

Logica Matematica A e B 2008-09
Esame ed Esonero del 27/03/2009

Versione 1

Cognome:

Nome:

Matricola:

Firma:

Apporre una croce su una ed una sola casella:

Esonero

Esame

Avvertenza

- L'esame deve essere svolto su *questi* fogli.
- Oltre al presente esame, consegnare anche la brutta e il formulario.
- L'**Esame completo** dura **3 ore** mentre l'esonero dura **2 ore**. **Dopo lo scadere delle prime due ore, accetteremo solo esami completi.**
- Se non intendete consegnare scrivete su questa pagina **RITIRATO**.
- L'**Esame completo** riguarda tutti i problemi, da **1 a 9**, mentre l'**Esonero** verte solo sui problemi da **1 a 6**. I problemi da 1 a 6 hanno due tipi di punteggi: il primo riguarda l'**Esame completo** il secondo riguarda l'**Esonero**. In entrambi i casi il voto massimo è 33 punti.
- Spiegate quello che state facendo! **Risposte non ben giustificate, anche se corrette, non verranno considerate.**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T
Esame										

	1	2	3	4	5	6	T
Esonero							

Esercizio 1(4pt/6pt) Trovare l'insieme di verità in \mathbb{R} delle seguenti formule:

(a) $\exists y (y^2 - 2 = x)$

(b) $(x^2 > 1) \wedge (\forall y (y^2 - 2 \neq x) \rightarrow x < 3)$.

Soluzione

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$

(b) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Esercizio 2(4pt/6pt) Mostrare che il modello $\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}}, Q^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}})$ dove $M = \{a, b, c, d\}$ e $P^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b, c\}$ e $R^{\mathcal{M}} = \{c, d\}$ (cioè l'interpretazione i tale che $i(P) = P^{\mathcal{M}}$, etc.) dimostra che

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x (Q(x) \rightarrow R(x)) \not\models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

Soluzione

Sia i l'interpretazione suggerita i.e i sceglie $M = \{a, b, c, d\}$ come universo del discorso ed interpreta i predicati nel modo seguente:

$$i(P) = \{a, b\}, i(Q) = \{a, b, c\}, i(R) = \{c, d\}.$$

Basta mostrare che

$$i(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x (Q(x) \rightarrow R(x))) = 1$$

e che

$$i(\forall x (P(x) \rightarrow R(x))) = 0.$$

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x (Q(x) \rightarrow R(x))$ sarà vera per i se:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

e

$$\exists x (Q(x) \rightarrow R(x))$$

sono entrambe vere per i .

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ sarà vera per i se:

$$i_{a/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$$

$$i_{b/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$$

$$i_{c/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$$

$$i_{d/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$$

dove $i_{a/x}$ coincide con i sull'interpretazione dei predicati e di tutti i simboli del linguaggio diversi da x ed assegna a alla variabile x .

$i_{a/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$ se:

$$i_{a/x}(P(x)) = 0 \text{ o } i_{a/x}(Q(x)) = 1.$$

$i_{a/x}(Q(x)) = 1$ se $i_{a/x}(x) = a$ è un elemento di $i_{a/x}(Q) = \{a, b, c\}$

Quindi $i_{a/x}(Q(x)) = 1$ ed anche $i_{a/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$.

Analogamente si verifica che $i_{b/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$ e $i_{c/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) =$

1.

Mentre per verificare che $i_{d/x}(P(x) \rightarrow Q(x)) = 1$, si osserva che $d \notin P^M$ garantisce che la premessa $P(x)$ è resa falsa da $i_{d/x}$ e quindi che l'implicazione è resa vera da $i_{d/x}$.

Questo mostra che

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

è vera per i .

Per verificare che $\exists x (Q(x) \rightarrow R(x))$ è vera per i bisogna mostrare che almeno una tra $i_{a/x}, i_{b/x}, i_{c/x}, i_{d/x}$ rende vera $Q(x) \rightarrow R(x)$.

Controllare che una a scelta tra $i_{c/x}$ o $i_{d/x}$ rende vera $Q(x) \rightarrow R(x)$.

Infine bisogna verificare che per i ,

$$\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

è falsa.

Questa formula è vera per i se:

$$i_{a/x}(P(x) \rightarrow R(x)) = 1$$

$$i_{b/x}(P(x) \rightarrow R(x)) = 1$$

$$i_{c/x}(P(x) \rightarrow R(x)) = 1$$

$$i_{d/x}(P(x) \rightarrow R(x)) = 1$$

Quindi basta mostrare che almeno una tra $i_{a/x}, i_{b/x}, i_{c/x}, i_{d/x}$ rende falsa $P(x) \rightarrow R(x)$.

