Capitolo 3

(da H. B. Enderton, *A Matematical Introduction to Logic*)*

1 Teorie aritmetiche

Consideriamo la struttura

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, ... \rangle$$

e relativa teoria Th($\mathcal{N}$), con possibile aggiunta di altre funzioni e relazioni, e i corrispondenti linguaggi.

Si ha una scala di teorie, per le strutture

$$\begin{array}{l} \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle \\ \langle \mathbb{N}, 0, S, < \rangle \\ \langle \mathbb{N}, 0, S, <, + \rangle \end{array}$$

che sono tutte assiomatizzabili, quindi decidibili in quanto complete, ognuna una estensione propria della precedente, nel senso che la nuova relazione o funzione non è definibile nella precedente struttura, e che hanno forza crescente rispetto agli insiemi che sono definibili nella struttura.

Invece per

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, <, +, \cdot \rangle$$

Th($\mathcal{N}$) non è assiomatizzabile e

Teorema (Teorema[1] di incompletezza di Gödel, 1931) Per ogni $T \subseteq$Th($\mathcal{N}$), T decidibile, esiste $\varphi \in$Th($\mathcal{N}$) tale che $T \nvdash \varphi$.

Ovviamente si ha anche $T \nvdash \neg\varphi$, perché i teoremi di T sono veri in $\mathcal{N}$: un

*I numeri di pagina si riferiscono al testo della prima edizione del 1972.

[1] Più precisamente: Primo teorema di incompletezza.

enunciato del genere, non dimostrabile né refutabile in T, si dice indecidibile *in* T.

Il risultato si generalizza poi a tutte le estensioni, e anche a teorie in altri linguaggi nelle quali sia definibile un frammento opportuno di aritmetica.

1.1 Teoria del successore

Consideriamo la struttura

$$\mathcal{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$$

e la $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_S)$ nel linguaggio con i simboli $\mathbf{0}$ e $\mathbf{s}$.

Sono disponibili nel linguaggio termini

$$\mathbf{n} = \underbrace{\mathbf{ss}\ldots\mathbf{s}}_{n\ volte}\mathbf{0} = \mathbf{s}^n\mathbf{0}$$

in corrispondenza a ogni $n \in \mathbb{N}$, che si chiamano numerali.

Consideriamo il seguente insieme infinito A_S di enunciati:

$$\begin{array}{ll}
S1 & \forall x(\mathbf{s}x \not\approx \mathbf{0}) \\
S2 & \forall x \forall y(\mathbf{s}x \approx \mathbf{s}y \to x \approx y) \\
S3 & \forall y(y \not\approx \mathbf{0} \to \exists x(y \approx \mathbf{s}x)) \\
S4.1 & \forall x(\mathbf{s}x \not\approx x) \\
\vdots & \\
S4.n & \forall x(\mathbf{s}^n x \not\approx x) \\
\vdots &
\end{array}$$

Si ha $\mathrm{Cn}(A_S) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N}_S)$.

Un modello $\mathcal{A}$ di A_S è una struttura $\mathcal{A} = \langle |\,\mathcal{A}\,|, 0^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$ fatta in questo modo.

Per i primi tre assiomi, $S^{\mathcal{A}}$ è una funzione iniettiva e tale che solo $0^{\mathcal{A}}$ non è nella sua immagine, quindi si può visualizzare in questo modo

$$0^{\mathcal{A}} \to S^{\mathcal{A}}(0^{\mathcal{A}}) \to \ldots$$

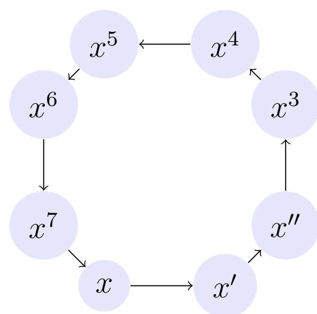
una parte che è isomorfa a $\mathbb{N}$.

Ma possono esserci altri elementi non appartenenti a questa catena; tuttavia se esiste un elemento c del genere, $c \neq 0^{\mathcal{A}}$, deve esistere una $\mathbb{Z}$-catena

$$\dots S^{\mathcal{A}}(c_2) = c_1 \to S^{\mathcal{A}}(c_{1)} = c \to S^{\mathcal{A}}(c) \to \dots$$

Di tali $\mathbb{Z}$-catene che ne possono essere un numero arbitrario, anche infinito.

La funzione degli assiomi $S4.n$ è quella di escludere cicli, del tipo (indicando per brevità $S^{\mathcal{A}}(x)$ con x'):



La cardinalità di $\mathcal{A}$ è numerabile se $\mathcal{A}$ ha un numero contabile (finito o numerabile) di $\mathbb{Z}$-catene, mentre è la stessa del numero delle $\mathbb{Z}$-catene se ve ne sono un'infinità più che numerabile.

Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ hanno lo stesso numero di $\mathbb{Z}$-catene allora sono isomorfe: infatti esiste una corrispondenza biunivoca tra le loro $\mathbb{Z}$-catene, e due qualunque $\mathbb{Z}$-catene sono isomorfe rispetto alla funzione successore (e le due parti standard sono isomorfe).

$\mathrm{Cn}(A_S)$ è dunque λ-categorica per λ più che numerabile, e per il test di Łoś - Vaught è completa, e $\mathrm{Cn}(A_S) = \mathrm{Th}(\mathcal{N}_S)$.

$\mathrm{Cn}(A_S)$ è ovviamente assiomatizzabile, anche se non finitamente assiomatizzabile (esercizio), quindi è decidibile.

Una ulteriore proprietà riguarda la eliminazione dei quantificatori. Si dice che una teoria T ammette l'eliminazione dei quantificatori se per ogni formula φ esiste una formula ψ priva di quantificatori tale che $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Teorema $\mathrm{Cn}(A_S)$ ammette l'eliminazione dei quantificatori.

(Senza dimostrazione.)

Questa proprietà permetterebbe una diversa dimostrazione della completezza di $\mathrm{Cn}(A_S)$, dimostrando che per ogni enunciato φ privo di quantificatori si ha $A_S \models \varphi$ o $A_S \models \neg\varphi$.

Ma soprattutto ha conseguenze sulla definibilità di insiemi in $\mathcal{N}_S$. Si vede facilmente che gli insiemi finiti e i cofiniti (quelli il cui complementare è finito) sono definibili[2] in $\mathcal{N}_S$ (esercizio); dall'eliminazione dei quantificatori segue che solo essi sono definibili.

1.2 Teoria dell'addizione

Se si considera

$$\mathcal{N}_O = \langle \mathbb{N}, 0, S, < \rangle$$

si ha una teoria i cui modelli sono ora totalmente ordinati (e questo significa che $<$ non è definibile in $\mathcal{N}_S$).

