
				⇧		⇧

I due valori di verità indicati dalla freccia sono diversi!

Si possono definire altri utili connettivi (non primari): **equivalenza** e **implicazione**.

EQUIVALENZA

Date le proposizioni p e q, l'**equivalenza** di p e q , $p \Leftrightarrow q$ (si legge p se e solo se q) è la proposizione che è vera se p e q hanno lo stesso valore di verità.

Tavola di verità

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

<u>Esempio</u>

p “ci sono 20° C”
q “ci sono 68° F”
$p \Leftrightarrow q$ “20° C = 68° F”
(NB : gradi Fahrenheit = 32+1.8 × gradi centigradi“

TEOREMA

Per ogni coppia di proposizioni p e q le seguenti formule sono vere:

1. $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
2. $p \vee \neg p$ ossia $p \vee \neg p$ è una tautologia
3. $\neg (p \wedge \neg p)$ ossia $p \wedge \neg p$ è una contraddizione
4. **Leggi di De Morgan**
   $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
   $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Dimostrazioni (con le tavole di verità)

3.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	**V**
F	V	**V**

la proposizione $p \vee \neg p$ è sempre vera (valori di verità indicati dalla freccia), quindi è una tautologia.

4. prima legge di De Morgan

p	q	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

le proposizioni $\neg (p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$ hanno gli stessi valori di verità (valori indicati dalla freccia), quindi sono equivalenti.

Si può dimostrare, come conseguenza di questo risultato, che si potrebbe fare a meno di uno dei connettivi logici primari. Infatti:

COROLLARIO
Per ogni coppia di proposizioni p e q valgono le seguenti equivalenze:

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Un altro connettivo che è utile definire è l'implicazione.

IMPLICAZIONE
Date le proposizioni p e q, l'**implicazione** da p (antecedente) a q (conseguente), $p \Rightarrow q$, (si legge p implica q) è la proposizione che è vera, tranne quando p è vera e q è falsa.

Tavola di verità

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

NB: se p è falsa, $p \Rightarrow q$ è vera, qualunque sia q.

<u>Esempio</u>
La proposizione

"se hai 6 in tutte le materie sei promosso"

è un'implicazione.
p "hai 6 in tutte le materie"
q "sei promosso"

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

nell'ultimo caso della tabella di verità non si esclude che non abbia tutti 6 e sia promosso (potrei avere voti migliori).
La proposizione assegnata è equivalente a:
"se non sei promosso, allora non hai 6 in tutte le materie"
L'equivalenza si può scrivere nella forma (vedere teorema successivo, punto 4):

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

TEOREMA
Per ogni coppia di proposizioni p e q, le seguenti proposizioni sono vere:

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ ossia $p \wedge \neg q$ è una contraddizione
   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
2. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ transitiva
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ antisimmetrica
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ossia la proposizione $p \Rightarrow q$ è equivalente alla sua **contronominale** (la proposizione $\neg q \Rightarrow \neg p$)

Dimostrazione del punto 4 (tavola di verità)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**
				⇧	⇧

(le ultime due proposizioni hanno gli stessi valori di verità)

Attenzione! Le seguenti equivalenze **non sono vere**

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(Verificarlo con le tavole di verità)

<u>Esempio</u>
Proposizione:
"Se sono ad Asti sono in Piemonte"
p "Sono ad Asti"
q "Sono in Piemonte"
Contronominale della proposizione assegnata:
"Se non sono in Piemonte, allora non sono ad Asti"
Proposizione inversa:
"Se sono in Piemonte sono ad Asti"
Questa proposizione non equivale a quella assegnata (se equivalesse si dedurrebbe che "Asti è il Piemonte")

Si dimostra che

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

ossia un'implicazione e la sua inversa (o contraria) sono entrambe vere se e solo se le proposizioni sono equivalenti.

Molti enunciati in Matematica sono implicazioni logiche $\mathbf{p \Rightarrow q}$
L'implicazione logica si può esprimere in forme linguistiche diverse (tutte equivalenti):
"Se è vera l'ipotesi p allora è vera la tesi q"
"**Condizione sufficiente** affinché sia vera la tesi q è che sia vera l'ipotesi p"
"**Condizione necessaria** affinché sia vera l'ipotesi p è che sia vera la tesi q".

Altri enunciati sono equivalenze logiche $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$
L'equivalenza logica si può esprimere nelle forme linguistiche (equivalenti):
"La tesi q è vera se e solo se l'ipotesi p è vera"
"Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia vera la tesi q è che sia vera l'ipotesi p"

<u>Esempio</u>
Il seguente enunciato è un'equivalenza logica (dimostrazione a pgg. 6-7):
Un numero naturale è dispari se e solo se il suo quadrato è dispari.

<u>Esercizi</u>
1. Studiare la verità della proposizione

   $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg q$

   Usare le tavole di verità: la proposizione è falsa solo quando p è falsa e q è vera.

2. Studiare la verità della proposizione
   $q \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
   La proposizione è falsa solo quando p è falsa e q è vera.
3. Data la proposizione :
   "Il ferro da stiro è rotto oppure manca la corrente; ma il ferro da stiro non è rotto, quindi manca la corrente"
   Formalizzare (scegliere p e q e scrivere la proposizione) e scrivere la tabella di verità: la proposizione è sempre vera (tautologia), qualunque sia il valore di verità di p e q.

3. Dimostrazioni

Ci sono vari modi per stabilire la verità dell'implicazione **$p \Rightarrow q$**.
Vediamo i più comuni **procedimenti di dimostrazione**, cioè i procedimenti logico-deduttivi per passare dall'ipotesi p alla tesi q.

