UN INTRODUZIONE AL PROBLEMA DEL CONTINUO

MATTEO VIALE

Sommario. Quanti sono i punti di una retta? Sono di più dei numeri naturali? E prima di tutto come possiamo attribuire a tale insieme di punti una quantità numerica? È chiaro che queste domande attengono ad oggetti matematici che ci sono molto familiari (numeri naturali, numeri reali,...), ma non è assolutamente evidente che di esse si possa dare una rigorosa formulazione matematica. Questo è uno dei risultati maggiori di Georg Cantor che, nell'ultimo quarto del diciannovesimo secolo, è riuscito a definire la nozione di numero cardinale e forte di questa intuizione ha potuto generalizzare le regole dell'aritmetica alla classe dei numeri cardinali. In questa nota vogliamo presentare le nozioni di base della teoria dei numeri cardinali di Cantor e dare una precisa formulazione alla domanda con cui abbiamo iniziato il nostro abstract.

Il primo tema da affrontare nella nostra discussione è il seguente:

Che cosa è un numero cardinale?

Daremo per buona la nozione di insieme inteso come un qualunque ente matematico la cui esistenza non sia problematica. Per esempio tutti gli enti matematici in cui ci imbattiamo abitualmente come $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_n$..... sono insiemi i cui elementi sono i numeri che ne fanno parte, inoltre se X, Y sono insiemi anche $P(X)$, $X \times Y$, $X \cup Y$, X^Y, $\{X\}$, $X \cap Y$,... sono insiemi. Una proprietà ϕ definisce la classe di tutti gli insiemi che godono della proprietà ϕ. Ogni insieme (o classe) univocamente determinato dai suoi elementi per esempio:

$$X = \{n : n \text{ è un numero naturale multiplo di } 2\}$$

e

$$Y = \{n : n = m - 1 \text{ con } m \text{ numero naturale dispari}\}$$

Sono due nomi distinti per denotare lo stesso insieme ossia l'insieme dei numeri naturali e pari. Ogni insieme è anche una classe ma NON è sempre il caso che una classe sia un insieme.

Per esempio la classe di Russell $R = \{x : x \notin x\}$ degli insiemi x che non appartengono a se stessi non è un insieme[1]. Altrimenti $R \in R$ o $R \notin R$ ed entrambe le possibilità portano ad un assurdo[2].

[1]Non a caso R è un ente matematico in cui non ci si imbatte abitualmente....

[2]Dare una precisa definizione matematica del concetto di insieme e del concetto di classe è una questione spinosa che ci porterebbe molto lontano dal tema della nostra discussione, il lettore interessato ad approfondire può compulsare qualcuno dei testi nella bibliografia al fondo di questa nota. Una distinzione saliente è la seguente: le classi sono collezioni di insiemi più problematiche da manipolare, per esempio

Data questa breve premessa su insiemi e classi, mettiamo da parte le difficoltà che questi concetti nascondono (anzi mostrano) e concentriamoci invece sulle potenzialità che ci offrono.

Cantor definisce la nozione di numero cardinale nel modo seguente:

Definizione 1. Il numero cardinale di elementi di un insieme X è la classe di equivalenza data da tutti gli insiemi Y che possono essere messi in bigezione con X.

Tale classe definisce la cardinalità dell'insieme X e viene denotata abitualmente $|X|$:

$$|X| = \{Y : \text{ Esiste una bigezione tra } X \text{ e } Y\}.$$

È facile comparare i numeri cardinali ponendo $|X| \leq |Y|$ se e soltanto se esiste una iniezione $f : X \to Y$.

È facile verificare che questa relazione fra le cardinalità κ e λ non dipende dal rappresentante scelto. Infatti se $|X| = |Y| = \kappa$ e $|Z| = |W| = \lambda$, $g : Y \to Z$ è una iniezione che testimonia che $\kappa \leq \lambda$, $f : X \to Y$ una bigezione che testimonia che $|X| = |Y|$ e $h : Z \to W$ una bigezione che testimonia che $|Z| = |W|$ allora $h \circ g \circ f : X \to W$ è una iniezione di X in W.

Possiamo concludere che dati due cardinali κ e λ, $\kappa \leq \lambda$ sse esiste una iniezione che ha come dominio un elemento di κ ed immagine un elemento di λ.

È inoltre altrettanto semplice mostrare che $\leq$ è una relazione transitiva tra cardinali, ossia se $\kappa \leq \lambda$ e $\lambda \leq \theta$ anche $\kappa \leq \theta$. Inoltre $\leq$ è una relazione riflessiva, ossia per ogni cardinale κ vale $\kappa \leq \kappa$.

