Corso di Logica Matematica

Corso di Laurea in Informatica, Torino

Anno 2000-2001

Introduzione

0.1 La logica matematica

Lo studio della logica è sempre stato importante, dall'antichità attraverso il Medio Evo fino all'età moderna; allora è stata rimpiazzata come *ars inveniendi* dalla pratica scientifica, ma la si è continuata a studiare dal punto di vista di propedeutica generale alla filosofia e, ancora nell'Ottocento, al metodo scientifico. Nel Novecento la logica è tornata a essere strumento anche di soluzione di problemi, collegata e orientata alla meccanizzazione. Un inquadramento completo degli sviluppi contemporanei richiederebbe troppa cornice storica e teorica, dai fondamenti della matematica alla filosofia del linguaggio[1].

Il corso è dedicato alla presentazione di alcuni concetti fondamentali e di qualche tecnica. Le definizioni di base sono quelle tradizionali di **conseguenza logica**, validità, non contraddittorietà e altre, tutte collegate; esse richiedono il concetto di interpretazione di un **linguaggio** e l'introduzione della **semantica**, nettamente distinta dalla **sintassi**, cosa che nei linguaggi naturali è discutibile che si possa fare; la verifica delle nozioni logiche comporta l'introduzione di **calcoli logici** con un carattere **effettivo**[2].

La logica si chiama ora logica matematica perché sia i linguaggi formali sia le loro interpretazioni sono strutture matematiche, ancorché di tipo diverso, discrete le prime, insiemistiche le seconde, e il loro studio richiede un'impostazione matematica, su entrambi i fronti.

La logica matematica è uno degli esempi più espliciti dell'uso di strutture e processi discreti per lo studio di fenomeni naturali (in questo caso il linguaggio e il ragionamento) apparentemente fluidi e di contenuto sfumato e inesauribile.

La logica matematica fornisce anche l'esempio più chiaro di processi meccanizzabili (la produzione o la verifica di ragionamenti corretti) ma *non decidibili* da algoritmi con terminazione garantita. L'argomento della indecidibilità rientra nel programma di corsi più avanzati.

[1] Rinviamo per una breve panoramica storica all'appendice di A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, New York, 1997. Può essere lusinghiero realizzare che questa materia ha la dignità storica e culturale di una disciplina umanistica (che in generale vuol dire antica).

[2] La meccanizzazione sarà rilevata solo a livello informale, non scriveremo programmi, ma è importante imparare a riconoscere il carattere effettivo in modo informale.

0.2 I linguaggi logici

Fin dall'antichità si è riconosciuta l'importanza di schematizzare alcune forme di ragionamento; si è capito che i ragionamenti validi potevano essere riconosciuti e classificati in base alla forma delle frasi, anzi che la loro validità dipendeva dalla forma. Una condizione preliminare per l'analisi logica è la rappresentazione schematica del discorso. Il linguaggio naturale è troppo complicato, ricco, ambiguo, contraddittorio anche. L'analisi linguistica e la conseguente rappresentazione formale condiziona l'analisi logica delle frasi, le loro possibili manipolazioni, e i tipi di ragionamento che possono essere presi in considerazione.

Da Aristotele alla Scolastica era disponibile solo una scomposizione delle frasi elementari in soggetto-predicato, ogni affermazione essendo una predicazione, e tutte le frasi erano viste come attribuzione della sussistenza o no di un predicato, o di una proprietà.

Le frasi di carattere generale disponibili erano allora solo le *affermazioni categoriche*:

- universali affermative

$$\text{Tutti i } P \text{ sono } M$$
$$\mathbf{A}\text{: } P - M$$

- universali negative

$$\text{Nessun } P \text{ è } M$$
$$\mathbf{E}\text{: } P - M$$

- particolari affermative

$$\text{Qualche } P \text{ è } M$$
$$\mathbf{I}\text{: } P - M$$

- particolari negative

$$\text{Qualche } P \text{ non è } M$$
$$\mathbf{O}\text{: } P - M$$

Altre affermazioni potevano rientrare nella forma delle proposzioni categoriche; ad esempio un'affermazione singolare come "Socrate è mortale" si rappresentava introducendo il predicato di socraticità S, soddisfatto da un solo individuo, e con "Tutti gli S sono M".