Peraltro vale un risultato analogo a quello per $\mathcal{N}_S$: Se A_O è l'insieme degli assiomi

$$\begin{array}{ll} S3 & \forall y(y \not\approx \mathbf{0} \rightarrow \exists x(y \approx \mathbf{s}x)) \\ L1 & \forall x \forall y(x \prec \mathbf{s}y \leftrightarrow x \prec y \vee x \approx y) \\ L2 & \forall x(x \not\prec \mathbf{0}) \\ L3 & \forall x \forall y(x \prec y \vee x \approx y \vee y \prec x) \\ L4 & \forall x \forall y(x \prec y \rightarrow y \not\prec x) \\ L5 & \forall x \forall y \forall z(x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z) \end{array}$$

allora $\mathrm{Cn}(A_O)$ è ovviamente finitamente assiomatizzabile, $\mathrm{Cn}(A_O) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N}_O)$ e $A_O \vdash A_S$ (esercizio); i suoi modelli possono ancora contenere un numero qualunque di $\mathbb{Z}$-catene, ma queste devono essere ordinate, dopo la parte standard e tra di loro. Due modelli qualunque della stessa cardinalità più che numerabile sono isomorfi e allora

$$\begin{array}{rl} \mathrm{Cn}(A_O) & \text{è completa} \\ & = \mathrm{Th}(\mathcal{N}_O) \\ & \text{è decidibile.} \end{array}$$

Inoltre vale anche per $\mathrm{Cn}(A_O)$ l'eliminazione dei quantificatori e che gli insiemi definibili sono esattamente i finiti e i cofiniti[3].

[2] Un insieme $X \subseteq |\mathcal{A}|$ si dice definibile in $\mathcal{A}$ se esiste una formula φ tale che

$$X = \{a \in |\mathcal{A}| : \models_{\mathcal{A}} \varphi[[a]]\}.$$

[3] Anche se per le relazioni ci sono ora più relazioni definibili, ad esempio $<$ dalla formula $x \prec y$.

L'operazione dell'addizione non è definibile in $\mathcal{N}_O$, perché altrimenti si potrebbe definire l'insieme dei pari, che non è né finito né cofinito.

Sia allora

$$\mathcal{N}_A = \langle \mathbb{N}, 0, S, <, + \rangle.$$

I modelli non standard di $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_A)$ sono anche modelli di $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_O)$, quindi totalmente ordinati, con un insieme di $\mathbb{Z}$-catene dopo la parte standard. Ma il tipo d'ordine delle $\mathbb{Z}$-catene non può più essere arbitrario: non c'è una prima $\mathbb{Z}$-catena e non c'è un'ultima $\mathbb{Z}$-catena, e tra due $\mathbb{Z}$-catene diverse deve essercene un'altra (si veda p. 188 per una spiegazione intuitiva, o meglio si cerchi di arrivarci da soli).

Senza dimostrazione (che a pp. 188 ss. è data attraverso l'eliminazione dei quantificatori, che richiede di sfruttare proprietà delle congruenze):

Teorema (Presburger, 1929) $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_A)$ è decidibile.

La teoria è anche assiomatizzabile, ma non presentiamo un sistema di assiomi.

Per quel che riguarda la definibilità, abbiamo (Teorema 32F, p. 192, senza dimostrazione) che gli insiemi definibili in $\mathcal{N}_A$ sono quelli eventualmente periodici, cioè gli insiemi X per cui esistono un n e un p tali che per ogni $m > n$, $m \in X$ se e solo se $m + p \in X$.

Ne segue che la moltiplicazione non è definibile in $\mathcal{N}_A$, perché con la moltiplicazione si può definire l'insieme dei quadrati, che non è eventualmente periodico.

1.3 Una teoria di lavoro

Invece di considerare ora la teoria della struttura $\mathcal{N}_M = \langle \mathbb{N}, 0, S, <, +, \cdot \rangle$, passiamo a

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, <, +, \cdot, E \rangle$$

dove E è la potenza, ma solo per comodità di calcolo. Nel paragrafo 3.7 è dimostrato in dettaglio come E sia definibile in $\mathcal{N}_M$ (e noi daremo più avanti una spiegazione), e come quindi tutta la trattazione che segue si applichi a $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_M)$.

Il linguaggio, come risulta anche dalla precedente trattazione, contiene i simboli $\mathbf{0}, \mathbf{s}, \prec, +, \bullet, \mathbf{E}$.

Useremo il seguente insieme finito A_E di assiomi:

$$
\begin{array}{ll}
S1 & \forall x(\mathbf{s}x \not\approx \mathbf{0}) \\
S2 & \forall x \forall y(\mathbf{s}x \approx \mathbf{s}y \to x \approx y) \\
L1 & \forall x \forall y(x \prec \mathbf{s}y \leftrightarrow x \prec y \vee x \approx y) \\
L2 & \forall x(x \not\prec \mathbf{0}) \\
L3 & \forall x \forall y(x \prec y \vee x \approx y \vee y \prec x) \\
A1 & \forall x(x + \mathbf{0} \approx x) \\
A2 & \forall x \forall y(x + \mathbf{s}y \approx \mathbf{s}(x + y)) \\
M1 & \forall x(x \bullet \mathbf{0} \approx \mathbf{0}) \\
M2 & \forall x \forall y(x \bullet \mathbf{s}y \approx x \bullet y + x) \\
E1 & \forall x(x \mathbf{E} \mathbf{0} \approx \mathbf{s}\mathbf{0}) \\
E2 & \forall x \forall y(x \mathbf{E}\, \mathbf{s}y \approx \ \mathbf{E}y \bullet x)
\end{array}
$$

che sono ovviamente tali che $\mathrm{Cn}(A_E) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Lemma 33A
(a) $A_E \vdash \forall x(x \ \not\prec \mathbf{0})$;
(b) per ogni numero naturale k

$$A_E \vdash \forall x(x \prec \mathbf{s}^{k+1}\mathbf{0} \leftrightarrow x \approx \mathbf{0} \vee x \approx \mathbf{s}\mathbf{0} \vee \ldots \vee x \approx \mathbf{s}^k\mathbf{0}).$$

Lemma 33B Per ogni termine t privo di variabili, esiste un unico numero naturale n tale che

$$A_E \vdash t \approx \mathbf{s}^n\mathbf{0}.$$

(Dimostrazioni a p. 195, ma meglio farle come esercizio.)

Teorema 33C Se τ è un enunciato privo di quantificatori vero in $\mathcal{N}$, $A_E \vdash \tau$.

Corollario 33D Se τ è un enunciato esistenziale[4] vero in $\mathcal{N}$, allora $A_E \vdash \tau$.

[4]Significa che è della forma $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$, dove φ è priva di quantificatori.

