# Note sulla costruibilità per il corso di teoria degli insiemi 2009-2010

Matteo Viale

29 giugno 2010

## 1 Introduzione

Nel seguito (anche se non strettamente necessario dal punto di vista formale per ottenere i risultati di corenza relativa che presenteremo) adotteremo un punto di vista platonista e assumeremo che esista una struttura $(V, \in)$ tale che $\in \subseteq V \times V$ è veramente una relazione ben fondata, inolte assumeremo che $(V, \in) \models \mathsf{ZFC}$ dove $\models$ è la abituale nozione di conseguenza semantica alla Tarski definita nella metateoria.

Per avere una idea più chiara di quale sia il nostro punto di vista, consideriamo la teoria del primo ordine nota come aritmetica di Peano $\mathsf{PA}$. I numeri naturali $\mathbb{N}$ sono il modello standard per questa teoria. D'altra parte grazie al teorema di compattezza esistono anche modelli non standard di $\mathsf{PA}$ ossia modelli $M$ in cui $\mathbb{N}$ si immerge come un segmento iniziale proprio. In tali modelli non standard vi sono numeri naturali $a \in M$ più grandi di qualunque numero finito. Più precisamente sia per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(x)$ una formula nel linguaggio dell'aritmetica $\{+, \cdot, <, =\}$ tale che $\mathbb{N} \models \phi_n(x)[n]$ e tale che $\mathsf{PA} \vdash \exists! x \phi_n(x)$. Allora dato $M$ modello non standard di $\mathsf{PA}$, sia per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in M$ l'unico oggetto tale che $M \models \phi_n(z)[a_n]$. Poiché $M$ è non standard esiste $a \in M$ tale che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, $M \models a_n < a$. Tale $a$ viene detto intero non standard[1].

Vogliamo adottare lo stesso punto di vista per $\mathsf{ZFC}$. Nella nostra intenzione $\mathsf{ZFC}$ intende descrivere la teoria del primo ordine nel linguaggio $\{\in, =\}$ di una data struttura $(V, E_V)$ che è l'universo degli insiemi, così come $\mathsf{PA}$ intende formalizzare la teoria del primo ordine della struttura $\mathbb{N}$. Il problema è che ci confrontiamo anche in questo caso con l'esistenza di modelli non standard di $\mathsf{ZFC}$. Infatti, esattamente come nel caso di $\mathsf{PA}$, il teorema di compattezza nella metateoria ci mostra che se $\mathsf{ZFC}$ ha un modello allora ha anche un modello mal fondato ossia un modello $(M, E_M)$ tale che:

- la struttura $(M, E_M) \models \mathsf{ZFC}$ rispetto alla nozione $\models$ definita nella metateoria,
- $E_M \subseteq M \times M$ è una relazione non transitiva, ossia per qualche $z \in M$, $\{x \in M : xE_Mz\} \neq z$,
- $E_M$ è mal fondata rispetto alla metateoria, ossia esiste $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$ tale che per ogni $z$ in $M$, $\{x \in M : xE_Mz\} \neq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e tale che $x_{n+1}E_Mx_n$ per ogni $n$.

Nella struttura $(V, E_V)$ che noi prenderemo in esame $E_V$ è -veramente la relazione di appartenenza $\in$ e quindi:

- $E_V$ è transitiva, ossia è la vera appartenenza $\in$, quindi per ogni $z \in V$, $\{x \in V : xE_Vz\} = z$,

[1]Per semplificare la notazione spesso scriveremo $M \models \phi(a_0, \cdots, a_n)$ invece di $M \models \phi(x_0, \cdots, x_n)[a_0, \cdots, a_n]$, il lettore potrà pensare che abbiamo espanso il linguaggio $\{\in, =\}$ con costanti che vengono interpretate da $a_0, \cdots, a_n$.

- $E_V$ è ben fondata nella metateoria ossia, per ogni $Z \subseteq V$ (a priori $Z$ potrebbe non essere un elemento della struttura $V$) esiste $x$ in $Z$ tale che per ogni $y$ in $Z$ $\neg(yE_Vx)$.