La limitazione principale, ma esiziale, era la mancanza delle **variabili** individuali per rappresentare i soggetti generici delle frasi, così come la considerazione delle **relazioni**. Si potevano sì rappresentare ed analizzare sillogismi come ad esempio

Nessun ladro è onesto
Qualche politico è onesto
Dunque: Qualche politico non è ladro,

che è un sillogismo di modo **EIO** e figura

$$\begin{array}{c} P - M \\ S - M \end{array}$$

e quindi valido secondo la teoria logica, che era in grado di distinguere i sillogismi validi da quelli non validi in base alla forma (senza bisogno di dover pensare al significato dei termini, o a esempi di particolari politici). Invece il sillogismo

Nessun ladro è onesto
Qualche politico non è ladro
Dunque: Qualche politico è onesto,

un sillogismo di modo **EOI** e figura

$$\begin{array}{c} M - P \\ S - M \end{array}$$

non è valido (la conclusione non è conseguenza delle premesse, indipendentemente dalla sua verità o meno).

Ma la teoria non era in grado di analizzare argomenti più complessi. Una frase come "Chi ha un amico è fortunato poteva venir resa solo, introducendo il predicato P per "avere un amico ed M per "essere fortunato, da "Tutti i P sono M o **A**: $P - M$, non diversamente dalla rappresentazione di una frase completamente diversa come "Tutti gli uomini sono mortali.

Non si poteva analizzare ad esempio il seguente ragionamento: Chi ha un amico è fortunato, Tizio è amico di Caio, l'amicizia è simmetrica, quindi (Caio è un amico di Tizio e) Tizio è fortunato.

Nell'analisi linguistica moderna, che risale a fine Ottocento, si introduce una relazione a due posti $A(x, y)$ a rappresentare che "y è amico di x, oltre a un predicato F per l'essere fortunati[3], e si scrive

$$\forall x(\exists y A(x, y) \to F(x)).$$

Quindi il ragionamento di sopra si esprime con la seguente successione di formule, dove t e c sono due nomi per Tizio e Caio:

$$\begin{gathered}
\forall x(\exists y A(x, y) \to F(x)) \\
\exists y A(t, y) \to F(t) \\
A(c, t) \\
\forall x \forall y(A(x, y) \to A(y, x)) \\
A(c, t) \to A(t, c) \\
A(t, c) \\
\exists y A(t, y) \\
F(t)
\end{gathered}$$

La rappresentazione delle frasi nei linguaggi logici permette analisi molto fini di tutte le sfumature di significato; ad esempio si vede (si vedrà) che la precedente $\forall x(\exists y A(x, y) \to F(x))$ è equivalente a

$$\forall x \forall y(A(x, y) \to F(x))$$

che si può leggere: se uno (un qualsiasi x) ha un amico (y) *qualunque*, anche un cane, allora è fortunato, lettura che permette di cogliere meglio il senso vero della frase. Il sottoprodotto più importante dello studio della sintassi dei linguaggi logici è la comprensione del ruolo delle variabili come controparte formale dei pronomi.

Pur mantenendo tutta la loro forza, i linguaggi logici sono stati elaborati e semplificati in modo da permettere l'applicazione di calcoli, per la realizzazione meccanica dei ragionamenti.

Un esempio scolastico classico di un problema di Intelligenza Artificiale che è facilmente risolvibile attraverso la formalizzazione, anche se nella sua

[3]La terminologia della logica contemporanea, a cui ci adegueremo, sembra purtroppo scelta per confondere: vecchi predicati e relazioni si chiamano ora tutti predicati, i primi predicati a un posto, le seconde predicati a più posti (possono essercene anche a tre posti, o con un numero maggiore). Al massimo i vecchi predicati si chiamano proprietà e le si distinguono dalle relazioni; proprietà e relazioni però sono tutti predicati; da qui il nome di Logica predicativa, e linguaggi predicativi, che compare nella seconda parte del corso.

semplicità è più da Settimana Enigmistica che da Intelligenza Artificiale, è quello dei tre cestini che contengono tre tipi diversi di frutta. Ogni cestino contiene un solo tipo di frutta e ogni tipo di frutta si trova in un solo cestino. Ogni cestino ha sul coperchio un'etichetta che però non corrisponde al contenuto. E' concesso di sollevare il coperchio di un cestino e vedere cosa contiene, dopo di che si deve indovinare che cosa contengono gli altri due.