2 Rappresentabilità in $\mathrm{Cn}(A_E)$

Ora iniziamo il lavoro preliminare alla dimostrazione del teorema di incompletezza studiando la teoria $\mathrm{Cn}(A_E)$ dal punto di vista di quali relazioni e funzioni sono in essa definibili, in un senso preciso e forte di definibilità.

2.1 Relazioni rappresentabili, e ricorsive

Una relazione $R \subseteq \mathbb{N}^r$ è definita in $\mathcal{N}$ dalla formula[5] $\varphi(x_1, \ldots, x_{r)}$ se per ogni $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$

$$\langle n_1, \ldots, n_r \rangle \in R \text{ se e solo se } \models_{\mathcal{N}} \varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r),$$

che equivale alla congiunzione di

$$\langle n_1, \ldots, n_r \rangle \in R \Rightarrow \models_{\mathcal{N}} \varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r)$$

$$\langle n_1, \ldots, n_r \rangle \notin R \Rightarrow \models_{\mathcal{N}} \neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r).$$

Una relazione $R \subseteq \mathbb{N}^r$ è *rappresentata* in T, dove T è una teoria nel linguaggio contenente almeno $\mathbf{0}$ e $\mathbf{s}$, dalla formula φ se per ogni $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ si ha

$$\langle n_1, \ldots, n_r \rangle \in R \Rightarrow T \vdash \varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r)$$

$$\langle n_1, \ldots, n_r \rangle \notin R \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r).$$

Una relazione è *rappresentabile* in T se esiste una formula tale che la relazione è rappresentata in T da quella formula.

Teorema 33F Se R è una relazione rappresentabile in una teoria assiomatizzabile consistente allora R è decidibile.

(Dimostrazione p. 198).

[5]Di qui in avanti si usa la più usuale notazione $\varphi(x)$ per una formula con la variabile x libera, e $\varphi(t)$ per φ^x_t, quando non ci sia pericolo di ambiguità (lo stesso per due o più variabili). Si osservi inoltre che per ogni $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ e ogni $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ si ha

$$\models_{\mathcal{N}} \varphi[[n_1, \ldots, n_r]] \text{ se e solo se } \models_{\mathcal{N}} \varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_r).$$

Corollario Una relazione rappresentabile in A_E è decidibile[6].

Nel precedente risultato un metodo di decisione è descritto esplicitamente e riconosciuto come tale. Se si vuole invertire il risultato, occorrerebbe avere una definizione precisa di "metodo di decisione", per ora informale.

Tra le tante equivalenti, usiamo la seguente,

Definizione Una relazione sui numeri naturali è *ricorsiva* se e solo se è rappresentabile in qualche teoria finitamente assiomatizzabile consistente (in un linguaggio con $\mathbf{0}$ e $\mathbf{s}$),

che permette ovviamente di invertire il Teorema 33F.

Si chiama *tesi di Church* il principio che fissa il significato di "decidibile" affermando che una relazione è decidibile se e solo se è ricorsiva.

Il sostegno a questa tesi è ricco e vario, a partire (a) dalla equivalenza della ricorsività con altre definizioni per mezzo di macchine di Turing, macchine a registri, automi cellulari e altri modelli di calcolo, (b) l'esperienza che ha mostrato essere ricorsive tutte le relazioni intuitivamente riconosciute come decidibili e (c) la chiusura della classe delle relazioni ricorsive rispetto a tutti gli schemi noti per passare in modo effettivo da una relazione ad un'altra.

Dimostreremo che se una relazione è rappresentabile in una qualunque teoria finitamente assiomatizzabile consistente allora è rappresentabile in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

Definizione Una funzione $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ è *calcolabile* se e solo se esiste una procedura effettiva che per ogni k-upla $\vec{a}$ di elementi di $\mathbb{N}$ produce $f(\vec{a})$.

Teorema 33H Per una funzione $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ le seguenti condizioni sono equivalenti:
(a) f è calcolabile;
(b) considerata come una relazione, f è decidibile,
(c) considerata come una relazione, f è effettivamente enumerabile.

Dimostrazione
(a) $\Rightarrow$ (b) Assumendo che f sia calcolabile, data la $(k+1)$-upla $\langle a_1, \dots, a_k, b\rangle$ per decidere se $\langle a_1, \dots, a_k, b\rangle \in f$ o no si calcoli $f(\vec{a})$ e si confronti con b.
(b) $\Rightarrow$ (c) Si enumerano tutte le $\langle a_1, \dots, a_k, b\rangle$ e si fanno uscire solo quelle che appartengono alla relazione.
(c) $\Rightarrow$ (a) Per calcolare $f(\vec{a})$ si esaminano tutte le $\langle x_1, \dots, x_k, y\rangle$ emesse dalla

[6] A_E è consistente, se esiste $\mathbb{N}$.

enumerazione finchè se ne trova una che inizia con $a_1, \dots, a_k$, e si prende il $(k+1)$-esimo termine come valore di $f(\vec{a})$.

2.2 Formule determinate

Una formula φ che non abbia variabili libere oltre a $x_1, \dots, x_r$ si dice *determinata per numerali*[7] da A_E se

per ogni $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, $A_E \vdash \varphi(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r)$ o $A_E \vdash \neg\varphi(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r)$.

Per brevità diremo anche soltanto "determinata".

Teorema 33E Una formula φ rappresenta una relazione $R \subseteq \mathbb{N}^r$ in $\mathrm{Cn}(A_E)$ se e solo se
(1) φ è determinata per numerali da A_E e
(2) φ definisce R in $\mathcal{N}$.

(Dimostrazione p. 198).

Per stabilire che certe relazioni sono rappresentabili in $\mathrm{Cn}(A_E)$ è comodo avere un catalogo di formule determinate per numerali da A_E (la definibilità in $\mathcal{N}$ è spesso immediata, con la formula che più spontaneamente si usa in pratica)[8].

Teorema 33H
(a) Ogni formula atomica è determinata.
(b) Se φ e ψ sono determinate, anche $\neg\varphi$ e $\varphi \to \psi$ lo sono.
(c) Se φ è determinata, lo sono anche[9]

$$\forall x(x \prec y \to \varphi)$$

e

$$\exists x(x \prec y \land \varphi).$$

(Dimostrazione a pp. 202-3, usando il Lemma 33A.)

Ad esempio l'insieme dei primi è rappresentabile in $\mathrm{Cn}(A_E)$ perché è definito in $\mathcal{N}$ dalla formula

[7] o *rispetto ai numerali*, ingl. *numeralwise determined*.

[8] Ometteremo talvolta la precisazione "da A_E", visto che questa è la nostra teoria di riferimento.