DIMOSTRAZIONE DIRETTA
Siano p e q due proposizioni. In questo procedimento dimostrativo si dimostra direttamente la verità dell'implicazione $p \Rightarrow q$, ossia si deduce che se p è vera, allora deve esserlo anche q.
I logici chiamano questa regola di deduzione **modus ponens**.
Di solito si procede per passi intermedi

$$p \Rightarrow r_1 \qquad r_1 \Rightarrow r_2 \;\ldots.. \quad r_n \Rightarrow q$$

e si applica la transitività dell'implicazione per ottenere $p \Rightarrow q$.
<u>Esempio</u>
Teorema. Se un numero naturale n è dispari, il suo quadrato è dispari
Ipotesi p: n è dispari
Tesi q: n^2 è dispari
Dimostrazione.
Se n è dispari, allora esiste un intero k tale che $n = 2k - 1$, perciò

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$$

Se si pone $m = 2k^2 - 2k + 1$ allora m è un intero e $n^2 = 2m - 1$
ossia n^2 è dispari.

DIMOSTRAZIONI INDIRETTE
Ci sono sostanzialmente due forme di dimostrazione indiretta: dimostrazione della contronominale e dimostrazione per assurdo; esse sono logicamente equivalenti alla dimostrazione diretta di $p \Rightarrow q$; con queste regole si dimostra l'implicazione in modo alternativo alla dimostrazione diretta.

DIMOSTRAZIONE DELLA CONTRONOMINALE
Dal teorema pag. 4, punto 4, si ha

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

perciò anziché dimostrare $p \Rightarrow q$, si dimostra la contronominale $\neg q \Rightarrow \neg p$.

<u>Esempio</u>
Teorema. Se un numero naturale n è dispari, allora non è divisibile per 10.
p "n è dispari"
q "n non è divisibile per 10"
Invece di dimostrare $p \Rightarrow q$ si dimostra che $\neg q \Rightarrow \neg p$, con
$\neg q$ "n è divisibile per 10"
$\neg p$ "n è pari"

Dimostrazione.
Se n è divisibile per 10, allora esiste un intero k tale che

$n = 10k = 2(5k)$

allora esiste un intero $h = 5k$ tale che $n = 2h$, quindi n è pari.

Si può facilmente verificare che la proposizione inversa non è vera.
Proposizione inversa $q \Rightarrow p$: "se un numero n non è divisibile per 10, allora è dispari"
Basta considerare come controesempio il numero $n = 22$ che non è divisibile per 10, ma è pari.

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO
Con le tavole di verità si dimostra che vale l'equivalenza seguente (stessi valori di verità...):

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
V	V	**V**	F	F	F	**V**
V	F	**F**	V	V	F	**F**
F	V	**V**	F	F	V	**V**
F	F	**V**	V	F	V	**V**
		⇧				⇧

Sulla base di questo risultato si procede nel modo seguente: si suppone che sia vera l'ipotesi p e sia falsa la tesi q e si deduce che l'ipotesi p deve essere anche falsa, il che è assurdo (contraddizione).
<u>Esempio</u>
Teorema. Se un numero naturale n è tale che il suo quadrato n^2 è dispari, allora n è dispari.
Ipotesi p: n^2 dispari
Tesi q: n dispari
Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che n sia pari; allora esiste un intero k tale che $n = 2k$.
Da questo segue $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, quindi anche n^2 è pari, contro l'ipotesi.

Più in generale si può verificare che vale l'equivalenza

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow r \wedge \neg r]$$

Ciò significa che da $p \wedge \neg q$ segue una contraddizione ($r \wedge \neg r$ è sempre falsa!); perciò un modo per dimostrare che $p \Rightarrow q$ consiste nel dimostrare che $p \wedge \neg q$ implica una contraddizione, cioè si arriva a una conclusione sempre falsa (notare che la contraddizione non è necessariamente basata sull'ipotesi p).
<u>Esempio</u>
Teorema. Sia a un numero reale; se $a > 0$, allora $\frac{1}{a} > 0$.
Dimostrazione.
Ipotesi: $a > 0$ Tesi: $\frac{1}{a} > 0$
Supponiamo per assurdo che sia $\frac{1}{a} \le 0$ (negazione della tesi). Da una delle proprietà dei numeri reali (ordinamento) si ha che:

se $x \le 0$ e $y > 0$, allora $xy \le 0$.

Nel nostro caso $x = \frac{1}{a}$, $y = a$ quindi $a \cdot \frac{1}{a} \le 0$; da qui segue $1 \le 0$: questo è una contraddizione, perciò è assurdo supporre che sia $\frac{1}{a} \le 0$ e la tesi è vera.

4. Predicati e quantificatori

Si chiama **predicato logico** un enunciato p(x,y,…) che dipende da uno o più argomenti x,y,…, variabili in opportuni insiemi.
Il predicato diventa una proposizione logica (quindi è vera o falsa) ogni volta che si fissano i valori degli argomenti.
Esempio
$x \in N$ N = insieme dei numeri naturali
Predicato: p(x) = "x è un numero dispari"
Proposizioni logiche: p(7) è vera; p(10) è falsa, ecc..