Una possibile rappresentazione dei dati è la seguente; si indicano con a, b e c i tre cestini, e i tre tipi di frutta siano mele arance e banane. Si usi una relazione $Et(x, y)$ per "il cestino x ha l'etichetta y e una relazione $Con(x, y)$ per "il cestino x contiene la frutta y. Con familiari abbreviazioni ($\neg$ per la negazione, $\wedge$ per la congiunzione e $\vee$ per la disgiunzione),

1 $Et(a, mele)$
2 $Et(b, arance)$
3 $Et(c, banane)$
4 $Con(x, mele) \vee Con(x, arance) \vee Con(x, banane)$
5 $Con(a, x) \rightarrow \neg Con(b, x) \wedge \neg Con(c, x)$
6 $Con(b, x) \rightarrow \neg Con(a, x) \wedge \neg Con(c, x)$
7 $Con(c, x) \rightarrow \neg Con(a, x) \wedge \neg Con(a, x)$
8 $Et(x, y) \rightarrow \neg Con(x, y)$

e infine l'osservazione

9 $Con(b, mele)$

e ora si chiede di scoprire cosa contengano a e c. Non di indovinare, ma di dedurre dalla base di conoscenze sopra costruita.

Se ci si interroga su c si può dedurre

10 $\neg Con(c, mele)$ da 6 e 9
11 $\neg Con(c, banane)$ da 3 e 8

e quindi

12 $Con(c, arance)$ da 4, e 10 e 11.

Analogamente per a:

13 $\neg Con(a, mele)$ da 1 e 8
14 $\neg Con(a, arance)$ da 7 e 12

e quindi

15 $Con(a, banane)$ da 4, e 13 e 14.

Come si vede non è stato necessario usare le condizioni relative al fatto che ogni cestino contiene un solo tipo di frutta, che si sarebbero pur potute scrivere all'inizio; ma sono superflue, come risulta dalla derivazione, e sono derivabili esse stesse dalle altre (esercizio). Notare che non sono state usate neanche 2 e 5.

La base di conoscenze avrebbe potuto essere scritta in un modo diverso, anche fatta la scelta di un linguaggio logico con *Et* e *Con*, e anzi più compatto: la condizione ad esempio che ogni frutto appartenga ad *un solo* cestino si potrebbe scrivere con un'unica frase, ma al prezzo di usare l'uguaglianza per esprimere l'unicità. La rappresentazione scelta, resa possibile anche dalla finitezza dell'universo di discorso, è meno elegante ma più efficiente dal punto di vista della deduzione della risposta.

Il problema fondamentale è quello di eliminare il ricorso a qualsiasi forma di intuizione o tentativo casuale nella produzione della sequenza 10-15. La realizzazione di questo compito, nella misura in cui è possibile, è l'obiettivo della **programmazione logica**[4].

Il corso tratterà gli argomenti che nella presente introduzione sono indicati da parole chiave, evidenziate in grassetto; è diviso in due parti, la logica proposizionale e la logica predicativa.

[4]Non prenderemo in considerazione i linguaggi di programmazione imperativa, ma molte questioni relative ai programmi, come corretteza e terminazione, sono analizzabili con un linguaggio e tecniche logiche; si veda ad esempio l'Appendice in G. Lolli, *Introduzione alla logica formale*, Il Mulino, Bologna, 1992.

INDICE

0. Introduzione
- 0.1 La logica matematica
- 0.2 I linguaggi logici

Logica proposizionale

1 Linguaggio proposizionale
- 1.1 Alfabeto
- 1.2 Morfologia
- 1.3 Analisi sintattica
- 1.4 Esercizi

2 Semantica
- 2.1 Interpretazioni e valutazioni
- 2.2 Validità e conseguenza
- 2.3 Esercizi
- 2.4 Forme normali
- 2.5 Definibilità
- 2.6 Connettivi e linguaggio naturale
- 2.7 Esercizi

3 Calcoli logici
- 3.1 Alberi di refutazione
- 3.2 Calcolo della risoluzione
- 3.3 Risoluzione lineare ordinata
- 3.4 Esercizi
- 3.5 Clausole di Horn e Programmazione logica
- 3.6 Esercizi

Logica Predicativa

1 Linguaggi predicativi
- 1.1 Alfabeto
- 1.2 Termini e formule
- 1.3 Esercizi

2 Semantica

2.1 Interpretazioni
2.2 Validità e conseguenza
2.3 Esercizi
2.4 Linguaggi con uguaglianza
2.5 Esercizi
3 Calcoli logici
3.1 Alberi di refutazione
3.2 Esercizi
3.3 Forme prenesse e forme normali di Skolem
3.4 Esercizi
3.5 Interpretazioni di Skolem-Herbrand
3.6 Esercizi
3.7 Unificazione
3.8 Esercizi
3.9 Risoluzione con variabili
3.10 Esercizi
3.11 Linguaggi con uguaglianza
3.12 Programmazione logica