Poiché $E_V$ coincide con $\in \cap V \times V$ d'ora in poi indicheremo la nostra struttura di riferimento come la coppia $(V, \in)$ o anche solo con $V$, inoltre ci sentiremo liberi di non relativizzare le formule e le operazioni definibili tra insiemi di $V$ alla struttura $V$, poiché nella nostra intenzione $V$ è veramanete l'universo degli insiemi e quindi per esempio $P(M)^V = P(M)$, $|X|^V = |X|$ etc......

Questo breve excursus di natura filosofica viene fatto con la speranza di facilitare l'intuizione che guiderà i nostri passi nel seguito.

## 2 Definibilità

Scriveremo spesso per una data struttura $(M, \in)$, $M \models \phi(a_1, \cdots a_n)$ invece di $(M, \in) \models \phi(x_0, \cdots, x_n)[a_0, \cdots a_n]$. Il lettore pignolo potrà pensare che nella metateoria abbiamo espanso il linguaggio $\{\in, =\}$ con costanti per ogni elemento di $M$.

**Definizione 1.** *Sia $T$ una teoria nel linguaggio $\{\in, =\}$, Dato $\vec{a} \in V^{<\omega}$, $R(x_0, \cdots, x_n)$ è una proprietà $\Delta_1(\vec{a})$-definibile rispetto a una teoria $T$ se e solo se:*

- *Ci sono due formule $\psi_R(\vec{x}, \vec{y})$ e $\phi_R(\vec{x}, \vec{y})$ la prima $\Pi_1$ e la seconda $\Sigma_1$ tali che*

$$T \vdash \exists \vec{y} \forall \vec{x} [\phi_R(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow \psi_R(\vec{x}, \vec{y})].$$

- *Per ogni $M \subseteq V$ classe (o insieme) transitiva tale che $M \models T$, $\vec{a} \in M^{<\omega}$,*

$$M \models \forall \vec{x} [\phi_R(\vec{x}, \vec{a}) \leftrightarrow \psi_R(\vec{x}, \vec{a})].$$

*si ha che per un qualunque $\vec{b} \in M^{<\omega}$, $R(\vec{b})^M$ sse $M \models \phi_R(\vec{b}, \vec{a})$ (o $M \models \psi_R(\vec{b}, \vec{a})$).*

*Data una proprietà $R$ $\Delta_1(\vec{a})$-definibile nella teoria $T$, indicheremo con $\psi_R$ e $\phi_R$ le formule rispettivamente $\Pi_1$ e $\Sigma_1$ che possono essere utilizzate per definirla.*

*Data una proprietà $R$ $\Delta_1(\vec{a})$-definibile, diremo che una classe (o insieme) transitiva $M$ è* corretta per $R$ rispetto al parametro *$\vec{a}$ se $M$ soddisfa $T$, $\vec{a} \in M^{<\omega}$ ed*

$$M \models \forall \vec{x}[\phi_R(\vec{x}, \vec{a}) \leftrightarrow \psi_R(\vec{x}, \vec{a})].$$

Ricordiamo i fatti seguenti che saranno cruciali in tutti i ragionamenti che seguiranno:

**Lemma 2.** *Sia $R(x_0, \cdots, x_n)$ una proprietà $\Delta_1(\vec{a})$-definibile in una teoria $T$ del linguaggio $\{\in, =\}$. Siano $M \subseteq N$ delle classi (o insiemi) transitive contenute in $V$ corrette per $R$ rispetto al parametro $\vec{a}$. Allora per ogni $\vec{b} \in M$, $R(\vec{b})^M$ sse $R(\vec{b})^N$.*

*Dimostrazione.* Utilizziamo in un verso la definizione $\Sigma_1$ di $R$ e nell'altro la definizione $\Pi_1$ di $R$. Quindi siano $\phi_R = \exists x \phi(x, \vec{y}, \vec{z})$ e $\psi_R = \forall x \psi(x, \vec{y}, \vec{z})$ formule che testimonino che $R$ è una relazione $\Delta_1$ con $\phi, \psi$ formule $\Delta_0$ e tali che per ogni classe transitiva $W$ che è modello di $T$ e per ogni $\vec{b} \in W^{<\omega}$, $R(\vec{b})^W$ sse $W \models \phi_R(\vec{b}, \vec{a})$.