QUANTIFICATORI
Dato un predicato p(x), con x variabile in un certo insieme S, ci chiediamo se p(x) è vera per tutti gli elementi x di S, oppure se esiste almeno un elemento x di S per cui p(x) è vera.
In altre parole stiamo considerando delle proposizioni logiche:
$\forall x \in S$, p(x) si legge: per ogni x appartenente a S, la proposizione p(x) è vera.
$\exists x \in S$, p(x) si legge: esiste almeno un x appartenente a S per cui la proposizione p(x) è vera.
L'applicazione di un quantificatore a un predicato lo trasforma in una proposizione logica, di cui si può stabilire vero/falso.
Il simbolo $\forall$ (per ogni) si chiama **quantificatore universale**; il simbolo $\exists$ (esiste almeno) si chiama **quantificatore esistenziale**.
Si usa anche il quantificatore $\exists!$ (esiste ed è unico).
Esempi
S = {2,4,6,8,…} numeri pari
predicato p(x) = "x è divisibile per 2"
$\forall x \in S$, p(x) è vera: i numeri pari sono tutti divisibili per 2.

predicato q(x) = "x è divisibile per 4"
$\exists x \in S$, p(x) è vera; ad esempio p(4) è vera, mentre p(6) è falsa.

predicato r(x) = "x è minore di 7"
$\exists x \in S$, p(x) è vera; ad esempio p(6) è vera.

NEGAZIONE LOGICA DI UN PREDICATO QUANTIFICATO
Si dimostra che:
1. $\neg(\forall x \in S, p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in S, \neg p(x))$
2. $\neg(\exists x \in S, p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in S, \neg p(x))$

Esempi
Data la proposizione
p(x) "tutte le persone in quest'aula hanno il cellulare",
per dimostrare che è falsa basta trovare una persona senza cellulare.
Data la proposizione
q(x) "nessuno in quest'aula è malato di vaiolo",
per dimostrare che è vera bisogna dimostrare che tutti sono sani.

NB: Nel caso di un solo argomento x, non è importante scrivere il predicato prima o dopo il quantificatore; le due proposizioni seguenti sono identiche:
$\forall x \in S$, p(x) e p(x), $\forall x \in S$
Però, se un predicato dipende da più argomenti, ciascuno può essere quantificato e l'ordine dei quantificatori può essere importante.

Due quantificatori dello stesso tipo possono essere scambiati, senza cambiare il valore di verità di una proposizione; le due proposizioni seguenti hanno lo stesso valore di verità:

$\forall x \in S, \forall y \in T, p(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in T, \forall x \in S, p(x,y)$

$\exists x \in S, \exists y \in T, p(x,y) \Leftrightarrow \exists y \in T, \exists x \in S, p(x,y)$

Al contrario lo scambio di due quantificatori di tipo diverso porta a proposizioni logiche in genere diverse.

Esempio

$x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$

Predicato p(x) = "$x \geq y$"

1. La proposizione
   $\forall x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}, p(x,y)$
   significa : "presi due numeri naturali qualunque, ciascuno è maggiore o uguale all'altro" ed è falsa.
2. La proposizione
   $\exists x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, p(x,y)$
   significa : "esistono almeno due naturali, uno maggiore dell'altro" ed è vera.
3. La proposizione
   $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, p(x,y)$
   significa : "preso un qualunque naturale x, esiste un intero y minore o uguale a x" ed è vera (si può ad esempio scegliere y = x).
4. La proposizione
   $\exists x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}, p(x,y)$
   significa : "esiste un naturale x maggiore o uguale a tutti gli altri naturali" ed è falsa (ogni x ammette il successore x+1).

Esercizi

Scrivere la negazione delle due proposizioni 3 e 4 dell'esempio precedente.

3. $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geq y$ vera
   Negazione :
   $\neg[\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geq y] \Leftrightarrow$
   $\exists x \in \mathbf{N}, \neg(\exists y \in \mathbf{N}, x \geq y) \Leftrightarrow$
   $\exists x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}, \neg(x \geq y) \Leftrightarrow$
   $\exists x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}, x < y$ falsa (ricordare che $0 \leq 0$ e non $0 < 0$!)
4. $\exists x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}, x \geq y$ falsa
   Negazione :
   $\neg[\exists x \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{N}, x \geq y] \Leftrightarrow$
   $\forall x \in \mathbf{N}, \neg(\forall y \in \mathbf{N}, x \geq y) \Leftrightarrow$
   $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, \neg(x \geq y) \Leftrightarrow$
   $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, x < y$ vera (si prende ad esempio y = x+1)

Teoria degli insiemi

1. Definizioni e proprietà

Un **insieme** è una collezione di oggetti o elementi, vista come una singola entità.
Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole: A, X, Y, …; gli elementi dell'insieme con lettere minuscole a, x, y, …

$x \in X$ l'elemento x appartiene all'insieme X

$x \notin X$ l'elemento x non appartiene a X.

Vale la **legge del terzo escluso**:
Per ogni elemento x e ogni insieme A vale una e una sola delle seguenti relazioni

$x \in A$ oppure $x \notin A$

Usiamo soprattutto insiemi di numeri; i principali insiemi numerici sono:

$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$	numeri naturali
$\mathbf{Z} = \{0,1,2,3,\ldots,-1,-2,-3,\ldots\}$	numeri interi relativi
$\mathbf{Q} = \{ \frac{m}{n},\ m,n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0 \}$	numeri razionali
R	numeri reali
C	numeri complessi

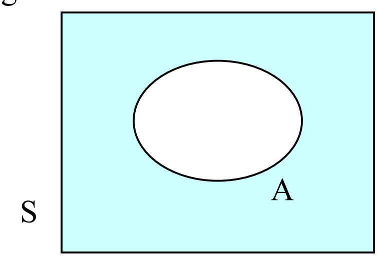
La **cardinalità** di un insieme è il numero dei suoi elementi; gli insiemi numerici sopra elencati hanno tutti cardinalità infinita, ma non dello stesso tipo: i primi tre hanno cardinalità numerabile, gli ultimi due no.
Gli insiemi contenenti un numero finito di elementi hanno cardinalità finita, ad esempio l'insieme $S = \{2,4,6,8,10\}$ ha cardinalità 5.