Verificare che sia $i_{a/x}$ che $i_{b/x}$ rendono falsa $P(x) \rightarrow R(x)$.

Esercizio 3 (4pt/6pt) Giustificare i passaggi della derivazione

$\exists x \forall y R(x, y), \exists y \exists z (S(z, y) \wedge \neg P(y)), \forall z \forall w (R(z, w) \wedge \neg P(w) \rightarrow Q(z)) \vdash \exists z Q(z)$

1	$\exists x \forall y R(x, y)$	<i>assunzione</i>
2	$\forall y R(c, y)$	$\exists E$ su 1 con c/x
3	$\exists y \exists z (S(z, y) \wedge \neg P(y))$	<i>assunzione</i>
4	$\exists z (S(z, d) \wedge \neg P(d))$	$\exists E$ su 3 con d/y
5	$S(e, d) \wedge \neg P(d)$	$\exists E$ su 4 con e/z
6	$R(c, d)$	$\forall E$ su 2 con d/y
7	$\neg P(d)$	$\wedge E$ su 5
8	$R(c, d) \wedge \neg P(d)$	$\wedge E$ su 6 e 7
9	$\forall z \forall w (R(z, w) \wedge \neg P(w) \rightarrow Q(z))$	<i>assunzione</i>
10	$\forall w (R(c, w) \wedge \neg P(w) \rightarrow Q(c))$	$\forall E$ su 9 con c/z
11	$R(c, d) \wedge \neg P(d) \rightarrow Q(c)$	$\forall E$ su 10 con d/w
12	$Q(c)$	$\rightarrow E$ su 11 e 8
13	$\exists z Q(z)$	$\exists I$ su 12 con z/c

Esercizio 4(4pt/6pt) Sia \mathcal{L} un linguaggio predicativo contenente tre predi-
cati 1-ari P , Q ed R . Derivare

$$\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall xP(x) \rightarrow \exists xR(x).$$

Soluzione

1	$\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$	<i>assunzione</i>
2	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	<i>assunzione</i>
3	$\forall xP(x)$	<i>assunzione da scaricare a 9</i>
4	$\exists xQ(x)$	$\rightarrow E$ su 1 e 3
5	$Q(c)$	$\exists E$ su 4 con c/x
6	$Q(c) \rightarrow R(c)$	$\forall E$ su 2 con c/x
7	$R(c)$	$\rightarrow E$ su 5 e 6
8	$\exists xR(x)$	$\exists I$ su 7 con x/c
9	$\forall xP(x) \rightarrow \exists xR(x)$	$\rightarrow I$ su 8 e 3 scaricando 3

Esercizio 5(3pt/4pt) Dimostrare che:

$$\sim(A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B) = \sim(A \cap B).$$

Esercizio 6(3pt/5pt) Mettere in forma normale di Skolem il seguente enunciato

$$\forall x \exists y (\exists z \exists w (R(w, x) \wedge R(z, w)) \rightarrow \forall z R(z, y))$$

dove R è un predicato binario.

Soluzione

$$\forall x \forall z \forall w \forall t (\neg R(w, x) \vee \neg R(z, w) \vee R(t, f(x)))$$

Esercizio 7(3pt) Mettere in forma normale congiuntiva CNF e disgiuntiva DNF la seguente formula

$$(q \wedge \neg p) \rightarrow ((p \oplus q) \rightarrow \neg p)$$

Soluzione

Poichè la formula è una tautologia $p \vee \neg p$ ne è sia una CNF che una DNF.

Esercizio 8(4pt) Dimostrare che $\{\oplus, \rightarrow\}$ è un sistema adeguato di connettivi.

Soluzione Poichè già sappiamo che $\{\neg, \vee\}$ è un sistema adeguato di connettivi, basta mostrare che i connettivi $\{\neg, \vee\}$ sono esprimibili come combinazioni booleane di formule che utilizzano solo i connettivi $\{\oplus, \rightarrow\}$.

Ora

$$\neg A \equiv A \rightarrow (A \oplus A)$$

mentre

$$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B \equiv (A \rightarrow (A \oplus A)) \rightarrow B,$$

come richiesto.

Esercizio 9(4pt) Formalizzare la seguente frase:

Se esistono infiniti numeri che godono della proprietà P allora tra un numero e il suo doppio c'è un numero che gode della proprietà Q

usando i predicati 1-ari P e Q e i simboli $+$, $<$ e $=$.

Soluzione

$$(\forall x \exists y (x < y \wedge P(y))) \rightarrow (\forall x \exists y (x < y \wedge y < x + x \wedge Q(y)))$$