[9] Queste formule si dicono ottenute da φ per quantificazione ristretta, e si scrivono anche in modo abbreviato rispettivamente $\forall x \prec y\varphi$ e $\exists x \prec y\varphi$.

$$\mathbf{1} \prec x \land \forall y \prec x \forall z \prec x (y \bullet z \not\approx x),$$

che è una formula determinata.

2.3 Funzioni rappresentabili

Una funzione $f : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ si dice *rappresentata funzionalmente* in $\mathrm{Cn}(A_E)$ dalla formula φ con solo $x_1, \dots x_{r+1}$ libere se per ogni $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$

$$A_E \vdash \forall x_{r+1}(\varphi(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r, x_{r+1}) \leftrightarrow x_{r+1} \approx \mathbf{f}(\mathbf{n_1}, \dots \mathbf{n_r})).$$[10]

Una funzione è *funzionalmente rappresentabile* in $\mathrm{Cn}(A_E)$ se esiste una formula che la rappresenta funzionalmente.

Teorema 33J Se φ rappresenta funzionalmente f in $\mathrm{Cn}(A_E)$ allora rappresenta f (come relazione) in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

Se invece φ rappresenta f come funzione, non è detto che la rappresenti funzionalmente (non è detto che si possa dimostrare l'unicità implicita nella definizione di rappresentabililtà funzionale), ma

Teorema 33H Se f è rappresentabile come relazione in $\mathrm{Cn}(A_E)$ esiste una formula che la rappresenta funzionalmente in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

(Se f, poniamo a un argomento, è rappresentata come relazione da $\theta(x, y)$, la formula $\theta(x, y) \land \forall z \prec y \neg\theta(x, z)$ rappresenta funzionalmente f. Per i dettagli, se si vuole, si veda pp. 204-5.)

2.4 Proprietà di chiusura

Prendiamo nota di una serie di importanti proprietà di chiusura della classe delle relazioni e delle funzioni rappresentabili in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

1. Una relazione R è rappresentabile se e solo la sua funzione caratteristica

   $$K_R(\vec{n}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{n} \in R \\ 0 & \text{se } \vec{n} \notin R \end{cases}$$

   è funzionalmente rappresentabile.

[10] Con $\mathbf{f}(\mathbf{n_1}, \dots \mathbf{n_r})$ indichiamo il numerale di $f(n_1, \dots, n_r)$, ovvero $\mathbf{s}^{f(n_1,\dots,n_r)}\mathbf{0}$.

2. Le relazioni rappresentabili sono chiuse rispetto a unione, intersezione e complemento.

3. Se R è rappresentabile, lo sono anche

$$\{\langle n_1, \ldots, n_r, n\rangle : \text{ per ogni } m < n \ \langle n_1, \ldots, n_r, m\rangle \in R\}$$

e

$$\{\langle n_1, \ldots, n_r, n\rangle : \text{ per qualche } m < n \ \langle n_1, \ldots, n_r, m\rangle \in R\}.$$

4. (Composizione) Se g è una funzione a r posti e $h_1, \ldots, h_r$ sono funzioni a m posti, allora

$$f(n_1, \ldots n_m) = g(h_1(n_1, \ldots n_m), \ldots h_r(n_1, \ldots n_m))$$

è rappresentabile se $g, h_1, \ldots, h_r$ lo sono.

(Caso particolare per $f(n) = g(h_1(n), h_2(n))$: se g è rappresentata da ψ e h_1 e h_2 sono rappresentate rispettivamente da θ_1 e θ_2, f è rappresentata da

$$\exists y_1 \exists y_2 (\theta_1(x, y_1) \wedge \theta_2(x, y_2) \wedge \psi(y_1, y_2, y)).$$

Sia questa formula indicata con $\varphi(x, y)$; dobbiamo dimostrare

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{n}, y) \leftrightarrow y \approx \mathbf{f}(\mathbf{n}).$$

Ora $f(n) = g(h_1(n), h_2(n))$ e $y \approx \mathbf{f}(\mathbf{n})$ è $y \approx \mathbf{g}(\mathbf{h_1}(\mathbf{n}), \mathbf{h_2}(\mathbf{n}))$; da essa segue, per le proprietà di ψ, $\psi(\mathbf{h_1}(\mathbf{n}), \mathbf{h_2}(\mathbf{n}), y)$, e da questa ancora $\exists y_1 \exists y_2 (y_1 \approx \mathbf{h_1}(\mathbf{n}) \wedge y_2 \approx \mathbf{h_2}(\mathbf{n}) \wedge \psi(y_1, y_2, y))$; d'altra parte per le proprietà delle θ_i, $y_i \approx \mathbf{h_i}(\mathbf{n})$ equivale a $\theta_i(\mathbf{n}, y_i)$, per cui si arriva a

$$\exists y_1 \exists y_2 (\theta_1(\mathbf{n}, y_1) \wedge \theta_2(\mathbf{n}, y_2) \wedge \psi(y_1, y_2, y))$$

che è $\varphi(\mathbf{n}, y)$.

Se $y \not\approx \mathbf{f}(\mathbf{n})$, allora $\neg\psi(\mathbf{h_1}(\mathbf{n}), \mathbf{h_2}(\mathbf{n}), y)$, da cui segue

$$y_1 \approx \mathbf{h_1}(\mathbf{n}) \wedge y_2 \approx \mathbf{h_2}(\mathbf{n}) \to \neg\psi(y_1, y_2, y))$$

e quindi

$$\theta_1(\mathbf{n}, y_1) \wedge \theta_2(\mathbf{n}, y_2) \to \neg\psi(y_1, y_2, y)),$$

che generalizzando universalmente è $\neg\varphi(\mathbf{n}, y)$.

Ci siamo dilungati su questa dimostrazione perché la presenza di quantificatori non ristretti, come nel caso di φ, fa perdere in generale la proprietà di determinatezza–come risultato finale di quanto dimostreremo–ma in questo caso no. Il motivo è che oltre a una definizione di f con una formula come φ con quantificatori esistenziali davanti a una formula determinata, esiste anche una definizione con una formula che ha quantificatori universali davanti a una formula determinata. Si veda p. 207, dove la dimostrazione è condotta per quest'altra formula. Praticamente è come se sia f sia il suo complemento fossero definibili con una formula esistenziale. In tali casi un toerema generale assicura che le formule sono determinate.)

Se le h_i non hanno tutte lo stesso numero di argomenti si possono utilizzare le funzioni proiezione per riportarsi al caso considerato. Le funzioni proiezione sono le funzioni $I_i^r(n_1, \ldots, n_r) = n_i$, per ogni $r \geq 1$ e $1 \leq i \leq r$.