Ricordiamo che:

Definizione 2. Una relazione binaria R su una famiglia X è un'ordine lineare se:

- R è totale ossia, per ogni a, b in X, aRb o bRa,
- R è riflessiva, ossia aRa per ogni a in X,
- R è antisimmetrica, ossia aRb e bRa se e soltanto se $a = b$
- R è transitiva, ossia aRc, se aRb e bRc.

Esempi classici di ordini lineari sono $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$......

Abbiamo visto sopra che $\leq$ è una relazione riflessiva e transitiva sui cardinali, per concludere che la relazione $\leq$ definisce una relazione d'ordine lineare fra i cardinali è necessario provare che $\leq$ è una relazione antisimmetrica e totale. Questo è il contenuto di due dei primi teoremi di aritmetica cardinale:

Teorema 3 (Schröder, Bernstein)**.** *Siano X e Y due insiemi tali che X si immerge in Y e Y si immerge in X. Allora esiste una bigezione tra X e Y. In particolare se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$ si ha che $|X| = |Y|$.*

---

se C è una classe propria, ossia una classe che non è un insieme, $P(C)$ non esiste altrimenti scegliendo opportunamente la classe C potremmo imbatterci in paradossi simili a quello appena enunciato. Inoltre gli elementi di classi ed insiemi sono SEMPRE insiemi, ossia una classe propria (ossia una classe che non sia un insieme) non appartiene a nessun altro insieme o classe.

Teorema 4 (Zermelo)**.** *Sia* $\{X_i : i \in I\}$ *una collezione non vuota di insiemi, allora esiste* $j \in I$ *tale che* $|X_j| \leq |X_i|$ *per ogni* $i \in I$*.*

In particolare se $X_i \in \kappa_i$ con κ_0, κ_1 cardinali si avrà dal teorema applicato all'insieme $\{X_0, X_1\}$ che $|X_i| = \kappa_i \leq |X_{1-i}| = \kappa_{1-i}$ per qualche $i < 2$. Quindi il teorema di Zermelo mostra che $\leq$ è una relazione totale fra i cardinali[3].

È possibile anche definire la somma, il prodotto e l'esponenziazione fra cardinali:

- $|X| + |Y| = |X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}|$ ossia $|X| + |Y|$ è la cardinalità dell'unione disgiunta di X e Y.
- $|X| \times |Y| = |X \times Y|$ ossia $|X| \times |Y|$ è la cardinalità del prodotto cartesiano di X per Y
- $|X|^{|Y|} = |X^Y|$ dove X^Y è l'insieme di tutte le funzioni che hanno come dominio l'insieme Y e come immagine l'insieme X.

È un esercizio di combinatoria finita verificare che queste operazioni sui cardinali e $\leq$ rispecchiano le usuali operazioni aritmetiche e la relazione d'ordine sui numeri naturali, ossia:

Fatto 1. *Siano* X*,* Y *insiemi con un numero finito di elementi, rispettivamente* n *ed* m*, allora:*

- $X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ *ha* $n + m$ *elementi,*
- $X \times Y$ *ha* $n \cdot m$ *elementi,*
- X^Y *ha* n^m *elementi,*

Inoltre per queste operazioni valgono le stessi leggi associative commutative e distributive delle corrispondenti operazioni aritmetiche, per esempio:

- $|X|^{|Y|} \cdot |X|^{|Z|} = |X|^{|Y|+|Z|}$
- $|X| + |Y| = |Y| + |X|$
- ....

Quindi la relazione d'ordine $\leq$ e le operazioni che abbiamo definito fra numeri cardinali sono la naturale generalizzazione a un contesto infinito dell'aritmetica sui numeri naturali.

Possiamo quindi cominciare a indagare la struttura di questo ordine. Il primo risultato saliente è dovuto a Cantor:

Teorema 5 (Cantor)**.** *Per qualunque insieme* X*,* $|P(X)| > |X|$*.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo e assumiamo che $|X| \geq |P(X)|$. Sia quindi $f : P(X) \to X$ una iniezione. Definiamo:

$$Y = \{x : x \in f^{-1}(x)\}$$

Ora sia y tale che $f(Y) = y$. È facile vedere che $y \in Y$ se e solo se $y \notin Y$. Quindi l'assunzione che esista una immersione f di $P(X)$ in X è contradditoria. $\square$

[3]Più propriamente il teorema di Zermelo mostra che l'ordine lineare definito sui cardinali è un particolare tipo di ordine lineare che permette di dimostrare proprietà sui numeri cardinali per induzione transfinita.

Il secondo passo è mostrare che i numeri naturali possono essere interpretati come una sottoclasse dei numeri cardinali, per esempio nel modo seguente:

Definizione 6. X è Dedekind-finito se e solo se ogni Y strettamente contenuto in X non è in bigezione con X.