Ci sono modi diversi per descrivere un insieme:
1 - per **elencazione**, ossia si elencano tutti gli elementi dell'insieme; questo modo va bene solo per insiemi finiti con pochi elementi;
2 - per mezzo di una **proprietà caratteristica** degli elementi dell'insieme (un predicato):
$A = \{x \in X : p(x)\}$ è l'insieme degli elementi di X tali che la proprietà p(x) è verificata.

Esempi
A è l'insieme dei naturali minori o uguali a 4:
per elencazione $A = \{0,1,2,3,4\}$
con la proprietà caratteristica $A = \{n \in \mathbf{N} : n \leq 4\}$
p(n) = "$n \leq 4$" è un predicato logico
A è un **sottoinsieme** di **N** $A \subseteq \mathbf{N}$

B è l'insieme dei numeri pari compresi fra 1 e 9:
per elencazione $B = \{2,4,6,8\}$
con la proprietà caratteristica $B = \{n \in \mathbf{N} : n = 2k,\ k \in \mathbf{N}, \wedge\ 1<n<9\}$

Per rappresentare graficamente un insieme si usano i **diagrammi di Venn**



S = insieme universale degli elementi (**insieme ambiente**)
$A \subset S$ **sottoinsieme proprio** di S
A non contiene tutti gli elementi di S (almeno un elemento di S non sta in A)

Siano dati due sottoinsiemi A e B di S e un elemento $x \in A$: osservare che $A \subseteq B$ è diverso da $A \in B$ (che non ha senso); inoltre se $x \in A$ si può anche scrivere $\{x\} \subseteq A$ (notare le parentesi graffe).
Si ha

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Esempi

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

ad esempio :	$x = 1$	$x \in \mathbf{N}$	$x \in \mathbf{Z}$	$x \in \mathbf{Q}$
ma	$x = -1$	$x \in \mathbf{Z}$	$x \in \mathbf{Q}$	$x \notin \mathbf{N}$
e	$x = \frac{1}{3}$	$x \in \mathbf{Q}$	$x \notin \mathbf{Z}$	$x \notin \mathbf{N}$

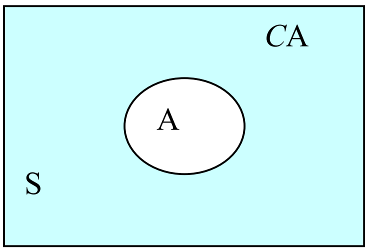
La collezione di tutti i sottoinsiemi di un insieme X si chiama **insieme delle parti** di X e si indica con P(X); ne fanno parte sia X stesso che l'**insieme vuoto** (che non contiene elementi) $\varnothing$; gli altri sottoinsiemi di X sono propri e non vuoti.
Esempio
$X = \{1,2,3\}$ cardinalità $m = 3$
$P(X) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},X\}$
$P(X)$ ha $2^3 = 8$ elementi.
In generale se un insieme finito X ha m elementi, l'insieme delle parti ha 2^m elementi.

2. Operazioni fra insiemi

A partire da uno o più sottoinsiemi di un insieme S si possono definire nuovi sottoinsiemi con le **operazioni insiemistiche**.

COMPLEMENTARE
Dato il sottoinsieme $A \subseteq S$, si definisce **complementare** di A in S il sottoinsieme

$$\mathcal{C}A = \{x \in S : x \notin A\}$$



Proprietà
1. $\mathcal{C}S = \varnothing$
2. $\mathcal{C}\varnothing = S$
3. $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$

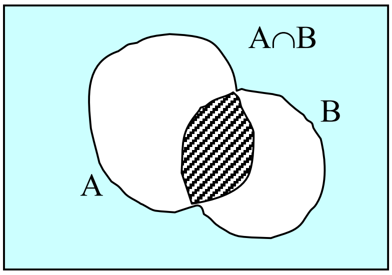
Esempi
$S = \mathbf{N}$ numeri naturali

$A = \{n \in \mathbf{N} : n = 2k, k \in \mathbf{N}\}$	numeri pari
$\mathcal{C}A = \{n \in \mathbf{N} : n = 2k+1, k \in \mathbf{N}\}$	numeri dispari
$B = \{n \in \mathbf{N} : n < 6\}$	numeri minori di 6
$\mathcal{C}B = \{n \in \mathbf{N} : n \geq 6\}$	numeri maggiori o uguali a 6

INTERSEZIONE

Dati i sottoinsiemi $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, si definisce **intersezione** di A e B, $A\cap B$, il sottoinsieme

$$A\cap B = \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}$$

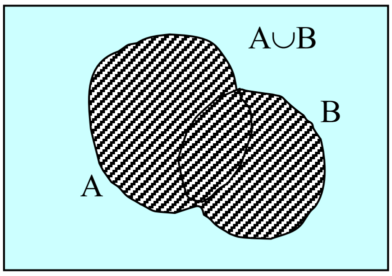


Se $A\cap B = \emptyset$, A e B si dicono **disgiunti**.

UNIONE

Dati i sottoinsiemi $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, si definisce **unione** di A e B, $A\cup B$, il sottoinsieme

$$A\cup B = \{x \in S : x \in A \vee x \in B\}$$



Proprietà

1.	$A\cap \mathcal{C}A = \emptyset$	$A\cup \mathcal{C}A = S$
2.	Commutativa	$A\cap B = B\cap A$
		$A\cup B = B\cup A$
3.	Associativa	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
		$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$
4.	Distributiva	$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$
		$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$
5.	Leggi di De Morgan	$\mathcal{C}(A\cap B) = \mathcal{C}A\cup \mathcal{C}B$
		$\mathcal{C}(A\cup B) = \mathcal{C}A\cap \mathcal{C}B$

(vedere le analogie con la negazione logica e con la congiunzione e disgiunzione logica)

Si può generalizzare la definizione di intersezione e unione al caso di più insiemi.