5. Le funzioni proiezione $I_i^r(n_1, \ldots, n_r) = n_i$ sono rappresentate dall'equazione

$$x_{r+1} \approx x_i,$$

o meglio

$$x_{r+1} \approx x_i \wedge x_1 \approx x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \approx x_r.$$

Se ora la funzione f è definita da $f(n, m) = g(h(n), m)$, si può porre

$$f(n, m) = g(h(I_1^2(n, m)), I_2^2(n, m)).$$

6. Se $R \subseteq \mathbb{R}^r$ è una relazione binaria rappresentabile e $f_1 \ldots f_r$ sono funzioni rappresentabili con lo stesso numero di argomenti, anche

$$\{\vec{n} : \langle f_1(\vec{n}), \dots, f_r(\vec{n})\rangle \in R\}$$

è rappresentabile (contenuta in $\mathbb{R}^s$ dove s è il numero di argomenti delle f_i).

(Si applica la composizione, con K_R e le f_i.)

Si possono così ad esempio ottenere nuove relazioni rappresentabili "identificando o scambiando variabili", come in

$$\{\langle x, y\rangle : \langle y, x, x\rangle \in R\},$$

che si ottiene da R come

$$\{\langle x, y\rangle : \langle I_2^2(x, y), I_1^2(x, y), I_1^2(x, y)\rangle \in R\}.$$

7. Se R è una relazione rappresentabile, allora anche

$$\{\langle \vec{n}, n\rangle : \text{per ogni } r \leq n \ \langle \vec{n}, r\rangle \in R\}$$

e

$$\{\langle \vec{n}, n\rangle : \text{per qualche } r \leq n \ \langle \vec{n}, r\rangle \in R\}$$

lo sono.

(Basta sostituire $n + 1$ a n nelle definizioni trattate al punto 3.)

8. (Operatore di minimo) Supponiamo che $g : \mathbb{N}^{r+1} \to \mathbb{N}$ sia rappresentabile e che per ogni $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ esista un n tale che

$$g(n_1, \dots n_r, n) = 0,$$

allora è rappresentabile la funzione

$$f(n_1, \dots n_r) = \text{il più piccolo } n \text{ tale che } g(n_1, \dots n_r, n) = 0,$$

che si suole indicare con

$$f(n_1, \dots n_r) = \mu n[g(n_1, \dots n_r, n) = 0].$$

(Se, per $r = 1$, ψ rappresenta g, allora f è rappresentata da

$$\psi(x_1, x_2, \mathbf{0}) \wedge \forall y \prec x_2 \neg\psi(x_1, y, \mathbf{0}).)$$

9. La condizione $g(n_1, \dots, n_r, n) = 0$ nell'operatore di minimo è solo una comoda standardizzazione. In generale se R è una relazione rappresentabile e tale che per ogni $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ esista un n tale che

   $$\langle n_1, \dots, n_r, n \rangle \in R,$$

   allora

   $$f(n_1, \dots n_r) = \text{il più piccolo } n \text{ tale che } \langle n_1, \dots, n_r, n \rangle \in R,$$

   indicata con

   $$f(n_1, \dots n_r) = \mu n[\langle n_1, \dots, n_r, n \rangle \in R],$$

   è rappresentabile.

   (Se $\overline{R}$ è il complemento di R, allora

   $$f(n_1, \dots n_r) = \mu n[K_{\overline{R}}(n_1, \dots n_r, n) = 0].)$$

10. (Definizione per casi) Se f è definita con una distinzione di casi, con condizioni esaustive e mutuamente esclusive che siano rappresentabili, ad esempio

    $$f(\vec{n}) = \begin{cases} g(\vec{n}) & \text{se } \vec{n} \in R \\ h(\vec{n}) & \text{se } \vec{n} \notin R \end{cases}$$

    dove R è una relazione rappresentabile e g e h sono funzioni rappresentabili, anche f è rappresentabile.

    (f è definita da $f(\vec{n}) = g(\vec{n}) \cdot K_R(\vec{n}) + h(\vec{n}) \cdot K_R(\vec{n})$. Si usa la composizione e il fatto che $x \cdot y + z \cdot y$ è rappresentabile, come si dirà sotto.)

Un'ultima importante proprietà di chiusura, quella rispetto alla ricorsione primitiva, sarà dimostrata più avanti dopo che saranno introdotte le necessarie funzioni ausiliarie.

2.5 Un catalogo

Si può ora iniziare un catalogo di relazioni e funzioni rappresentabili in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

1. Ogni relazione definibile in $\mathcal{N}$ con una formula priva di quantificatori è rappresentabile. Ad esempio le relazioni finite e la relazione d'ordine $<$.

2. La funzione successore è rappresentata da $y \approx \mathbf{s}x$.

3. Ogni funzione costante, col valore n, anche intesa come funzione a r argomenti, è rappresentata da $x_{r+1} \approx \mathbf{n}$ (o meglio da $x_{r+1} \approx \mathbf{n} \wedge x_1 \approx x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \approx x_r$).

4. L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$x_3 \approx x_1 + x_2,$$
$$x_3 \approx x_1 \bullet x_2,$$
$$x_3 \approx x_1 \mathbf{E}\, x_2.$$

5. La relazione di divisibilità

$$\{\langle n, m\rangle : n \,\text{divide}\, m \text{ in } \mathbb{N}\}$$

   è rappresentabile.

   (n divide m se e solo se per qualche $q \leq m$ si ha $n \cdot q = m$.)

6. L'insieme dei numeri primi è rappresentabile.

7. L'insieme delle coppie di primi adiacenti è rappresentabile.

8. La funzione il cui valore per n è l'$(n+1)$-esimo primo p_n è rappresentabile.

   Dimostrazione Supponiamo che $p_n = b$, cioè che b sia primo, e sia l'$(n+1)$-esimo primo, $n > 0$, e consideriamo questo numero

$$c = 2^0 \cdot 3^1 \cdot \cdots \cdot p_n^n.$$

c ha queste proprietà:
(i) c è dispari,
(ii) se $q < b$ e $r \leq b$, se $\langle q, r \rangle$ è una coppia di primi adiacenti allora per ogni $j < c$

$$q^j \text{ divide } c \text{ se e solo se } r^{j+1} \text{ divide } c,$$

(iii) b^n divide c e b^{n+1} non divide c.
Viceversa, se c è un numero che soddisfa (i), (ii) e (iii) allora c deve essere della forma

$$c = 2^0 \cdot 3^1 \cdot \cdots \cdot b^n \cdot \text{ altre potenze di primi maggiori.}$$

Infatti se è dispari deve comparire 2^0 nella sua fattorizzazione, quindi se $3 \leq b$ per (ii) deve comparire il fattore 3^1 e così via. Ma per (iii) l'esponente di b è n e quindi b deve essere l'$(n+1)$-esimo numero primo.

