Funzioni tra insiemi finiti
Numeri di Stirling e Bell

Davide Penazzi

1 Contare il numero delle funzioni tra insiemi

1.1 Definizioni e concetti preliminari

Definizione 1.1. Un insieme **finito** A ha cardinalità n, indicata con $|A| = n$, se è in bijezione con l'insieme $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Posso così enumerare gli elementi di A: se tale bijezione manda $a \in A$ in $i \in n$, chiamerò tale elemento a_i.

Indico l'insieme delle funzioni da un insieme A in B con ${}^A B$
Voglio contare quante sono le possibili funzioni tra insiemi finiti, cioè voglio calcolare $|{}^A B|$:

Proprietá 1.1. *Se $|A| = n$ e $|B| = m$, allora ${}^A B$ ha cardinalità m^n*

Dimostrazione: Poichè ogni funzione associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B posso identificare $f \in {}^A B$ con una stringa

$$< f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{n-1}) > \quad \in \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n \text{ volte}}$$

Posso scegliere m possibili elementi per $f(a_i), \forall i \in n$, perciò posso costruire in totale $m * m * \cdots * m = m^n$ stringhe diverse e quindi m^n funzioni $f : A \longrightarrow B$ $\square$

Una immediata conseguenza della Proprietà 1.1 è la cardinalità dell'insieme delle parti:

Corollario 1.2. *Dato un insieme A di cardinalità n, l'**insieme delle parti** (o **insieme potenza**) $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$ ha cardinalità $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$*

Dimostrazione: Per ogni sottoinsieme $Y \subseteq A$ definisco la funzione, detta **funzione caratteristica**, $\Phi_Y : A \longrightarrow 2$, (con $2 = \{0, 1\}$), tale che:

$$\Phi_Y = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in Y \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Essa identifica univocamente un sottoinsieme di A, perciò il numero dei sottoinsiemi di A è pari al numero delle funzioni da n in 2, cioé, per la proprietà precedente, 2^n. $\square$

Esempio. Dato un insieme finito $\mathcal{A}$ detto **alfabeto**, posso definire le **parole** su di esso, cioè le stringhe di lunghezza finita $< a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} >$, come funzioni $f : n \longrightarrow \mathcal{A}$.
Se come alfabeto consideriamo quello inglese, con le 26 lettere $\{a, b, \ldots, y, z\}$, le possibili parole (non necessariamente di senso compiuto) di lunghezza n su questo alfabeto sono $|^n 26| = 26^n$

1.2 Funzioni iniettive e bijettive

Voglio ora contare il numero di funzioni con particolari proprietá:

Teorema 1.3. *Il numero di funzioni bijettive tra A e B, di uguale cardinalitá n, é $n!$*

Dimostrazione: Come nella proprietá 1.1, identifico una generica funzione bijettiva con una stringa di n elementi: $< b_0, \ldots, b_{n-1} >$, con la restrizione che $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Nella scelta di una tale funzione, ad a_0 posso associare n elementi, a a_1 posso associarne solo $n-1$ in quanto non posso prendere lo stesso elemento che é immagine di a_0, ad a_2 ne posso associare $n-2$ e cosí via. In totale ho $n * (n-1) * (n-2) * \cdots * 2 * 1 = n!$ bijezioni. □

Definizione 1.2. Una funzione bijettiva di un insieme in sè è detta **permutazione**

Teorema 1.4. *Il numero delle funzioni iniettive tra A e B, di cardinalità n ed m, $n < m$, è $D_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$*

Dimostrazione: Anche qui una funzione iniettiva è una stringa $< b_0, \ldots, b_{n-1} >$ $, b_i \in B$, con la restrizione che $b_i \neq b_j$, se $i \neq j$, posso perciò scegliere m elementi per b_0, $m-1$ per b_1, $\ldots$, $m-n+1$ per b_{n-1}, in totale $m * (m-1) * \cdots * (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$ scelte. □

Esempio. Posso ora contare le parole di lunghezza n nell'alfabeto inglese in cui ogni lettera compare al più una volta (ovviamente dovrò avere $n \leq 26$): ho infatti $D_{26,n} = \frac{26!}{(26-n)!}$. Un caso particolare è quello delle parole di lunghezza 26: ne ho $D_{26,26} = \frac{26!}{(26-26)!} = 26!$ sono infatti le permutazioni delle 26 lettere.

