Prova di Logica Matematica
Corso di Logica e Matematica Discreta A e B
Esame del 25/2/2010

Versione 1

Cognome: **Nome:**

Matricola: **Firma:**

Avvertenza

- **Questo esame è per gli studenti di Logica e Matematica Discreta di quest'anno e non per gli studenti degli anni precedenti!**
- L'esame deve essere svolto su *questi* fogli.
- Spiegate quello che state facendo! **Risposte non ben giustificate, anche se corrette, non verranno considerate**.

1	2	3	4	T

Esercizio 1 (9pt) Dimostrare che

$$\forall x\,(P(x) \vee \neg Q(x)) \not\models \exists x P(x) \to \forall x Q(x).$$

[Suggerimento: considerare un modello in cui l'interpretazione di Q sia non-vuota e contenuta nell'interpretazione di P, e che quest'ultima non sia il dominio.]

Soluzione: Fissiamo un modello $\mathcal{M}$ in cui $\emptyset \neq Q^{\mathcal{M}} \subseteq P^{\mathcal{M}} \neq M$, dove M è l'universo di $\mathcal{M}$. Per esempio, possiamo prendere come modello l'insieme $\mathbb{N}$, $P^{\mathcal{M}} = Q^{\mathcal{M}}$ è l'insieme dei pari. Chiaramente $\mathcal{M} \models \forall x\,(P(x) \vee \neg Q(x))$ e $\mathcal{M} \models \exists x Q(x)$. Tuttavia $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x)$, dato che $P^{\mathcal{M}} \neq M$.

Esercizio 2 (7pt) Dimostrare utilizzando il calcolo dei sequenti che

$$\neg(A \wedge \neg B) \vdash \neg B \to \neg A$$

Soluzione:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash B, A \qquad \cfrac{A, B \vdash B}{A \vdash B, \neg B}\,(\neg r)}{A \vdash B, A \wedge \neg B}\,(\wedge r)}{\neg(A \wedge \neg B), A \vdash B}\,(\neg l)}{\neg(A \wedge \neg B), \neg B, A \vdash}\,(\neg l)}{\cfrac{\neg(A \wedge \neg B), \neg B \vdash \neg A}{\neg(A \wedge \neg B) \vdash \neg B \to \neg A}\,(\to r)}\,(\neg r)
$$

Esercizio 4 (7pt) Usare il metodo della risoluzione per verificare che il seguente insieme di formule è insoddisfacibile

$$\{\neg p \vee r, p \vee s \to \neg r, \neg r \vee \neg s \to p\}$$

[Attenzione: ricondursi ad un insieme di clausole!]

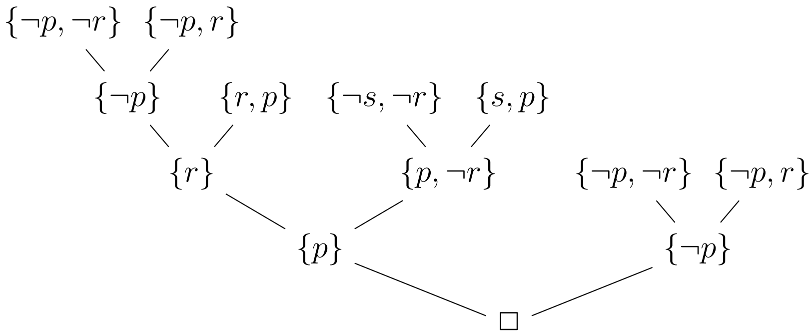
Soluzione: $p \vee s \to \neg r$ è equivalente alla congiunzione di $\neg p \vee \neg r$ e $\neg s \vee \neg r$, mentre $\neg r \vee \neg s \to p$ è equivalente alla congiunzione di $r \vee p$ e $s \vee p$. Quindi l'insieme di formule è equivalente all'insieme di clausole

$$\{\neg p \vee r, \neg p \vee \neg r, \neg s \vee \neg r, r \vee p, s \vee p\}$$

ovvero, scritto in forma insiemistica,

$$\{\{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg s, \neg r\}, \{r, p\}, \{s, p\}\}.$$

Applicando l'algoritmo della risoluzione otteniamo



quindi l'insieme dato è insoddisfacibile.

Esercizio 4 (9pt) Formalizzare la seguente frase

> preso un numero e il suo successore, tra il loro quadrati c'è sempre un numero primo

usando i simboli $<$, $+$, $\cdot$, 1, $=$ e il predicato unario P per "essere un numero primo".

Soluzione:

$$\forall x \exists y \, (P(y) \wedge x \cdot x < y \wedge y < (x+1) \cdot (x+1))$$