Allora si ha $p_n = b$ se e solo se esiste $c \leq b^{(n^2)}$ tale che (i), (ii) e (iii) e da questa equivalenza si ricava la formula determinata che definisce la funzione p_n.[11]

2.5.1 Funzioni di codifica

Si noti che finora non abbiamo mai utilizzato **E** e nessuna proprietà delle potenze. Ora invece definiamo

$$\begin{aligned} \langle\langle n_0, \ldots, n_r \rangle\rangle &= p_0^{n_0+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r+1} \\ &= \prod_{i \leq r} p_i^{n_i+1} \end{aligned}$$

come funzione che codifica r-uple di numeri con numeri (poniamo anche $\langle\langle\ \rangle\rangle = 1$).

Si noti che la produttoria generalizzata $\prod_{i \leq r}$ si definisce di solito con la ricorsione primitiva, che vedremo sotto, quando è intesa come una funzione anche di r. In questo caso, invece r si considera fissato e si usa la moltiplicazione usuale.

[11] Esiste un modo più semplice di definire p_n con una definizione ricorsiva, ma non abbiamo ancora dimostrato che le funzioni definite con definizioni ricorsive sono rappresentabili. Si veda oltre.

9. Per ogni r, la funzione $\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle$ è rappresentabile (per ogni r da una formula diversa).

10. Esiste una funzione rappresentabile di due argomenti, il cui valore per $\langle m, r\rangle$ è indicato con $(m)_r$, tale che per $i \leq r$

$$(\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle)_i = n_i,$$

che serve da funzione di decodifica.

Dimostrazione Sia $(m)_r$ il più piccolo n tale che $m = 0$ o p_r^{n+2} non divide m. (Se $m \neq 0$ si ha che $(m)_r$ è uno meno dell'esponente di p_r nella fattorizzazione in primi di m, se p_r divide m, che è il caso che interessa nelle applicazioni successive; si ha $(0)_r = 0$ e $(m)_r = 0$ se $m \neq 0$ e p_r non divide m, oppure solo p_r lo divide e non p_r^2, quindi p_r^0 o p_r^1 compaiono nella fattorizzazione di m.)

Quindi

$$(\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle)_i = n_i.$$

La rappresentabilità segue dal fatto che $(m)_r = \mu n[\langle m, r, n\rangle \in R]$ dove

$$R = \{\langle m, r, n\rangle : m = 0 \text{ o } p_r^{n+2} \text{ non divide } m\}.$$

I numeri $(\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle)_i$ si chiameranno anche *componenti* del numero $\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle$.

11. Si dice che n è un *numero di sequenza* se per qualche $r \geq 0$ e qualche $n_0, \ldots, n_r$ si ha

$$n = \langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle$$

o $n = 1 = \langle\langle\ \rangle\rangle$.

L'insieme dei numeri di sequenza è rappresentabile.

12. Esiste una funzione rappresentabile lh tale che

$$\mathrm{lh}\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle = r + 1.$$

13. Esiste una funzione rappresentabile, il cui valore per $\langle m, r\rangle$ si chiama *restrizione* di m a r ed è indicato con $m \upharpoonright r$, tale che per ogni $i \leq r+1$

$$\langle\langle n_0, \ldots, n_r\rangle\rangle \upharpoonright i = \langle\langle n_0, \ldots, n_{i-1}\rangle\rangle.$$

14. (Ricorsione primitiva) A ogni funzione f a $r+1$ argomenti si associa una funzione $\tilde{f}$ tale che $\tilde{f}(n, \vec{a})$ codifica i valori di f per gli argomenti $i, \vec{a}$ per ogni $i < n$:

$$\tilde{f}(n, \vec{a}) = \langle\langle f(0, \vec{a}), \ldots, f(n-1, \vec{a})\rangle\rangle.$$

Data una funzione g a $r+2$ argomenti, esiste una e una sola funzione f che soddisfa

$$f(n, \vec{a}) = g(\tilde{f}(n, \vec{a}), n, \vec{a}).$$

Se g è rappresentabile, anche f lo è, e si dice definita per ricorsione primitiva da g.

(Senza ricorrere al teorema generale di ricorsione del capitolo 1, la dimostrazione che f è rappresentabile contiene anche l'argomento per provare l'esistenza di f. Infatti $\tilde{f}$ è definita dalla formula determinata che formalizza la seguente definizione:

$\tilde{f}(n, \vec{a}) =$ il più piccolo s tale che s è un numero di sequenza di lunghezza n e per $i < n$ $(s)_i = g(s \upharpoonright i, n, \vec{a})$.)

Il caso particolare più usato della ricorsione primitiva è quando

$$\begin{cases} f(0, m) & = & g(m) \\ f(n+1, m) & = & h(f(n, m), n, m), \end{cases}$$

e se g e h sono rappresentabili anche f lo è.

15. Se f è rappresentabile anche $\prod_{i<n} f(i, \vec{a})$ e $\sum_{i<n} f(i, \vec{a})$ sono rappresentabili.

16. La funzione

$$n * m = n \cdot \prod_{i<\mathrm{lh} m} p_{i+\mathrm{lh} n}^{(m)_i+1}$$

che si chiama *concatenazione* di n ed m, è rappresentabile,

$$\langle\langle n_0, \ldots, n_r \rangle\rangle * \langle\langle m_0, \ldots, m_s \rangle\rangle = \langle\langle n_0, \ldots, n_r, m_0, \ldots, m_s \rangle\rangle$$

ed è associativa.

17. Se f è rappresentabile, anche la funzione $F(n, \vec{a}) = \ast_{i<n} f(i, \vec{a})$ definita da

$$\begin{cases} F(0, \vec{a}) & = \langle\langle \ \rangle\rangle = 1 \\ F(n+1, \vec{a}) & = F(n, \vec{a}) * f(n, \vec{a}) \end{cases}$$

è rappresentabile.

3 Aritmetizzazione della sintassi

Si intende con questa dicitura una codifica mediante numeri naturali del linguaggio di A_E; numeri sono assegnati ai simboli dell'alfabeto, a espressioni, a deduzioni, in modo che tutte le relazioni e le operazioni sintattiche sono trasformate in relazioni e operazioni aritmetiche che risultano rappresentabili. La traduzione della trattazione informale della sintassi nella trattazione aritmetica di tali relazioni e operazioni aritmetiche trasforma la teoria aritmetica in una metateoria di se stessa.

3.1 Numeri di Gödel

Assegnamo numeri ai simboli dell'alfabeto in modo relativamente arbitrario secondo questa tabella:

Parametri	*Numeri*	*Simboli logici*	*Numeri*
$\forall$	0	(	1
0	2	)	3
s	4	$\neg$	5
$\prec$	6	$\to$	7
$+$	8	$\approx$	9
$\bullet$	10	v_1	11
E	12	v_2	13
		v_3	15
		$\vdots$	$\vdots$

Sia h la corrispondenza indicata dalla tabella. Per una espressione qualunque $\varepsilon = s_0 \ldots s_n$, il suo *numeri di Gödel* $\sharp\varepsilon$ è definito da

$$\sharp s_0 \ldots s_n = \langle\langle h(s_0), \ldots, h(s_n)\rangle\rangle.$$

A un insieme Φ di espressioni è assegnato $\sharp\Phi = \{\sharp\varepsilon : \varepsilon \in \Phi\}$.