<u>Esempi</u>

A = insieme dei numeri pari
B = insieme dei numeri dispari
$A\cup B = \mathbf{N}$

$\mathbf{Z}_- = \{x\in\mathbf{Z}: x < 0\}$ interi relativi negativi

$\mathbf{Z}_+ = \{x\in\mathbf{Z}: x > 0\}$ interi relativi positivi

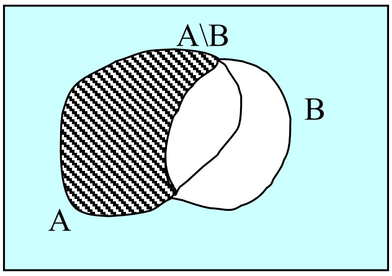
$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$ interi relativi

A = **N**
B = insieme dei numeri pari
$A \cap B = B$ perché $B \subset A$

A = **N**
$B = \{x \in \mathbf{Z} : x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$
$A \cap B = \{n \in \mathbf{N} : n = 2k, k \in \mathbf{N}\} \subset B$ (e anche $\subset A$)

DIFFERENZA FRA A E B
Un'altra operazione utile è la differenza fra A e B, definita come il sottoinsieme degli elementi di A che non appartengono a B

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} = A \cap \mathcal{C}B$$



Esempi
A = insieme dei numeri pari
$B = \{n \in \mathbf{N} : n \leq 10\}$ insieme dei numeri minori o uguali a 10
$A \setminus B = \{n \in \mathbf{N} : n > 10\}$ insieme dei numeri pari maggiori di 10

$\mathbf{N} \setminus \{0\}$ = insieme di tutti i naturali diversi da zero
$\mathbf{R} \setminus \{0\}$ = insieme di tutti i reali diversi da zero
$\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ = insieme dei reali strettamente positivi

3. Insiemi numerici

Breve riassunto sui principali insiemi numerici e sulle loro proprietà.

INSIEME DEI NUMERI NATURALI N

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Caratteristiche fondamentali:
1. **N** è un insieme **infinito**
2. **N** è l'insieme infinito che ha la cardinalità minore: **cardinalità del numerabile**
3. **N** è un insieme **totalmente ordinato**, ossia in **N** è definita la relazione di minore o uguale e per ogni coppia di numeri n e m è vero $n \leq m$ oppure $m \leq n$
4. **N** è un insieme **discreto**: ogni elemento di **N** ha il suo successivo; ha inoltre il primo elemento (lo zero)

Un insieme è detto **numerabile** se ha la stessa cardinalità di **N**, cioè se può essere messo in corrispondenza biunivoca con **N**.

In **N** sono definite le operazioni di somma e prodotto e **N** è chiuso rispetto a queste operazioni (il risultato di somma e prodotto fra due naturali è ancora un naturale), ma non è sempre possibile sottrarre (ad esempio $2 - 7$ non è un naturale): si ricorre all'insieme **Z**.

INSIEME DEI NUMERI INTERI RELATIVI Z

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

Caratteristiche fondamentali:

1. **Z** è un insieme **infinito**, **numerabile**, **totalmente ordinato** e **discreto**; non ha il primo elemento
2. In **Z** sono definite somma, prodotto e sottrazione (somma con l'opposto) e **Z** è chiuso rispetto a queste operazioni; in **Z** non è sempre possibile dividere: si ricorre all'insieme **Q**.

INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI Q

I numeri razionali sono definiti come il quoziente di due numeri interi relativi (con denominatore diverso da zero)

$$\mathbf{Q} = \{ \frac{m}{n}, n,m \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \}$$

Caratteristiche fondamentali:

1. **Q** è un insieme **infinito**
2. Si dimostra che **Q** è **numerabile** (si trova una corrispondenza biunivoca con l'insieme **N**)
3. In **Q** sono definite le quattro operazioni: somma, prodotto, differenza, quoziente fra due numeri razionali e **Q** è chiuso rispetto a queste operazioni.

Non sempre però è possibile esprimere una grandezza come frazione di un'altra: ad esempio la diagonale e il lato del quadrato hanno un rapporto non esprimibile con un numero razionale:

$D = L\sqrt{2}$, e si dimostra che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale (vedi teorema seguente).

Un altro esempio famoso è dato dal rapporto fra lunghezza di una circonferenza e diametro: il numero π (pi greco); si dimostra che π non è razionale.

4. **Q** non è discreto, ma **denso**, ossia data una coppia di numeri razionali x e y qualunque, $x<y$, esiste un numero razionale z tale che $x < z < y$.

(Questa proprietà non è soddisfatta dagli interi!)

I numeri razionali (come anche i naturali e gli interi relativi) possono essere rappresentati su una retta orientata, ma non tutti i punti di una retta corrispondono a numeri razionali.

Si consideri un quadrato di lato 1: la sua diagonale quanto misura? Dal teorema di Pitagora si ottiene $D^2 = 1+1 = 2$.

Si dimostra il teorema seguente.

Teorema. Se il numero x soddisfa la relazione $x^2 = 2$, allora x non è razionale.

In altre parole:

Tesi: $\neg\exists\, x \in \mathbf{Q} : x^2 = 2$ (non esiste x appartenente a **Q** tale che $x^2 = 2$)

Dimostrazione. La dimostrazione avviene per assurdo.

