

**Corso di Laurea in Matematica**  
**Calcolo delle Probabilità - I modulo**  
**a.a. 1999-2000 (Prof. A. Negro)**  
**Soluzioni della prova scritta del 25 settembre 2000**

**Esercizio 1.** La variabile aleatoria  $X$  ha distribuzione ipergeometrica con parametri opportuni. In dettaglio, usando la convenzione  $\binom{x}{y} = 0$  per  $x < y$ , si ha

$$P(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \binom{n}{z-k}}{\binom{b+n}{z}} \quad (k \in \{0, 1, \dots, z\})$$

dove:  $b = 2$  è il numero di palline bianche,  $n = 3$  è il numero di palline nere,  $z = 3$  è il numero di palline estratte a caso una alla volta senza reinserimento. Allora:

$$P(X = 0) = \frac{1}{10}; \quad P(X = 1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad P(X = 2) = \frac{3}{10}; \quad P(X = 3) = 0;$$

del resto il fatto che sia impossibile estrarre 3 palline bianche è ovvio. Inoltre

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^3 kP(X = k) = 0 * \frac{1}{10} + 1 * \frac{6}{10} + 2 * \frac{3}{10} + 3 * 0 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5};$$

del resto, dalla teoria sulla distribuzione ipergeometrica, in questo caso si deve avere

$$\mathbb{E}[X] = z * \frac{b}{b+n} = 3 * \frac{2}{2+3} = \frac{6}{5}.$$

Infine

$$P(X = 2 | X \geq 1) = \frac{P(X = 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 2)}{1 - P(X = 0)} = \frac{1}{3}.$$

**Esercizio 2.** In generale, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  si ha

$$P(Y = k) = P(X \in [k, k + 1]).$$

Quindi abbiamo la seguente situazione:

$$P(Y = 0) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}; \quad P(Y = 1) = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}; \quad P(Y = 2) = \int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{4};$$

quindi  $\{0, 1, 2\}$  sono gli unici valori interi con probabilità positiva perché la somma delle corrispondenti probabilità è uguale a 1. Dunque si ha

$$\mathbb{E}[Y] = 0 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} = 1.$$

Allora, dalla teoria sulla distribuzione binomiale (se i parametri sono  $n$  e  $p$  i valori con probabilità positiva sono  $0, 1, \dots, n$  e la media è uguale a  $np$ ), possiamo dire quanto segue: se  $Y$  ha distribuzione binomiale, i parametri sono necessariamente  $n = 2$  e  $p = \frac{1}{2}$ . Del resto questi valori di  $n$  e  $p$  realizzano le uguaglianze

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n\})$$

perché si ha

$$\frac{1}{4} = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-0}, \quad \frac{1}{2} = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2};$$

questo completa la soluzione dell'esercizio.

**Esercizio 3.** Prima di tutto osserviamo che  $X$  e  $Y$  hanno la stessa media perché hanno la stessa distribuzione (si può verificare che  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}$ ) e quindi, per la linearità della media, si ha

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 0;$$

si osservi che per questa affermazione l'ipotesi di indipendenza tra  $X$  e  $Y$  non ha nessuna influenza.

Ora bisogna calcolare  $P(Z \leq z)$  al variare di  $z \in \mathbb{R}$ . In questo senso bisogna considerare i semipiani individuati dalla disuguaglianza  $x - y \leq z$ , cioè i semipiani "sopra" la retta di equazione

$$x - y = z \tag{1}$$

e integrare la densità congiunta su questo semipiano. Osserviamo che la densità congiunta è positiva solo nel quadrato  $Q$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, 0)$ : anzi la densità è uguale ad 1 su  $Q$ .

Quindi, per calcolare  $P(Z \leq z)$ , è utile fare riferimento alle aree delle parti del quadrato  $Q$  sopra la retta (1).

Abbiamo due casi banali:

$$z < -1 \Rightarrow P(Z \leq z) = 0$$

perché il quadrato  $Q$  è sotto la retta (1);

$$z > 1 \Rightarrow P(Z \leq z) = 1$$

perché il quadrato  $Q$  è sopra la retta (1).

Poi

$$-1 \leq z \leq 0 \Rightarrow P(Z \leq z) = \frac{(1+z)^2}{2}$$

perché  $\frac{(1+z)^2}{2}$  è l'area del triangolo di vertici  $(0, 1)$ ,  $(1+z, 1)$  e  $(0, -z)$  che sta sopra la retta (1);

$$0 < z \leq 1 \Rightarrow P(Z \leq z) = 1 - \frac{(1-z)^2}{2}$$

perché l'area del quadrato  $Q$  è uguale a 1 e  $\frac{(1-z)^2}{2}$  è l'area del triangolo di vertici  $(z, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1-z)$  che sta sotto la retta (1).

In conclusione, derivando  $P(Z \leq z)$  rispetto a  $z$  (quando tale derivata esiste), otteniamo la densità di  $Z$  che è

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & (|z| > 1) \\ 1+z & (-1 < z < 0) \\ 1-z & (0 < z < 1) \end{cases} .$$

Possiamo osservare che recuperiamo il valore di  $\mathbb{E}[Z]$  calcolato prima:

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{\mathbb{R}} z f_Z(z) dz = \int_{-1}^0 z(1+z) dz + \int_0^1 z(1-z) dz = \dots = 0.$$