A una sequenza $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$ di espressioni è assegnato il numero

$$\mathcal{G}(\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle) = \langle\langle \sharp\alpha_0, \ldots, \sharp\alpha_n \rangle\rangle.$$

Faremo ora vedere che diverse relazioni e funzioni sui numeri di Gödel sono rappresentabili in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

1. L'insieme dei numeri di Gödel delle variabili è rappresentabile.

   (È definito dalla formula determinata $\exists y \prec x(x \approx \langle\langle \mathbf{11} + \mathbf{2}y)$, che scriviamo $\mathrm{Var}(x)$.)

2. L'insieme dei numeri di Gödel dei termini è rappresentabile.

   L'insieme dei termini è definito induttivamente, e di conseguenza l'insieme dei numeri di Gödel di questo insieme è definito per ricorsione primitiva.

   La funzione caratteristica f di tale insieme è definita da una ricorsione che si riconduce alla ricorsione primitiva, in quanto alla destra occorrono solo valori di f per argomenti minori di x e le condizioni, se formalizzate (esercizio), sono espresse per mezzo di formule determinate.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è il numero di Gödel di una variabile} \\ 1 & \text{se esistono } i, k < x \text{ tali che } i \text{ è un numero di sequenza e} \\ & \text{per ogni } j < \mathrm{lh}i \ f((i)_j) = 1 \text{ e } k \text{ è il valore di } h \\ & \text{per un simbolo funzionale a } \mathrm{lh}i \text{ posti e} \\ & x = \langle\langle k\rangle\rangle * *_{j<\mathrm{lh}i}(i)_j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Questa è la forma generale nel caso di un insieme qualunque di simboli funzionali, anche infinito purché decidibile; nel caso particolare del linguaggio di A_E la seconda clausola può essere riformulata in modo che la definizione sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è il numero di Gödel di una variabile} \\ 1 & \text{se esistono } i, k < x \text{ tali che } i \text{ è un numero di sequenza e} \\ & \textit{per ogni } j < \mathrm{lh}i \ f((i)_j) = 1 \text{ e} \\ & ((k = 4 \text{ e } \mathrm{lh}i = 1 \text{ e } x = \langle\langle k, (i)_0\rangle\rangle) \text{ oppure} \\ & ((k = 8 \text{ o } k = 10 \text{ o } k = 12) \text{ e } \mathrm{lh}i = 2 \text{ e } x = \langle\langle k, (i)_0, (i)_1\rangle\rangle)) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo scrivere $\mathrm{Ter}(x)$ per la formula che rappresenta l'insieme dei numeri di Gödel dei termini, e Ter per l'insieme.

3. L'insieme dei numeri di Gödel delle formule atomiche è rappresentabile, dalla seguente formula determinata:

   $$\exists y \prec x \exists z \prec x \exists u \prec x((u \approx \mathbf{6} \vee u \approx \mathbf{9}) \wedge \mathrm{Ter}(y) \wedge \mathrm{Ter}(z) \wedge x \approx \langle\langle u, y, z\rangle\rangle).$$

4. L'insieme dei numeri di Gödel delle formule ben formate è rappresentabile.

   (Come per i termini, una definizione ricorsiva primitiva (si veda p. 220).)

   Indichiamo questo insieme con Form, e con $\mathrm{Form}(x)$ la formula che lo rappresenta.

   Useremo analoghe notazioni per indicare le formule che definiscono le prossime relazioni, con simbolismo trasparente.

5. Esiste una funzione rappresentabile Sb tale che per ogni termine o formula α, variabile x e termine t

   $$\mathrm{Sb}(\sharp\alpha, \sharp x, \sharp t) = \sharp\alpha^x_t.$$

   (Come in 2., con una definizione ricorsiva primitiva (si veda pp. 220-1).)

6. La funzione che a n assegna $\sharp\mathbf{n}$ è rappresentabile.

7. Esiste una relazione rappresentabile VL tale che per ogni termine o formula α e ogni variabile x

   $$\langle\sharp\alpha, \sharp x\rangle \in \mathrm{VL} \text{ se e solo se } x \text{ occorre libera}^{12} \text{ in } \alpha.$$

   (L'operazione di sostituzione di un termine t in un termine o in una formula α alla variabile x è definita in modo tale che se x non occorre libera in α allora α^x_t è α. Quindi si può osservare che

   $$\langle m, n\rangle \in \mathrm{VL} \text{ se e solo se } \mathrm{Sb}(m, n, \sharp\mathbf{0}) \neq m \text{ oppure } m = n \text{ e } \mathrm{Var}(n).)$$

[12] Ogni occorrenza di una variabile in un termine è libera.

8. L'insieme dei numeri di Gödel degli enunciati è rappresentabile, dalla formula

$$\mathrm{Form}(x) \land \forall y \prec x(\mathrm{Var}(x) \to \neg\mathrm{VL}(x, y)).$$

Si sarà notato che qualche volta abbiamo scritto esplicitamente la formula che definisce la relazione o la funzione in oggetto, qualche volta abbiamo dato solo la definizione nell'usuale linguaggio semiformale; la scelta è dovuta soltanto a ragioni di leggibilità: se la formula è troppo complicata, meglio partire dalla versione semiformale comprensibile e formalizzare, che viceversa.

Esistono ancora molti passi nella dimostrazione della rappresentabilità di tutte le operazioni e relazioni sintattiche, ad esempio

9. La relazione Gen, tale che $\langle m, n\rangle \in \mathrm{Gen}$ se e solo se m è il numero di Gödel di una formula e n è il numero di Gödel di una generalizzazione di quella formula, è rappresentabile.

   ($\langle m, n\rangle \in$Gen se e solo se $m = n$ o esistono i e $j < n$ tali che $\mathrm{Var}(i)$ e $\langle m, j\rangle \in \mathrm{Gen}$ e $n = \langle\langle 0\rangle\rangle * i * j$.)

   Siccome non abbiamo il tempo di percorrere tutti i passaggi, con la speranza che quanto mostrato sia sufficientemente convincente veniamo alla conclusione.

10. L'insieme dei numeri di Gödel degli assiomi logici è rappresentabile.

11. Per ogni insieme finito A di formule, l'insieme

$$\{\mathcal{G}(D) : D \,\text{è una deduzione da}\, A\}$$

è rappresentabile.

