

Logica matematica A 2004-05

Prova del 24 marzo 05

1. Il Re per dare in sposa la sua unica figlia organizza una prova. Ai concorrenti viene detto che dietro due porte A e B si trova o la Principessa o un leone, e che esattamente una delle due frasi scritte sulle porte A e B è vera. Sulla porta A è scritto “Dietro questa porta c’è la Principessa; sulla porta B c’è scritto “Dietro questa porta c’è un leone se dietro A c’è la Principessa, e c’è la Principessa se dietro A c’è un leone. Quale porta apre Aladino?

2. Formalizzare: “Chi ama fa qualunque cosa per il suo amato.

3. Verificare con gli alberi di refutazione se

$$\models (p \rightarrow (p \leftrightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

e se no trovare tutti i controesempi.

4. Trovare FND e FNC della precedente proposizione, e dire quanti e quali sono i suoi modelli.
5. Dimostrare per induzione che $\forall n(n+1 = s(n))$ e che $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è suriettiva.
6. Formalizzare la seguente prova dell’esistenza di Dio: “Nessuno è perfetto, qualche essere è perfetto, quindi qualche essere non è umano e verificare se il sillogismo è valido. Se sì scrivere una deduzione della conclusione dalle premesse, se no trovare un controesempio.
7. Scrivere in forma prenessa $\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall x (\exists y R(y, x) \wedge \exists y R(x, y))$.

Correzione

1. Indichiamo con A e B le frasi scritte sulle porte A e B.

Se A è vera, allora B è falsa; ma “Dietro questa porta c’è la Principessa se dietro A c’è un leone è vera perché l’antecedente del condizionale è falso (se A è vera); quindi deve essere falsa “Dietro questa porta c’è un leone se dietro A c’è la Principessa ma questo non può essere se la Principessa è figlia unica.

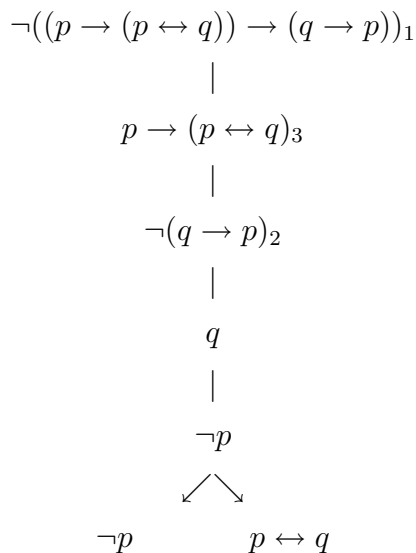
Allora A è falsa e B vera, quindi dietro A c’è un leone e dietro B la Principessa.

2. Per “ama” occorre usare il verbo “amare qualcuno” perché dopo si parla dell’amato. La frase si trasforma in “Se uno ama qualcuno, fa qualunque cosa per l’amato” o “uno, se ama qualcuno, fa qualunque cosa per lui”. Meglio, “uno (qualsiasi), se ama qualcuno, chiunque sia, fa qualunque cosa per lui”

Utilizziamo una relazione binaria A per “amare” e una ternaria $R(x, y, z)$ per “ x fa y per z ”.

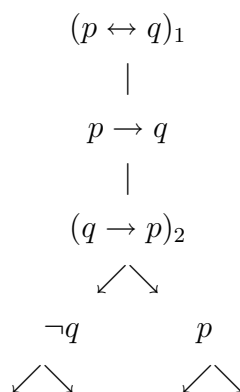
$$\forall x \forall z (A(x, z) \rightarrow \forall y R(x, y, z)).$$

3. Si considera l’albero di refutazione con la negazione nella radice



Il ramo di destra è prevedibile che si chiuda, perché l'ultima proposizione afferma l'equivalenza tra p e q , ma sul ramo ci sono q e $\neg p$.

Se si sviluppa ulteriormente si ha



che infatti se appeso sotto a $p \leftrightarrow q$ si chiude.

Dunque c'è il solo ramo di sinistra non chiuso, sul quale sono i letterali q e $\neg p$, quindi un solo controesempio $i(p) = 0, i(q) = 1$.

4. Dal precedente esercizio si ricava $\neg p \wedge q$ come forma normale disgiuntiva, e anche congiuntiva, della negazione della proposizione; quindi $\neg(\neg p \wedge q)$ dà una forma normale congiuntiva e disgiuntiva $p \vee \neg q$ della proposizione voluta.

I suoi modelli sono tre, quelli che non sono modelli della negazione trovata prima come controesempio: da $\neg p$ viene $i_1(p) = 0, i_1(q) = 1$ e $i_2(p) = 0, i_2(q) = 0$; da q viene $i_3(p) = 1, i_3(q) = 1$ e $i_4(p) = 0, i_4(q) = 1$ ma $i_1 = i_4$ e quindi sono tre.

