Logica Matematica 2001-02
Corso A

Correzione prova 1-12-01

1. Definizione:

$$\bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1$$

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}$$

Dimostrazione di

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \forall i(1 \leq i \leq n \to x \in A_i)$$

per induzione:
Base:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{1} A_i \leftrightarrow x \in A_1 \leftrightarrow \forall i(1 \leq i \leq 1 \to x \in A_i)$$

la prima equivalenza per definizione.
Passo induttivo: ammesso come ipotesi induttiva

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \leftrightarrow \forall i(1 \leq i \leq n \to x \in A_i)$$

supponiamo che

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i,$$

quindi per la definizione che

$$x \in (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}.$$

Per proprietà dell'intersezione:

$$x \in (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \wedge x \in A_{n+1}.$$

Per ipotesi induttiva:

$$\forall i(1 \leq i \leq n \rightarrow x \in A_i) \wedge x \in A_{n+1},$$

quindi

$$\forall i(1 \leq i \leq n+1 \rightarrow x \in A_i),$$

e abbiamo dimostrato

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \rightarrow \forall i(1 \leq i \leq n+1 \rightarrow x \in A_i).$$

Supponiamo ora che

$$\forall i(1 \leq i \leq n+1 \rightarrow x \in A_i),$$

allora

$$\forall i(1 \leq i \leq n \rightarrow x \in A_i) \wedge x \in A_{n+1}.$$

Per ipotesi induttiva:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \wedge x \in A_{n+1}$$

quindi per la definizione ricorsiva

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$$

e abbiamo dimostrato

$$\forall i(1 \leq i \leq n+1 \rightarrow x \in A_i) \rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i,$$

e mettendo insieme le due implicazioni

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \leftrightarrow \forall i(1 \leq i \leq n+1 \rightarrow x \in A_i).$$

2. Quando si passa da un poligono a n lati ad uno con $n+1$ aggiungendo un nuovo vertice a, con due lati che lo uniscono a b e c, da a partono $n-2$ nuove diagonali verso i vertici non adiacenti, e in più il lato precedente bc diventa una diagonale, quindi si aggiungono $n-1$ diagonali.

Il numero d_n delle diagonali di un poligono di n lati è quindi $2+3+\ldots+(n-2)$ vale a dire

$$d_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$$

ovvero

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Ci sono altri modi per arrivarci (ad esempio pensando al numero di rette passanti per n punti generici - esercizio svolto - da cui si devono sottrarre i lati), ma per una dimostrazione induttiva è essenziale che si capisca che nel passaggio da n a $n+1$ il numero delle diagonali aumenta di $n-1$.

Base: $n = 3$, $d_3 = 0$.

Passo induttivo: supponiamo per ipotesi induttiva $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Allora $d_{n+1} = d_n + (n-1) = \frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$, che è la formula stessa per $n+1$.

3. Le due premesse e la conclusione in 3a si formalizzano nel modo seguente

$$\begin{array}{l} \forall a(C(x) \rightarrow B(x)) \\ \exists x(A(x) \wedge N(x)) \\ \exists x(A(x) \wedge \neg C(x)). \end{array}$$

con ovvia corrispondenza dei simboli alle nozioni informali.

Ora sono possibili due commenti: o si sostiene che non essendoci alcuna relazione esplicita tra B e N la conclusione non segue logicamente dalle premesse, ma allora si deve mostrare un controesempio.

Un universo con quattro elementi $\{a, b, c, d\}$ con $A = \{a\}, C = \{a, c\}, B = \{a, b, c\}, N = \{a, d\}$ potrebbe essere sufficiente.

Oppure si considera che $\forall x(B(x) \leftrightarrow \neg N(x))$ sia un fatto logico, e che nella scelta dei predicati per la formalizzazione sia legittimo tradurre la seconda premessa con $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$, e allora che la conclusione sia conseguenza logica delle premesse si può vedere o con la successione

$$
\begin{gathered}
\exists x(A(x) \wedge \neg B(x)) \\
A(a) \wedge \neg B(a) \\
A(a) \\
\neg B(a) \\
C(a) \rightarrow B(a) \\
\neg C(a) \\
A(a) \wedge \neg C(a) \\
\exists x(A(x) \wedge \neg C(x))
\end{gathered}
$$

oppure con i diagrammi di Venn: una crocetta nella parte non tratteggiata di $A \cap \sim B$, non vuota per la seconda premessa, è per forza nella parte non tratteggiata di $A \cap \sim C$, che non è dunque vuota, come infatti afferma la conclusione.

In ogni caso l'altra frase dell'esercizio 3b, che si formalizza $\forall x(A(x) \rightarrow \neg C(x))$ non è conseguenza delle due premesse. L'enunciato è falso nello stesso universo visto sopra, se si ammette che B e N non siano disgiunti; oppure dal diagramma di Venn: per essre vero l'enunciato, dalle due premsse si sarebbe dovuto tratteggiare tutta l'intersezione di A e C, mentre dall'effetto delle due premesse resta una zona non tratteggiata.

4.