Logica Matematica Corso A

Correzione compito B del 1-12-05

1. La formula

$$\forall y > 1(\exists z(y \cdot z = x) \to \exists z(z \cdot 3 = y))$$

afferma che tutti i divisori di x (maggiori di 1) sono divisibili per 3. Questo non significa solo che x è divisibile per 3, ma che x e tutti i suoi fattori sono divisibili per 3, quindi x nella scomposizione in fattori primi è un prodotto di soli 3, o una potenza di 3

$$\{3^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. La risposta è

$$dom(R) \subseteq X \leftrightarrow \forall x(\exists y A(x, y) \to P(x))$$

o $\forall x \in U(\exists y \in U A(x, y) \to P(x))$.

3. La formula $\neg\forall x P(x) \land \exists y Q(y) \to \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$ si trasforma con i seguenti passaggi:

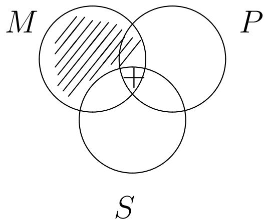
$$\exists x \neg P(x) \land \exists y Q(y) \to \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$$
$$\exists x \neg P(x) \land \exists y Q(y) \to \exists x(P(x) \lor Q(x))$$
$$\exists x \exists y(\neg P(x) \land Q(y)) \to \exists x(P(x) \lor Q(x))$$
$$\forall x \forall y \exists z((\neg P(x) \land Q(y)) \to (P(z) \lor Q(z))).$$

4. Il sillogismo è della forma

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x(M(x) \wedge P(x)) \\ \forall x(M(x) \to S(x))\end{array}}{\exists x(S(x) \wedge P(x))}$$

se con $P(x)$ si indica il predicato "essere senza pudore".

Con i diagrammi di Venn si ha



e si vede una crocetta in $S \cap P$, come richiesto dalla conclusione. Il sillogismo è valido e la conclusione si deduce dalle premesse nel seguente modo

$\exists x(M(x) \wedge P(x))$	*premessa*
$M(c) \wedge P(c)$	*esemplificazione esistenziale*
$M(c)$	*eliminazione congiunzione*
$P(c)$	
$\forall x(M(x) \to S(x))$	*premessa*
$M(c) \to S(c)$	*particolarizzazione*
$S(c)$	*modusponens*
$S(c) \wedge P(c)$	
$\exists x(S(x) \wedge P(x))$	*generalizzazione esistenziale*

5. Per induzione forte:

bisogna dimostrare $\exists h, k(n = 2h + 5k)$ per ogni $n > 3$, supponendo che questo sia vero per ogni $3 < i < n$.

Dato n, si considera $n-2$ e per ipotesi induttiva $n-2=2h+5k$, quindi $n=2(h+1)+5k$, se $n-2>3$ cioè $n>5$. Ma per 4 e 5 si vede direttamente: $4=2\cdot 2$ e $5=5$.

Per induzione semplice:

Base: n = 4 ovvio.

Passo induttivo. Ammesso $n=2h+5k$ si può distinguere.

Se $k\neq 0$ allora $n+1=2h+5k+1=2h+5(k-1)+5+1=2(h+3)+5(k-1)$.

Se $k=0$, allora $n+1=2h+1$ ma n è almeno 4 quindi h almeno 2 e dunque $n+1=2(h-2)+4+1=2(h-2)+5$.