5. (a) $\forall n(n + 1 = s(n))$

Base: Bisogna dimostrare $0 + 1 = s(0)$; ma $0 + 1 = 1$ per l'equazione $x + 0 = x$ della definizione ricorsiva di somma, e per la commutatività. E 1 è un'abbreviazione per $s(0)$.

Passo induttivo: Bisogna dimostrare $s(n) + 1 = s(s(n))$.

$s(n) + 1 = 1 + s(n) = s(1 + n)$ per la seconda equazione della definizione ricorsiva di somma.

Per ipotesi induttiva $s(1 + n) = s(s(n))$ che è la conclusione a cui si doveva arrivare.

(b) $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è suriettiva

Precisamente bisogna dimostrare $\forall n(n \neq 0 \rightarrow \exists y(s(y) = n))$.

Base: se $n = 0$ l'antecedente del condizionale è falso.

Passo induttivo: Considerato $s(n)$, si prenda come y n stesso e si ha $s(n) = s(y)$.

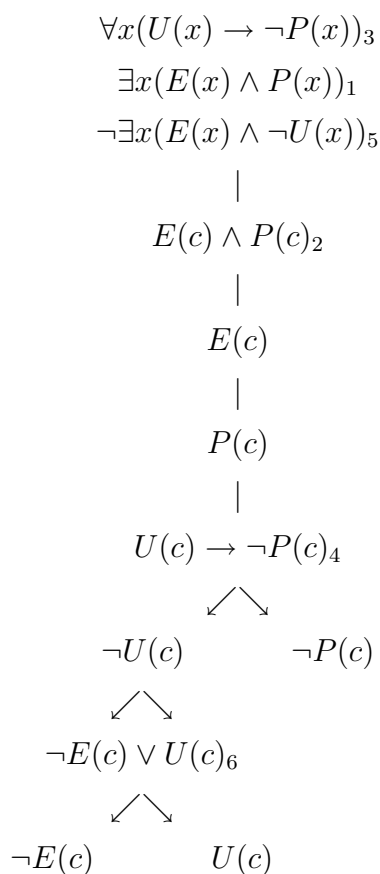
6. Per non avere una contraddizione tra le due premesse, “Nessuno” va inteso come “nessun umano”.

$$\forall x(U(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\underline{\exists x(E(x) \wedge P(x))}$$

$$\exists x(E(x) \wedge \neg U(x))$$

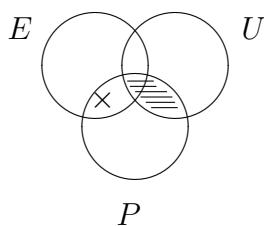
Con gli alberi di refutazione



l'albero si chiude, quindi il sillogismo è valido.

In alternativa, con i diagrammi di Venn.

Dopo aver eseguito il tratteggio in base alla prima premessa



la crocetta per la seconda premessa, in $E \cap P$, deve essere obbligatoriamente messa nell'intersezione di E e $\sim U$, verificando quindi la conclusione.

Deduzione della conclusione dalle premesse:

- | | | |
|----|---|---|
| 1 | $\forall x(U(x) \rightarrow \neg P(x))$ | |
| 2 | $\exists x(E(x) \wedge P(x))$ | |
| 3 | $E(c) \wedge P(c)$ | <i>esemplificazione esistenziale da 2</i> |
| 4 | $U(c) \rightarrow \neg P(c)$ | <i>particolarizzazione da 1</i> |
| 5 | $P(c) \rightarrow \neg U(c)$ | <i>contrapposizione da 4</i> |
| 6 | $P(c)$ | <i>da 3</i> |
| 7 | $\neg U(c)$ | <i>da 6 e 5</i> |
| 8 | $E(c)$ | <i>da 3</i> |
| 9 | $E(c) \wedge \neg U(c)$ | <i>da 7 e 8</i> |
| 10 | $\exists x(E(x) \wedge \neg U(x))$ | <i>generalizzazione esistenziale da 9</i> |

7.

$$\begin{aligned} \exists x \forall y R(x, y) &\rightarrow \forall x (\exists y R(y, x) \wedge \exists y R(x, y)) \\ \exists x \forall y R(x, y) &\rightarrow \forall x (\exists y R(y, x) \wedge \exists z R(x, z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exists x \forall y R(x, y) &\rightarrow \forall x \exists y \exists z (R(y, x) \wedge R(x, z)) \\ \exists x \forall y R(x, y) &\rightarrow \forall u \exists v \exists z (R(v, u) \wedge R(u, z)) \\ \forall x \exists y \forall u \exists v \exists z (R(x, y) &\rightarrow (R(v, u) \wedge R(u, z))).\end{aligned}$$