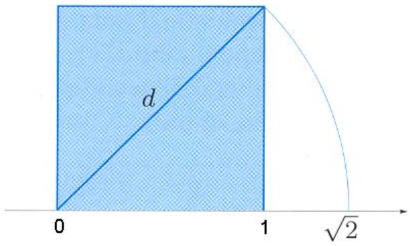
Supponiamo per assurdo che sia

$$x^2 = 2 \wedge x \in \mathbf{Q}.$$

Allora esistono due interi m e n, con $n \neq 0$, tali che $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Non è restrittivo prendere m e n positivi (si eleva al quadrato); inoltre si suppone che la frazione sia ridotta ai minimi termini (è sempre possibile ridurla), ossia m e n sono primi fra loro (cioè non hanno divisori in comune, oltre il numero 1).

Da $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ segue $m^2 = 2n^2$, quindi m^2 è pari, perciò anche m è pari (vedi esempio pag.7); allora n deve essere dispari (altrimenti m e n non sarebbero primi fra loro, avrebbero almeno 2 come divisore comune).

Siccome m è pari, allora esiste un numero $k \in \mathbf{N}$ tale che $m = 2k$. Da $m = 2k$ segue $m^2 = 4k^2$.
Dunque si ha $m^2 = 2n^2 \wedge m^2 = 4k^2$, quindi $2n^2 = 4k^2$, ossia $n^2 = 2k^2$, perciò n è pari.
Questo contraddice il fatto che n deve essere dispari, quindi è assurdo supporre che x non sia razionale.
Il numero x tale che $x^2 = 2$ e $x > 0$ sarà definito come $x = \sqrt{2}$ ed è reale; può essere rappresentato sulla retta reale nel modo seguente.



Ci sono infiniti punti sulla retta che non corrispondono a numeri razionali: l'insieme dei numeri reali è un'estensione dei razionali.
R fornisce un modello matematico della retta, nel senso che a ogni punto P della retta è associato uno e un solo numero reale x (ascissa di P).
L'insieme **R\Q** si dice insieme dei **numeri irrazionali.** Questi numeri sono caratterizzati dall'avere una rappresentazione decimale illimitata e non periodica.
Ad esempio si ha:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623731... \qquad \pi = 3.1415926535897...$$

I numeri irrazionali si dividono in:
irrazionali algebrici, numeri che sono soluzione di un'equazione algebrica;
irrazionali trascendenti, gli altri, ad esempio $\sqrt{2}$ o π.

Non costruiremo in modo rigoroso l'insieme dei numeri reali **R**, ma ne elenchiamo solo le proprietà principali.
1. Le **operazioni aritmetiche** definite sui numeri razionali si estendono in modo naturale ai numeri reali, con analoghe proprietà.
2. L'**ordinamento** $x < y$ dei razionali si estende ai reali.
3. **N**, **Z**, **Q** hanno tutti cardinalità numerabile, invece **R** ha cardinalità maggiore: la **cardinalità del continuo**. Anche **R\Q** ha la cardinalità del continuo.
4. L'insieme **Q** è **denso** in **R**: fra due reali qualsiasi esiste sempre un razionale; da questo segue che un numero reale può sempre essere approssimato con un razionale, con la precisione che si vuole.
5. L'insieme **R** è **completo**, il che equivale geometricamente al fatto che a ogni punto della retta si associa uno e un solo numero reale. Sulla retta non possono dunque essere rappresentati altri numeri: i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta e non esiste nessun altro insieme più ampio di **R** rappresentabile sulla retta.

In **R** si possono risolvere tutte le equazioni di primo grado; inoltre in **R** si risolvono equazioni di grado superiore al primo, non risolubili in **Q**.
Tuttavia **R** non basta per risolvere tutte le equazioni algebriche: ad esempio l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzione in **R**, perché nessun numero reale può avere il quadrato negativo.
Si dovrà allora ampliare **R** e costruire un nuovo insieme numerico in cui risolvere equazioni di questo tipo: si otterrà l'insieme **C** dei numeri complessi.
Questo nuovo insieme non sarà rappresentabile sulla retta!

ORDINAMENTO DEI NUMERI REALI

I numeri reali non nulli si dividono in **numeri positivi**, che formano il sottoinsieme $\mathbf{R}_+$, e numeri negativi, che formano il sottoinsieme $\mathbf{R}_-$

$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ $\qquad$ $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$

e si ha

$\mathbf{R}_+ \cup \{0\} = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ $\qquad$ $\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$

Si può definire un ordinamento fra i numeri reali ponendo

$x < y \Leftrightarrow y - x > 0$

L'**ordinamento** è **totale**, ossia dati i numeri reali e distinti x e y, è sempre vera una e una sola delle condizioni $x < y$ oppure $y < x$.

Inoltre

$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$

Ovviamente se $x < y$ allora si ha anche $x \leq y$: ad esempio è vero che $3 \leq 7$ e anche $6 \leq 6$.

Proprietà (che derivano dall'ordinamento)

1. Se $x \leq y$ e z è un qualunque numero reale, allora $x + z \leq y + z$

(cioè aggiungendo a entrambi i membri della disuguaglianza lo stesso numero, la disuguaglianza non cambia).

2. Se $x \leq y$ e se $\begin{cases} z \geq 0 & \text{allora } xz \leq yz \\ z < 0 & \text{allora } xz \geq yz \end{cases}$

(cioè moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza per uno stesso numero positivo o nullo la disuguaglianza non cambia, mentre se il numero è negativo, la disuguaglianza cambia verso).

3. Dalla proprietà 2 segue la **regola dei segni**: il prodotto di due numeri di segno concorde è positivo, di segno discorde è negativo.