Esempio. In un torneo ad n squadre, in cui ognuna gioca 2 partite (andata e ritorno) con tutte le altre, quante partite si disputano in totale? Posso considerare una partita come una funzione iniettiva $f : 2 \longrightarrow n$ che associa lo 0 alla squadra che gioca in casa e l'1 a quella che gioca in trasferta (considero così come funzioni diverse le partite $< i, j >$, in cui i è la squadra di casa e j è l'ospite, e $< j, i >$ in cui i ruoli sono invertiti), l'iniettività impedisce che una squadra si scontri con se stessa, cioè il caso $< i, i >$; ho allora che le partite sono in totale $D_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!} = n * (n-1)$

1.3 Funzioni Suriettive e Partizioni

Voglio ora trovare una formula che mi permetta di contare le possibili funzioni suriettive da un insieme all'altro, ma per fare ciò ho prima bisogno di alcune proprietà: mi serve saper contare i sottoinsiemi di cardinalità k (**k-sottoinsiemi**) di un insieme:

Proprietá 1.5. *Il numero dei k-sottoinsiemi di un insieme S di cardinalità n è* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dimostrazione: Per dimostarlo considero le funzioni iniettive $k \rightarrow S$, le immagini di tali funzioni sono i k-sottoinsiemi Y di S. Ma vi sono $k!$ funzioni iniettive per ogni k-sottoinsieme Y: infatti ogni permutazione degli elementi dell'immagine individua una diversa funzione iniettiva $k \rightarrow S$ con immagine lo stesso Y, devo perciò dividere il numero di funzioni iniettive per $k!$. I k-sottoinsiemi sono allora $\frac{D(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ □

Una formula che risulterà molto utile è la seguente:

Proprietá 1.6 (Formula del Binomio di Newton).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione: Considero lo sviluppo di $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$ e conto quante volte compare il termine $a^{n-k}b^k$: ciò equivale ai modi di scegliere k volte il termine b (e quindi $n-k$ volte il termine a) negli n fattori $(a+b)$ (ogni fattore contribuisce infatti fornendo un a oppure un b), cioè è il numero dei k-sottoisiemi di n: $\binom{n}{k}$. Da ciò ho la tesi. □

Osservo che, dati due insiemi A e B, disgiunti (cioè $A \cap B = \emptyset$), la cardinalità dell'unione è: $|A \cup B| = |A| + |B|$; ma cosa succede se gli insiemi non sono disgiunti?

Proprietá 1.7 (**Principio di Inclusione-Esclusione**).
La cardinalità dell'unione finita di insiemi è: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$

Dimostrazione: Mostro che un generico elemento $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ è contato esattamente una volta nel secondo termine dell'equazione. Suppongo che x appartenga ad h insiemi A_i: posso, senza perdere generalità, supporre che $x \in A_1 \ldots x \in A_h$ e $x \notin A_{h+1} \ldots x \notin A_n$.

Nella somma $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ x è contato h volte; nella somma $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ x è contato tante volte quante sono le coppie (i, j) con $1 \leq i < j \leq h$, cioè quanto i 2-sottoinsiemi di h quindi $\binom{h}{2}$; analogamente in $\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ è contata $\binom{h}{3}$ e così via...

Alla fine sarà perciò contato

$$h - \binom{h}{2} + \binom{h}{3} + \cdots + (-1)^{h-1} \binom{h}{h}$$

volte, se mostro che questo numero è uguale ad 1, cioè

$$1 - h + \binom{h}{2} - \binom{h}{3} + \cdots + (-1)^h \binom{h}{h} = 0$$

ho la tesi. Ma ciò è vero perchè quello è, per la formula di Newton, lo sviluppo del binomio $(1 - 1)^n = 0$.

