

Corso A compito b / 28-10-02

1. Decidere se le seguenti parole sono proposizioni, se no dire perché, in caso affermativo costruire l'albero sintattico e scriverle eliminando tutte le parentesi possibili:

$$\begin{aligned} & (((p) \wedge (q)) \vee (\neg(\neg(p)))) \rightarrow ((p) \vee (q)) \\ & (((p) \wedge (q)) \vee (\neg(p)) \rightarrow (p)). \end{aligned}$$

2. Definire $\neg p$ e $p \vee q$ usando solo il connettivo $p \mid q$ (“né ... né”).
3. Dimostrare con le leggi Booleane che:

$$X \cup Y = Y \text{ se e solo se } (\sim X) \cup Y = U.$$

4. Verificare con gli alberi di refutazione se

$$(\neg q \vee q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$$

è una tautologia, e se no indicare un controesempio.

5. Scrivere con due procedimenti (ma non passando attraverso le tavole di verità) una forma normale disgiuntiva di

$$q \wedge (p \vee q \rightarrow \neg p)$$

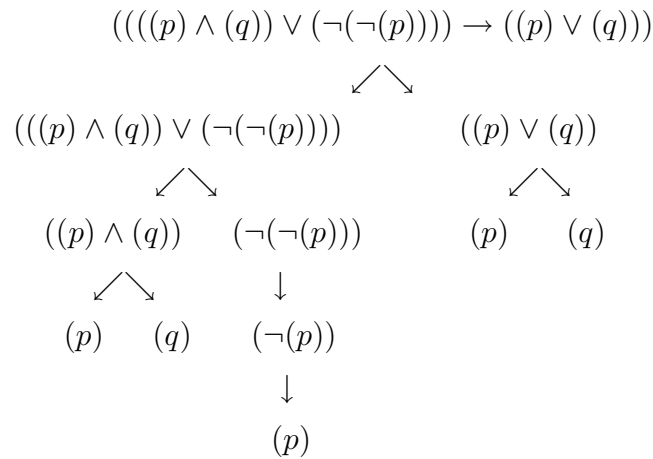
e indicarne i modelli.

6. Trovare una forma normale congiuntiva di

$$((p \vee q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q.$$

Correzione

1. Per la prima, l'albero sintattico



dimostra che è una proposizione, che con l'eliminazione delle parentesi si può scrivere

$$p \wedge q \vee \neg \neg p \rightarrow p \vee q.$$

La seconda non è una proposizione, in quanto il numero di parentesi sinistre è maggiore di quello delle parentesi destre.

2. a. $\neg p \equiv p \mid p$
 b. Dopo aver notato che $\neg(p \vee q) \equiv p \mid q$,
 $p \vee q \equiv \neg(p \mid q) \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$.
3. a. La seguente è una derivazione di $(\sim X) \cup Y = U$ da $X \cup Y = Y$:

$$\begin{aligned}
 U &= U \cup Y \\
 &= (X \cup \sim X) \cup Y \\
 &= X \cup Y \cup \sim X \\
 &= Y \cup \sim X.
 \end{aligned}$$

b. La seguente è una derivazione di $X \cup Y = Y$ da $(\sim X) \cup Y = U$:

$$\begin{aligned}
 Y &= Y \cup \emptyset \\
 &= Y \cup (X \cap \sim X) \\
 &= (Y \cup X) \cap (Y \cup \sim X) \\
 &= (X \cup Y) \cap U \\
 &= (X \cup Y).
 \end{aligned}$$

4. L'albero

$$\begin{array}{c}
 \neg((\neg q \vee q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))_1 \\
 \downarrow \\
 \neg q \vee q \rightarrow p_4 \\
 \downarrow \\
 \neg(p \rightarrow \neg q)_2 \\
 \downarrow \\
 p \\
 \downarrow \\
 \neg\neg q_3 \\
 \downarrow \\
 q \\
 \swarrow \searrow \\
 \neg(\neg q \vee q)_5 \quad p \\
 \downarrow \\
 q \\
 \downarrow \\
 \neg q
 \end{array}$$

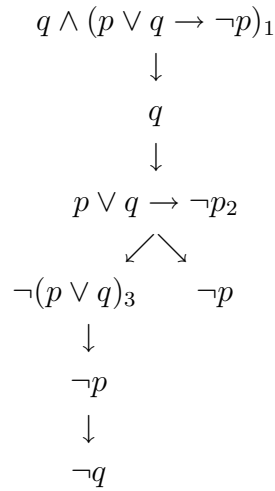
non si chiude, quindi $(\neg q \vee q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ non è una tautologia, e il ramo di destra non chiuso fornisce il controesempio $i(p) = i(q) = 1$.

5. a.

$$\begin{aligned}
 q \wedge (p \vee q \rightarrow \neg p) &\equiv q \wedge (\neg(p \vee q) \vee \neg p) \\
 &\equiv q \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p) \\
 &\equiv (q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\
 &\equiv q \wedge \neg p
 \end{aligned}$$

forma normale disgiuntiva, e anche congiuntiva, che ha un solo modello $i(p) = 0, i(q) = 1$.

b. Dall'albero



si ricava per il ramo di destra non chiuso la forma normale disgiuntiva $q \wedge \neg p$, che coincide con quella di sopra.

6.

$$\begin{aligned}
 ((p \vee q) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q &\equiv ((p \vee q) \wedge p) \vee \neg q \\
 &\equiv p \vee \neg q,
 \end{aligned}$$

forma normale congiuntiva e disgiuntiva.