Logica Matematica Corso A
compito b / 2-12-02

1. L'enunciato

$$\forall x P(x) \vee \exists x(P(x) \to A \wedge \neg A)$$

   dove A è un enunciato, è logicamente vero o no? Perché?

2. Si consideri l'argomento

   Nessun triangolo rettangolo è equilatero
   Qualche triangolo isoscele è equilatero

   Quindi qualche triangolo isocele non è rettangolo.

   È corretto? Si scriva il sillogismo formale corrispondente e se ne discuta la validità sia con i diagrammi di Venn, sia con gli alberi di refutazione sia, se è valido, deducendo la conclusione dalle premesse.

3. Si definisca ricorsivamente $x \leq y$ in $\mathbb{N}$ e si dimostri che

$$x \leq y \leftrightarrow \exists z(x + z = y).$$

Segue correzione.

Correzione

1. $P(x) \to A \wedge \neg A$ è equivalente a $\neg P(x)$, per cui l'enunciato proposto è equivalente a

$$\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x),$$

quindi equivalente a un enunciato della forma $B \vee \neg B$, ed è logicamente vero.

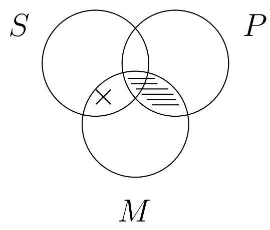
2. Il sillogismo è

$$\begin{array}{lll} E: & P & M \\ I: & S & M \\ \hline O: & S & P \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to \neg M(x)) \\ \exists x(S(x) \wedge M(x)) \\ \hline \exists x(S(x) \wedge \neg P(x)). \end{array}$$

Il diagramma di Venn



dimostra che è valido.

Lo stesso dimostra l'albero di refutazione

$$\forall x(P(x) \to \neg M(x))$$

$$
\begin{array}{c}
\exists x(S(x) \wedge M(x)) \\
\neg\exists x(S(x) \wedge \neg P(x)) \\
S(c) \wedge M(c) \\
P(c) \to \neg M(c) \\
\neg(S(c) \wedge \neg P(c) \\
S(c) \\
M(c)
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & M(c) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \neg P(c) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \neg M(c) \\
\neg S(c) & & P(c) &
\end{tikzcd}
$$

che è chiuso.

Infine la seguente è una deduzione della conclusione dalle premesse:

$$
\begin{array}{c}
\forall x(P(x) \to \neg M(x)) \\
\exists x(S(x) \wedge M(x)) \\
S(c) \wedge M(c) \\
S(c) \\
M(c) \\
P(c) \to \neg M(c) \\
M(c) \to \neg P(c) \\
\neg P(c) \\
S(c) \wedge \neg P(c) \\
\exists x(S(x) \wedge \neg P(x)).
\end{array}
$$

3. Definizione ricorsiva di $\leq$:

$$
\begin{array}{lcl}
x \leq 0 & \leftrightarrow & x = 0 \\
x \leq y' & \leftrightarrow & x \leq y \vee x = y'.
\end{array}
$$

Dimostrazione per induzione su y che $x \leq y \to \exists z(x + z = y)$.

Base. $x \leq 0 \leftrightarrow x = 0 \to x + 0 = 0 \to \exists z(x + z = 0)$.

Passo induttivo. Se $x \leq y'$, distinzione di casi: $x \leq y \vee x = y'$.

Se $x \leq y$, per ipotesi induttiva $\exists z(x+z = y)$, quindi $x+c = y$, $x+c' = y'$, $\exists z(x + z = y')$.

Se $x = y'$, $x + 0 = y'$, $\exists z(x + z = y')$.

Viceversa, dimostrazione di $\exists z(x+z=y) \to x \leq y$, sempre per induzione su y.

Base. Se $\exists z(x+z=0)$, deve essere $x=z=0$.

Passo induttivo. Se $\exists z(x+z=y')$, $x+c=y'$, ci sono due possibilità, a seconda che $c=0$ o $c \neq 0$.

Se $c=0$, $x=y'$ e quindi $x \leq y'$.

Se $c \neq 0$, allora $c=d'$; se $x+d'=y'$ allora $(x+d)'=y'$ da cui $x+d=y$, cioè $\exists z(x+z=y)$ e per ipotesi induttiva $x \leq y$, quindi $x \leq y'$.