$\square$

Posso ora contare le funzioni suriettive:

Teorema 1.8. *Il numero di funzioni suriettive da un insieme A, di cardinalità n a B di cardinalità m,$m < n$, è dato dalla formula:*

$$E(n, m) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m - i)^n$$

Dimostrazione: Enumero gli elementi di $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, e per ogni $i = 1, \ldots, m$ costruisco l'insieme delle funzioni che nell'immagine non hanno l'i-esimo elemento di B: $X_i = \{f : A \to B | b_i \notin Im(f)\}$ Se una funzione appartiene ad uno di questi insiemi non potrà perciò essere suriettiva: per contare quante sono dovrò quindi sottrarre al numero totale delle funzioni $\in {}^A B$ quelle che appartengono all'unione degli X_i:

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_m|$$

Per il principio di Inclusione-Esclusione: $k^n - |X_1 \cup \cdots \cup X_m| = m^n - \sum_{i=1}^m |X_i| + \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| - \cdots + (-1)^{m-1}|X_1 \cap \cdots \cap X_{m-1}|$
Devo ora contare le funzioni negli insiemi X_i e nelle intersezioni di questi: le funzioni in X_i sono tutte le funzioni da A in $B \setminus \{b_i\}$, cioè $|X_i| = (m-1)^n$. Quelle in $X_i \cap X_j$ sono tutte quelle che vanno da A in $B \setminus \{b_i, b_j\}$, cioè $|X_i \cap X_j| = (m-2)^n$, e così via, perciò

$$E(n,m) = m^n - \sum_{i=1}^{m}(m-1)^n + \sum_{i<j}(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1}1^n$$

osservando che $\sum_{i_1 < \cdots < i_h} t = \binom{t}{h}$, ho:

$$E(n,m) = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}1^n$$

da cui la tesi. □

Esempio. Posso contare quante sono le funzioni suriettive di 6 in 3: sono $E(6,3) = 3^6 - \binom{3}{1}2^6 + \binom{3}{1}1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$

Posso ora contare le partizioni di un insieme:

Teorema 1.9. *Il numero delle partizioni di un insieme A di cardinalità n in m parti è dato da:*

$$S(n,m) = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{(m-i)^n}{m!} = \frac{E(n,m)}{m!}$$

Dimostrazione: Ogni funzione suriettiva $f : n \to m$ induce una partizione sugli elementi dell'insieme $A = \{A_i | i \in n\}$, con $A_i = \{a \in A | f(a) = i\}$. Ma, data una partizione di A in n parti, vi sono $k!$ funzioni suriettive $f : n \to m$ che la inducono nel modo descritto, perciò $S(n,m) = \frac{E(n,m)}{m!}$ □

Esempio. Le partizioni di un insieme di 6 elementi in 3 parti sono $S(6,3) = \frac{E(6,3)}{3!} = \frac{540}{6} = 90$

Corollario 1.10. *Il numero totale delle partizioni di un insieme di cardinalità n è $\sum_{i=1}^{n} S(n,i)$*

Dimostrazione: Ovvio: il numero totale delle partizioni di un insieme è il numero delle partizioni in m parti, per ogni $m \leq n$ $\square$

Esempio. In quanti modi posso suddividere in parti 6 elementi? La risposta è $\sum_{i-1}^{6} S(6,i) =$

$$= 1 + \frac{(-1)^0\binom{2}{0}(2-0)^6+(-1)^1\binom{2}{1}(2-1)^6}{2!} + \frac{(-1)^0\binom{3}{0}(3-0)^6+(-1)^1\binom{3}{1}(3-1)^6+(-1)^2\binom{3}{2}(3-2)^6}{3!} +$$

$$+ \frac{(-1)^0\binom{4}{0}(4-0)^6+(-1)^1\binom{4}{1}(4-1)^6+(-1)^2\binom{4}{2}(4-2)^6+(-1)^3\binom{4}{3}(4-3)^6}{4!} +$$

$$+ \frac{(-1)^0\binom{5}{0}(5-0)^6+(-1)^1\binom{5}{1}(5-1)^6+(-1)^2\binom{5}{2}(5-2)^6+(-1)^3\binom{5}{3}(5-3)^6+(-1)^3\binom{5}{4}(5-4)^6}{5!} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{62}{2} + \frac{540}{6} + \frac{1560}{24} + \frac{1800}{120} + 1 = 203$$

2 Numeri di Stirling e di Bell

Posso contare il numero delle partizioni e delle funzioni suriettive anche in un altro modo, utilizzando una definizione ricorsiva:

Definizione 2.1. I **Numeri di Stirling** sono i numeri definiti ricorsivamente dall formula:

$$\begin{cases} S(n,1) = 1 \\ S(n,n) = 1 \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \quad \text{se } \ 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Tali numeri sono spesso rappresentati mediante il seguente triangolo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & & \\
 & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 & \\
1 & & 63 & & 301 & & 350 & & 140 & & 21 & & 1
\end{array}$$

in cui ogni valore è calcolato secondo la formula a partire dai due immediatamente sopra.
Ad esempio: $S(6,4) = S(5,3) + 4 * S(5,4) = 15 + 4 * 25 = 90$

Teorema 2.1. *Il numero delle partizioni di un insieme X di cardinalità n in m parti è il numero di Stirling $S(n,m)$*

Dimostrazione: Lo dimostro per induzione su n ed m:
• C'è solo una partizione di X in una sola parte: X stessa, perciò $S(n,1) = 1$.
• C'è una sola partizione di X in n parti: quella nei singoletti $\{x\}$ $(x \in X)$, perciò $S(n,n) = 1$.
• Per gli altri casi considero un elemento $z \in X$ fissato, ho due possibilità:

I) la partizione ha il singoletto $\{z\}$ considero allora il resto della partizione togliendo $\{x\}$, cioè $X \setminus \{x\}$, esso è un insieme di cardinalità $n-1$ che viene diviso in $m-1$ parti, per l'ipotesi induttiva ne ho $S(n-1,m-1)$.

II) nella partizione z appartiene ad un sottoinsieme con più elementi. Siano allora $X_1, \dots X_m$ le parti, sia i l'indice per cui $z \in X_i$, se considero le partizioni dell'insieme $X \setminus \{z\}$, di cardinalità $n-1$, nelle $X_1, \dots X_{i-1}, X_i \setminus$

$\{z\}, X_{i+1}, \ldots, X_m$, per l'ipotesi induttiva ne ho $S(n-1, m)$ (osservo che reintroducendo l'elemento z in X_i riottengo la partizione originaria). Ma ho m possibili scelte dell'indice dela parte in cui si trova z, perciò in totale ho $k * S(n-1, m)$ partizioni del secondo tipo.
Le partizioni totali sono perciò $S(n, m) = S(n-1, m-1) + kS(n-1, k)$ cioè il numero di Stirling. $\square$

Il numero totale delle partizioni di un insieme di cardinalità n è perciò

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n, i)$$

Tali numeri sono detti **Numeri di Bell**. Si osservi che $B(n)$ si ottiene sommando i termini della riga n-esima del triangolo di Pascal.
Ad esempio il numero delle partizioni di un insieme di cardinalità 6 è $1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203$

Posso allora dare una definizione ricorsiva anche per i numeri di Bell:

Teorema 2.2. *I numeri di Bell sono definiti ricorsivamente dalla formula* $B(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} B(n-i)$

Dimostrazione: Dato l'insieme n e una sua partizione P, l'elemento $a \in n$ appartiene ad un solo elemento $A \in P$. Ogni partizione di n è perciò determinata univocamente dal sottoinsieme $A \in P$ che contiene a e da una partizione di di $n \setminus A$. Poichè $1 \leq |A| \leq n$ (non posso infatti prendere $A = \emptyset$) posso scegliere A in $\binom{n-1}{i-1}$ modi, cioè tanti quanti sono i sottoinsiemi di n con almeno un elemento. Il numero delle partizioni di $n \setminus A$, di cardinalità $n - i$ è dato dal numero di Bell $B(n-i)$. Ho quindi $\binom{n-1}{i-1} B(n-i)$ partizioni di n in cui a appartiene ad un sottoinsieme A di cardinalità i; in totale le partizioni distinte di n sono allora

$$B(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} B(n-i)$$

$\square$

References

[1] "Elementi di matematica discreta", Daniela Romagnoli, Quaderni didattici del Dipartimnto di Matematica, 2004

[2] "Funzioni e Combinatoria", Federico G. Lastaria, Quaderni del Politecnico di Milano.

[3] "Matematica Discreta", Giuseppe Lancia, Quaderni del dipartimento di Matematica ed Informatica, Università di Udine.

[4] "Discrete Mathematics", Clarendon presse, Oxford 1895.