(Un numero d appartiene a questo insieme se e solo se d è un numero di sequenza diverso da 1, e per ogni $i < \mathrm{lh}d$, o

   (a) $(d)_i \in \sharp A$, o
   (b) $(d)_i$ è il numero di Gödel di un assioma logico, o
   (c) esistono $j, k < i$ per cui $(d)_j = \langle\langle 1\rangle\rangle * (d)_k * \langle\langle 7\rangle\rangle * (d)_i * \langle\langle 3\rangle\rangle$.)

3.2 Relazioni ricorsive

Abbiamo infine

12. Ogni relazione ricorsiva è rappresentabile in $\mathrm{Cn}(A_E)$.

    (Se R è rappresentata da φ in $\mathrm{Cn}(A)$, basta dire che $\sharp\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots \mathbf{n}_r)$ è l'ultima componente del numero $f(n_1, \ldots, n_r)$, dove $f(n_1, \ldots, n_r)$ è un numero di sequenza che appartiene all'insieme dei numeri di Gödel delle deduzioni da A, e precisamente il più piccolo m di questo insieme tale che la sua ultima componente è $\sharp\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots \mathbf{n}_r)$ o $\sharp\neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots \mathbf{n}_r)$.

    L'unico problema è che preliminarmente si deve rivedere la assegnazione dei numeri di Gödel all'alfabeto, per tener conto dei simboli di A; si può supporre che ci siano solo un numero finito di parametri, oltre $\mathbf{0}$ e $\mathbf{s}$, quelli che occorrono in A.)

Siccome il viceversa è ovvio si ha il

Teorema 34A Una relazione è ricorsiva se e solo se è rappresentabile in $\mathrm{Cn}(A_E)$

con il

Corollario 34B Ogni relazione ricorsiva è definibile in $\mathcal{N}$.

Se A è un insieme di enunciati tali che $\sharp A$ è ricorsivo, non è detto che $\sharp\mathrm{Cn}(A)$ sia ricorsivo, perché lo si può definire solo dicendo che $n \in \sharp\mathrm{Cn}(A)$ se e solo se esiste un numero che è il numero di Gödel di una deduzione da A e la cui ultima componente è n, ma non si può mettere un confine al quantificatore esistenziale. Tuttavia

13. Se $\sharp A$ è ricorsivo e $\mathrm{Cn}(A)$ è completa, $\sharp\mathrm{Cn}(A)$ è ricorsivo.

    Infatti (come nella dimostrazione informale della decidibilità di una teoria assiomatizzata completa), $s \in \sharp\mathrm{Cn}(A)$ se e solo se $s > 0$ è l'ultima componente di $g(s)$, dove

    $g(s) =$ il più piccolo d tale che s non è il numero di Gödel di un enunciato o d è il numero di Gödel di una deduzione da A la cui ultima componente è o s o $\langle\langle 1\rangle\rangle * \langle\langle 5\rangle\rangle * s * \langle\langle 3\rangle\rangle$.

4 Incompletezza e indecidibilità

Al centro della dimostrazione di Gödel è l'*autoriferimento*, realizzato nel seguente

Lemma del punto fisso Per ogni formula β con la sola x libera, si può trovare un enunciato σ tale che

$$A_E \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}).$$

Dimostrazione Sia $\theta(x, y, z)$ una formula che rappresenta funzionalmente in $\mathrm{Cn}(A_E)$ la funzione che a $\langle \sharp\alpha, n\rangle$ associa $\sharp\alpha(\mathbf{s}^n\mathbf{0})$, quando α è una formula con una sola variabile libera.

La formula

$$\forall z(\theta(x, x, z) \to \beta(z))$$

definisce in $\mathcal{N}$ un insieme a cui un numero $\sharp\alpha$ appartiene se e solo se $\sharp\alpha(\mathbf{s}^{\sharp\alpha}\mathbf{0})$ appartiene all'insieme definito da β.

Sia q il numero di Gödel di questa formula. Sia σ l'enunciato

$$\forall z(\theta(\mathbf{q}, \mathbf{q}, z) \to \beta(z)).$$

Intuitivamente σ afferma che $\sharp\sigma$ è nell'insieme definito da β. Ma occorre provare che

$$\sigma \leftrightarrow \beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0})$$

è deducibile da A_E.

Da σ segue $\theta(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}) \to \beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}))$, ma l'antecedente è dimostrabile in A_E, quindi $\beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}))$.

Viceversa da $\forall z(\theta(\mathbf{q}, \mathbf{q}, z) \to z \approx \mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0})$ segue

$$\beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}) \to (\forall z(\theta(\mathbf{q}, \mathbf{q}, z) \to \beta(z))),$$

cioè

$$\beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}) \to \sigma.$$

La formula β del lemma intuitivamente afferma: "io soddisfo β".

Teorema di indefinibilità di Tarski L'insieme $\sharp\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ non è definibile in $\mathcal{N}$.

(Dimostrazione a p. 229, meglio provare come esercizio.)

Corollario 35A L'insieme $\sharp\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ non è ricorsivo.

Teorema di incompletezza di Gödel, 1931 Se $A \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ e $\sharp A$ è ricorsivo, $\mathrm{Cn}(A)$ non è una teoria completa.

Dimostrazione Siccome $A \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ si ha $\mathrm{Cn}(A) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Se $\mathrm{Cn}(A)$ fosse completa, si avrebbe l'uguaglianza, ma anche che $\sharp\mathrm{Cn}(A)$ è ricorsivo, mentre $\sharp\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ non è ricorsivo.

La dimostrazione di sopra, che sfrutta il Corollario 35A, è una riformulazione della dimostrazione originaria.

Teorema 35C $\sharp\mathrm{Cn}(A_E)$ non è ricorsivo (e lo stesso vale per ogni teoria T compatibile con A_E, cioè tale che $T \cup A_E$ sia consistente).

Dimostrazione Se $\sharp\mathrm{Cn}(A_E)$ fosse ricorsivo, sarebbe rappresentato in $\mathrm{Cn}(A_E)$ da qualche formula β. Per il lemma del punto fisso applicato a $\neg\beta$ si otterrebbe un enunciato σ per cui

$$A_E \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\beta(\mathbf{s}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}).$$

Da questa è facile ricavare che non può essere né $\sigma \in \mathrm{Cn}(A_E)$ né $\neg\sigma \in \mathrm{Cn}(A_E)$.

Come Corollario, prendendo T uguale all'insieme degli enunciati logicamente veri, si ha

Teorema di Church, 1936 L'insieme dei numeri di Gödel degli enunciati logicamente veri (nel linguaggio di di $\mathcal{N}$) non è ricorsivo,

che si esprime dicendo che il problema della validità logica per linguaggi del primo ordine non è in generale decidibile.