

Prova di Logica Matematica  
Corso di Logica e Matematica Discreta A e B  
Esame del 8/2/2010

Versione 1

Cognome:

Nome:

Matricola:

Firma:

## Avvertenza

- **Questo esame è per gli studenti di Logica e Matematica Discreta di quest'anno e non per gli studenti degli anni precedenti!**
- L'esame deve essere svolto su *questi* fogli.
- Spiegate quello che state facendo! **Risposte non ben giustificate, anche se corrette, non verranno considerate.**

---

1	2	3	4	T

---

**Esercizio 1** (9pt) Dimostrare che

$$\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x) \not\models \exists xP(x) \rightarrow \forall xQ(x).$$

[Suggerimento: considerare un modello in cui l'interpretazione di  $P$  sia non-vuota e l'interpretazione di  $Q$  non sia il dominio.]

**Soluzione:** Fissiamo un modello  $\mathcal{M}$  in cui  $\emptyset \neq P^{\mathcal{M}} \neq M$  e  $Q^{\mathcal{M}} \neq M$ , dove  $M$  è l'universo di  $\mathcal{M}$ . Per esempio, possiamo prendere come modello l'insieme  $\mathbb{N}$ ,  $P^{\mathcal{M}}$  l'insieme dei pari e  $Q^{\mathcal{M}}$  l'insieme dei dispari. Poiché  $\mathcal{M} \models \forall xP(x)$ , l'implicazione  $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$  è vera in  $\mathcal{M}$ , cioè  $\mathcal{M} \models \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ . Dato che  $Q^{\mathcal{M}} \neq M$  e  $P^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ , vediamo che  $\mathcal{M} \models \exists xP(x)$  e  $\mathcal{M} \not\models \forall xQ(x)$ , cioè  $\mathcal{M} \not\models \exists xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ .

**Esercizio 2** (9pt) Dimostrare utilizzando il metodo che preferite che la seguente formula è valida.

$$(\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x)) \rightarrow \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

**Soluzione:**

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x \neg P(x), \boxed{P(z)}, Q(z) \vdash \boxed{P(z)}}{\forall x \neg P(x), P(z), Q(z), \neg P(z) \vdash} \quad \frac{\forall x \neg Q(x), P(z), \boxed{Q(z)} \vdash \boxed{Q(z)}}{\forall x \neg Q(x), P(z), Q(z), \neg Q(z) \vdash} \quad \begin{array}{l} \text{(-I)} \\ \text{(-I)} \end{array} \\
 \frac{\forall x \neg P(x), P(z), Q(z) \vdash}{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x), P(z), Q(z) \vdash} \quad \frac{\forall x \neg Q(x), P(z), Q(z) \vdash}{\forall x \neg Q(x) \vee \forall x \neg Q(x), P(z), Q(z) \vdash} \quad \begin{array}{l} \text{(VI)} \\ \text{(VI)} \end{array} \\
 \frac{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x), P(z), Q(z) \vdash}{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x), P(z) \wedge Q(z) \vdash} \quad \text{(\wedge)} \\
 \frac{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x), \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash}{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x), \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash} \quad \text{(\exists)} \\
 \frac{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \vdash \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))}{\forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \vdash \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))} \quad \text{(\neg)} \\
 \frac{\vdash \forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \rightarrow \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))}{\vdash \forall x \neg P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \rightarrow \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))} \quad \text{(\rightarrow)}
 \end{array}$$

**Esercizio 3** (7pt) Mettere in forma di Skolem la seguente formula:

$$\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists y \forall x \exists z (P(y, x) \wedge R(x, z))$$

**Soluzione:** cominciamo col porre la formula in forma prenessa

$$\exists v \forall w \exists y \forall x \exists z ((P(v, w) \rightarrow R(w, v)) \rightarrow (P(y, x) \wedge R(x, z)))$$

quindi scriviamo la matrice in forma normale congiuntiva

$$(P(v, w) \vee P(y, x)) \wedge (P(v, w) \vee R(x, z)) \\ \wedge (\neg R(w, v) \vee P(y, x)) \wedge (\neg R(w, v) \vee R(x, z))$$

e infine sostituiamo alla variabile  $v$  una costante  $c$  e alle variabili  $y$  e  $z$  delle opportune funzioni di Skolem  $f$  e  $g$

$$\forall w \forall x ((P(c, w) \vee P(f(w), x)) \wedge (P(c, w) \vee R(x, g(w, x)))) \\ \wedge (\neg R(w, c) \vee P(f(w), x)) \wedge (\neg R(w, c) \vee R(x, g(w, x))))$$

**Esercizio 4** (7pt) Mettere in forma normale disgiuntiva DNF e congiuntiva CNF la seguente formula

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg q)$$

**Soluzione:** possiamo usare le tavole di verità, oppure trasformare la formula usando l'equivalenza tra  $A \rightarrow B$  e  $\neg A \vee B$ . La formula data è equivalente a  $\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg q \vee \neg r) \vee \neg q)$  cioè  $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r) \vee \neg q$  che è in DNF. Quindi per la proprietà distributiva ottengo  $[(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee \neg q$  da cui  $(p \vee q \vee \neg q) \wedge (p \vee r \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg q)$  cioè  $(p \vee r \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r)$  che è in CNF.