Qualunque insieme infinito vi risulti familiare è sempre in bigezione con un suo sottoinsieme proprio (per esempio i naturali con i pari), mentre qualunque insieme finito di cui possiate avere esperienza non è mai in bigezione con un suo sottoinsieme proprio. Il teorema di Dedekind conferma questa intuizione ed inoltre ci dice che la cardinalità dei numeri naturali è il più piccolo cardinale infinito.

Teorema 7 (Dedekind)**.** *X è Dedekind finito se e solo se* $|X| < |\mathbb{N}|$.

Ritorniamo alle conseguenze del teorema di Cantor. Questo teorema mostra che l'aritmetica dei cardinali infiniti è non banale, perché dato un cardinale $|X|$, grazie al teorema di Cantor sarà possibile esibire un cardinale strettamente più grande, per esempio $|P(X)|$.

Investighiamo ora i due cardinali infiniti più interessanti: $|\mathbb{N}|$ e $|\mathbb{R}|$. Mostriamo i fatti seguenti:

Fatto 2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Teorema 8. $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$

Dimostriamo prima che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Dimostrazione. È chiaro che si può immergere $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ e quindi che $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Quindi è sufficiente mostrare che $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$.

Mostriamo prima che $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times 2|$ e poi che $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times 2| \leq |\mathbb{N}|$. Un numero razionale r diverso da zero si può rappresentare in modo unico come (p, q, i) dove p, q sono numeri naturali coprimi tra loro tali che il valore assoluto di r è uguale a p/q e $i = 0$ se r è negativo, $i = 1$ altrimenti. Quindi la mappa che assegna ad r la tripla (p, q, i) sopra descritta se $r \neq 0$ e mappa 0 in $(0, 1, 0)$ è una iniezione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times 2$.

Ora iniettiamo $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times 2$ in $\mathbb{N}$ sfruttando il teorema di fattorizzazzione in numeri primi. Sia ϕ la mappa che assegna alla tripla $(p, q, i) \mapsto 2^{p+1} \times 3^{q+1} \times 5^i$. Se $\phi(x, y, i) = \phi(z, w, j)$, ossia $2^{x+1} \times 3^{y+1} \times 5^i = 2^{z+1} \times 3^{w+1} \times 5^j$, per il teorema di fattorizzazione in numeri primi, $x = z$, $y = w$, $i = j$. Questo conclude la dimostrazione. □

Dimostriamo ora il teorema:

Dimostrazione. Per ogni numero naturale n, $\{0, 1\}^n$ denota le stringhe binarie di lunghezza n ossia le funzioni con dominio $\{0, \ldots, n-1\}$ ed immagine $\{0, 1\}$.

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ definiamo

- $x \oplus A = \{y + x : y \in A\}$
- $x \otimes A = \{x \cdot y : y \in A\}$

Sia C l'insieme di Cantor i.e.

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

Dove $J_0 = [0,1]$ e

$$J_{n+1} = \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} \{(\sum_{j<n} 2\cdot s(j)/3^{j+1}) \oplus (1/3^n \otimes J_0)\}$$

In modo equivalente possiamo definire C come l'insieme di stringhe infinite in base 3 in cui compaiano solo 0 e 2. Più precisamente per ogni numero reale $r \in [0,1]$, r è un elemento di C se e solo se per qualche funzione $f \in 2^{\mathbb{N}}$, $r = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0\cdots n} 2\cdot f(i)/3^{i+1}$. Mostriamo che:

$$|C| = |2^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})| \tag{1}$$

$$|2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| \tag{2}$$

$$|\mathbb{R}| \leq |2^{\mathbb{N}}| \tag{3}$$

Per il teorema di Schröder-Bernstein le equazioni sono dimostrate se entrambe le disuguaglianze fra i due termini dell'equazione sono dimostrate. È sempre facile dimostrare una delle due disuguaglianze da verificare, mentre avremo bisogno di più lavoro per dimostrare l'altra. Inoltre è chiaro che $|C| \leq |\mathbb{R}|$. Combinando questo fatto con le equazioni 3 e 1 si ha $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$ e $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}\times 2^{\mathbb{N}}|$. L'equazione 2 permette di concludere che $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ da cui seguono tutte le tesi del teorema.

Cominciamo col dimostrare l'equazione 1: Possiamo identificare $P(\mathbb{N})$ con $2^{\mathbb{N}}$ associando ad $A \subseteq \mathbb{N}$ la funzione caratteristica di A, $f_A : \mathbb{N} \to 2$ che vale 1 su n se e solo se $n \in A$. Questa mappa definisce una bigezione di $P(\mathbb{N})$ con $2^{\mathbb{N}}$.