VALORE ASSOLUTO

Dato il numero $x \in \mathbf{R}$, si chiama **valore assoluto** o **modulo** di x il numero reale

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Proprietà del valore assoluto

1. $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$
2. $|y - x| = |x - y|$ (distanza fra due punti di ascissa x e y sulla retta reale)
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$ (**disuguaglianza triangolare**)
4. $|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

1. Equazione $|x| = 0$ $\qquad$ unica soluzione $x = 0$
2. Equazione $|x| = a$ $\qquad$ soluzioni $x = \pm a \quad \forall a \geq 0$

   nessuna soluzione $\forall a < 0$
3. Disequazione $|x| \leq a$

   Per $a < 0$ nessuna soluzione.

   Per $a \geq 0$:

   se $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow$ la disequazione diventa $x \leq a$

se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow$ la disequazione diventa $-x \le a \Rightarrow x \ge -a$

In conclusione le soluzioni sono i valori di x tali che $-a \le x < 0$ e $0 \le x \le a$; in forma più compatta

$|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \quad \forall a \ge 0$

4. Disequazione $|x| \ge b$

Per $b < 0$ è sempre verificata soluzioni $\forall x \in \mathbf{R}$

Per $b \ge 0$:

se $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow$ la disequazione diventa $x \ge b$

se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow$ la disequazione diventa $-x \ge b \Rightarrow x \le -b$

In conclusione le soluzioni sono i valori di x tali che $x \ge b$ e $x \le -b$; in forma più compatta:

$|x| \le b \Leftrightarrow x \le -b \vee x \ge b \quad \forall b \ge 0$

5. Disequazione $|x - x_0| \le a \quad \forall a \ge 0$

$|x - x_0| \le a \Rightarrow -a \le x - x_0 \le a \Rightarrow x_0 - a \le x \le x_0 + a$

quindi

$|x - x_0| \le a \Leftrightarrow x_0 - a \le x \le x_0 + a \quad \forall a \ge 0$

INTERVALLI

Gli **intervalli** sono sottoinsiemi di R costituiti da tutti i numeri reali comresi fra due estremi fissati.

Intervallo aperto $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$

Intervallo chiuso $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\}$

Intervallo semiaperto a sinistra $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \le b\}$ (**semichiuso a destra**)

Intervallo semiaperto a destra $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a \le x < b\}$ (**semichiuso a sinistra**)

Tutti questi intervalli hanno la stessa lunghezza $|b - a|$

In particolare se b = a allora $(a,b) = \emptyset$ e $[a,a] = \{a\}$

Intervallo chiuso: contiene gli estremi;

intervallo aperto: non contiene gli estremi.

Punti interni: i punti dell'intervallo che non sono estremi.

<u>Esempio</u>

Determinare l'insieme A formato dai numeri reali x tali che $2 \le |x| < 5$

$A = \{x \in \mathbf{R} : 2 \le |x| < 5\}$

$|x| \ge 2 \Leftrightarrow x \le -2 \vee x \ge 2$

$|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

$A = \{x \in \mathbf{R} : -5 < x \le -2 \vee 2 \le x < 5\} = (-5,2] \cup [2,5)$

Si possono anche considerare intervalli definiti da una sola disuguaglianza:

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \ge a\}$

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} : x \le b\}$

$(-\infty,b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali: permettono di estendere l'ordinamento dei reali con la convenzione $x > -\infty, \quad x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbf{R}$

Si pone $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$

INSIEMI LIMITATI, MAGGIORANTI, MINORANTI

Sia A un sottoinsieme di **R** (non necessariamente un intervallo).
A è **superiormente limitato** se esiste un numero $b \in \mathbf{R}$ tale che $x \le b, \ \forall x \in A$
Ogni b che soddisfa questa relazione è detto **maggiorante** di A
A è inferiormente limitato se esiste un numero $a \in \mathbf{R}$ tale che $a \le x, \ \forall x \in A$
Ogni a che soddisfa questa relazione è detto **minorante** di A
A è **limitato** se è contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente, cioè esistono $a,b \in \mathbf{R}$ tali che $a \le x \le b, \ \forall x \in A$.
In altre parole $A \subseteq [a,b]$.
A è limitato se e solo se esiste un numero $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$, tale che $|x| \le c \quad \forall x \in A$

Esempi

$A = (1,5)$ A è limitato: $a = 1$ è un minorante, $b = 5$ è un maggiorante; anche $a = 0$ è un minorante, anche $b = 6$ è un maggiorante, ecc...

$A = (1,+\infty)$ A è limitato inferiormente ($a = 1$ è un minorante) e non è limitato superiormente.

$A = (-\infty,2)$ A è limitato superiormente ($b=2$ è un maggiornate) e non è limitato inferiormente.

$A = (2,4) \cup (5,6) \subseteq [2,6]$ A è limitato inferiormente e superiormente ($a=2$ è un minorante, $b=6$ è un maggiorante; A non è un intervallo)

N è inferiormente limitato: ogni numero reale $x \le 0$ è un minorante di **N**.
N non è superiormente limitato: infatti vale la **proprietà di Archimede** per i numeri reali:

$$\forall b \in \mathbf{R},\ b > 0,\ \exists n \in \mathbf{N} : n > b$$

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}, n \ne 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$

A è limitato; infatti $0 < \frac{1}{n} \le 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$

$$B = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}$$

B è limitato; infatti $0 \le \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$

Notare: Ogni insieme limitato ha infiniti maggioranti e minoranti!

MASSIMO E MINIMO DI UN INSIEME

Sia A un sottoinsieme di **R** superiormente limitato.
A ammette **massimo M = max A** se esiste un maggiorante di A che appartiene ad A.
Le caratteristiche del massimo M sono:

1. $\forall x \in A, x \le M$
2. $M \in A$

Sia A un sottoinsieme di **R** inferiormente limitato.
A ammette **minimo m = min A** se esiste un minorante di A che appartiene ad A.
Le caratteristiche del minimo m sono:

1. $\forall x \in A, x \ge m$
2. $m \in A$

Se A ammette massimo (minimo), allora A è superiormente (inferiormente) limitato; il massimo è il più piccolo dei maggioranti, il minimo è il più grande dei minoranti.
Il viceversa non è vero: un insieme può essere superiormente (inferiormente) limitato e non possedere massimo (minimo).
Esempi
$A = (1,2)$
A è limitato ma non ha né massimo né minimo.
Infatti il più piccolo dei maggioranti è 2, ma 2 non appartiene ad A; il più grande dei minoranti è 1 ma non appartiene ad A.

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}, n \neq 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$$
A è limitato (vedi esempi precedenti); $\max A = 1$.
Il più grande dei minoranti è 0, ma 0 non appartiene all'insieme: A non ha minimo.

N ammette minimo $m = 0$; infatti sono verificate le due proprietà caratteristiche del minimo
1. $0 \leq n \ \ \forall n \in \mathbf{N}$
2. $0 \in \mathbf{N}$

N non è superiormente limitato, non ha massimo.

Z non è limitato né inferiormente né superiormente.

Terorema. Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.
Dimostrazione per il minimo. Si dimostra per assurdo.
Supponiamo che m e m' siano entrambi minimi di A e sia $m \neq m'$.
$m \in A$ e $m' \in A$ perché minimi.
$m = \min A$, allora m è minore o uguale a ogni elemento di A, in particolare m': $m \leq m'$.
$m' = \min A$, allora m' è minore o uguale a ogni elemento di A, in particolare m: $m' \leq m$.
Quindi è contemporaneamente:
$m \leq m' \ \wedge \ m' \leq m \ \Rightarrow \ m = m'$
in contraddizione con l'aver ammesso per assurdo $m \neq m'$, dunque deve essere $m = m'$.

ESTREMO INFERIORE E SUPERIORE DI UN INSIEME
Il concetto di estremo superiore e di estremo inferiore di un insieme estende quello di massimo e minimo nei casi in cui l'insieme è superiormente o inferiormente limitato, ma non ha massimo o minimo.
Sia A un sottoinsieme di **R** superiormente limitato.
Si dice **estremo superiore** di A, **sup A**, il più piccolo dei maggioranti di A.
Sia A un sottoinsieme di **R** inferiormente limitato.
Si dice **estremo inferiore** di A, **inf A**, il più grande dei minoranti di A.
Sia $L = \sup A$; L è caratterizzato dalle seguenti proprietà:
1. $\forall x \in A, \ x \leq L$
2. $\forall L' \in \mathbf{R}, L' < L, \exists x \in A : x > L'$

La 1. esprime il fatto che L è un maggiorante; la 2. che L è il più piccolo dei maggioranti, cioè ogni numero reale minore di L non è maggiorante di A.
Sia[1] $l = \inf A$; l è caratterizzato dalle seguenti proprietà:
1. $\forall x \in A, \ x \geq l$
2. $\forall l' \in \mathbf{R}, l' > l, \exists x \in A : x < l'$

[1] Attenzione: leggi elle minuscolo, elle primo minuscolo (e non uno)

La proprietà 1. esprime il fatto che l è un minorante; la 2. che l è il più grande dei minoranti, cioè ogni numero reale maggiore di l non è minorante di A.
L'estremo inferiore e superiore esistono sempre per un insieme inferiormente e superiormente limitato e sono unici.
Se un insieme ha massimo M, allora M è anche l'estremo superiore; lo stesso per il minimo.
Esempi
A = (1,2)
inf A = 1 sup A = 2 non sono né massimo né minimo.

$$A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}, n \neq 0\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

sup A = max A = 1
Dimostro che:
inf A = 0
Devono essere verificate le proprietà:

1. $\forall n \in \mathbf{N}_+,\ \frac{1}{n} \geq 0$ sempre verificato $\mathbf{N}_+ = \mathbf{N} \setminus \{0\}$
2. $\forall r \in \mathbf{R},\ r > 0,\ \exists n \in \mathbf{N}_+ : \frac{1}{n} < r$

   $\frac{1}{n} < r \Rightarrow n > \frac{1}{r}$ vero per la proprietà di Archimede dei numeri reali.

Se A non è superiormente limitato,si dice che il suo estremo superiore è $+\infty$ e si scrive $\sup A = +\infty$; analogamente se A non è inferiormente limitato, si scrive $\inf A = -\infty$.

Esempi
$A = \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\} \cup \{20\}$
$\inf A = -1$ $-1 \notin A$ quindi A non ha minimo
max A = 20 perché
1. $\forall x \in A,\ x \leq 20$
2. $20 \in A$

$$B = \{x \in \mathbf{R} : x = n \vee x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N}_+\} = \{1,2,3,4,\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\}$$

Si ha

$$B = \mathbf{N}_+ \cup \{x \in \mathbf{R} : x = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N}_+\} \quad \text{quindi} \quad \mathbf{N}_+ \subset B$$

$\mathbf{N}_+$ non è superiormente limitato, quindi anche B non è superiormente limitato: $\sup B = +\infty$
Inoltre $\forall x \in B,\ x > 0$, quindi B è inferiormente limitato. Verifico che inf B = 0
1. $\forall x \in B,\ x \geq 0$ è verificato (x è il reciproco di un quadrato)
2. $\forall\ r > 0,\ \exists n \in \mathbf{N}_+ : \frac{1}{n^2} < r$

   $\frac{1}{n^2} < r \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{r}}$ vero per la proprietà di Archimede dei numeri reali.

Inoltre 0 non appartiene a B, quindi non è il minimo.