Mappiamo $2^{\mathbb{N}}$ in C mandando $f \in 2^{\mathbb{N}}$ in $\phi(f) = \sum_{j=0\cdots\infty} 2\cdot f(j)/3^{j+1}$. La mappa ϕ definisce una bigezione di $2^{\mathbb{N}}$ in C. Quindi l'equazione 1 è verificata.

Mostriamo quindi che $|P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})| \leq |P(\mathbb{N})|$, questo è sufficiente a mostrare l'equazione 2 poiché si avrebbe che:

$$|2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})| \leq |P(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|$$

ed è la disuguaglianza che rende difficile la dimostrazione dell'equazione 2.

Sia $\psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la mappa che assegna alla coppia (i,j) il numero $2^i \cdot 3^j$. ψ è iniettiva. Dato $(A,B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$ (i.e. A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$) sia $\theta(A,B) = \{\psi(n,m) : n \in A, m \in B\}$. Utilizzando nuovamente il teorema di fattorizzazione in numeri primi si può vedere che θ è iniettiva. Questo mostra la validità dell'equazione 2.

Dimostriamo ora la disequazione 3. Prima di tutto $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ come testimoniato dalla mappa $x \mapsto tg(\pi/2\cdot(2x-1))$ che è una bigezione di $(0,1)$ su $\mathbb{R}$. In secondo luogo ogni $r \in (0,1)$ ha un unica espansione binaria $0, x_0x_1x_2.....$ tale che per ogni n:

$$\sum_{i\leq n} x_i/2^n < r,$$

ossia tale che x_n è un numero naturale minore di 2 per ogni n e $r = \sup_n \sum_{i\leq n} x_i/2^n$. Sia γ la mappa che associa ad ogni $r \in (0,1)$ la funzione $f_r : \mathbb{N} \to 2$ tale che $f_r(n) = x_n$ per ogni n. Non è difficile vedere che γ è una inezione di $(0,1)$ su $2^{\mathbb{N}}$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Passiamo ora ad enunciare l'ipotesi del continuo che asserisce che $|\mathbb{R}|$ è il più piccolo cardinale maggiore di $|\mathbb{N}|$:

Congettura 9 (CH)**.** *Per ogni cardinale* $\kappa \leq |\mathbb{R}|$, $\kappa \leq |\mathbb{N}|$ *o* $\kappa = |\mathbb{R}|$.

Tale ipotesi fu formulata da Cantor già nell'ultimo quarto del XIX-secolo e la ricerca di una sua soluzione fu il primo nella famosa lista di 23 problemi che Hilbert pose ai matematici del suo tempo nella conferenza di Parigi del 1900. Ad oggi non si è ancora giunti ad una sua soddisfacente soluzione. Ciònonostante i risultati intorno a questo problema sono tra i più strabilianti raggiunti dalla matematica nel ventesimo secolo. In particolare i lavori di Gödel nel 1939 e di Cohen nel 1963 mostrano come tale ipotesi non possa essere risolta utilizzando i tradizionali metodi dimostrativi. Infatti Gödel ha prodotto un modello della teoria degli insiemi (e quindi un modello in cui tutta la matematica possa essere interpretata) in cui CH è vero, mentre Cohen con un lavoro che gli valse la medaglia Fields ha mostrato che vi possono essere un infinità di modelli della teoria degli insiemi nei quali CH è falsa.

Per saperne di più

Letture introduttive: Consultare su Wikipedia le voci:
- Numero cardinale (nella sezione matematica)
- Cardinalità
- Ipotesi del continuo
- Teoria degli insiemi

Letture più avanzate:

- Gödel, K.: What is Cantor's Continuum Problem?, ristampato in Benacerraf e Putnam (ed.), Philosophy of Mathematics, 2nd ed., Cambridge University Press, 1983.
- Woodin, W. Hugh: The Continuum Hypothesis, Part I, Notices of the AMS, Vol. 48, no. 6 (2001), pp. 567-576 .
- Woodin, W. Hugh: The Continuum Hypothesis, Part II, Notices of the AMS, Vol. 48, no. 7 (2001), pp. 681-690.

Il primo articolo contiene una chiara e semplice esposizione di Gödel delle idee e dei problemi attinenti all'ipotesi del continuo e sulle possibile strategie per cercare di risolverla. Gli ultimi due articoli sono di più difficile lettura ed introducono ai lavori di Woodin volti a dimostrare che l'ipotesi del continuoè falsa

Un'ottimo manuale di teoria degli insiemi:

- Kunen, Kenneth (1980). Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. North-Holland.