Ora assumiamo $R(\vec{b})^M$, allora $M \models \phi(c, \vec{b}, \vec{a})$ per qualche $c \in M$. Poiché $\phi$ è $\Delta_0$ ed $M, N$ sono transitivi ed $M \subseteq N$, $N \models \phi(c, \vec{b}, \vec{a})$), quindi $R(\vec{b})^N$ è testimoniato da $\phi_R$. Viceversa se $R(\vec{b})^N$ per qualche $\vec{b} \in M^{<\omega}$, allora $N \models \psi(c, \vec{b}, \vec{a})$ per ogni $c \in N$. Per le stesse ragioni di sopra otteniamo che per ogni $c \in M$, $M \models \psi(c, \vec{b}, \vec{a})$ per cui $R^M(\vec{b})$ è testimoniato da $\psi_R$. $\square$

**Lemma 3.** *Sia $R(x_0, \cdots, x_n)$ una proprietà $\Delta_1(\vec{a})$-definibile in una teoria $T$ del linguaggio $\{\in, =\}$ tale che:*

- $T \vdash \exists \vec{y} \forall x_1, \cdots, x_n \exists ! x_0 \psi_R(x_o, x_1, \cdots, x_n, \vec{y})$,
- *Per ogni classe transitiva $M$ corretta per $R$ rispetto al parametro $\vec{a}$ si ha che $M \models \forall x_1, \cdots, x_n \exists ! x_0 \psi_R(x_o, x_1, \cdots, x_n, \vec{a})$*

*Allora la funzione $F : V^n \to V$ che mappa $\vec{b}$ nell'unico $c$ tale che $R(c, \vec{b})$ (ossia $\vec{b} \mapsto c$ sse $V \models \psi_R(c, \vec{b}, \vec{a})$) è assoluta rispetto a classi transitive corrette per $R$ (ossia la mappa $F^M : M^n \to M$ che mappa $\vec{b} \in M^n$ nell'unico $c \in M$ tale che $R^M(c, \vec{b})$ coincide con $F \restriction M$).*

*Dimostrazione.* Lasciamo al lettore interessato la dimostrazione di questo lemma. □

**Teorema 4.** *Esiste una proprietà $Sat(X, n, \vec{z})$ e un insieme finito $T_{Sat}$ di assiomi di $\mathsf{ZF}$ tali che:*

1. *$Sat$ sia $\Delta_1(X, n, \vec{z}, \omega)$-definibile rispetto a un insieme finito $T_{Sat}$ di assiomi di $\mathsf{ZF}$ quando $X \in V$ è un dato insieme, $n \in \omega$ è un numero naturale e $\vec{z} \in X^{<\omega}$.*
2. *Per ogni $X \in V$, $\vec{b} \in X^{<\omega}$ ed ogni formula $\phi(x_0, \cdots, x_l)$ nel linguaggio $\{\in, =\}$ con variabili libere $x_0, \cdots, x_l$, sia $n = \ulcorner \phi \urcorner$ il numero di Gödel della formula $\phi$ allora $V \models Sat(X, n, \vec{b})$ sse nella metateoria utilizzando l'abituale definizione di Tarski $(X, \in \cap X^2) \models \phi(x_0, \cdots, x_l)[\vec{b}]$.*
3. *$T_{sat} \vdash \forall X, n \in \omega, \vec{z} \in X^{<\omega} \exists ! y \subseteq X (\forall x \in X \, x \in y \leftrightarrow Sat(X, n, \langle x \rangle \vec{z}))$.*

Supposto che il teorema sia stato dimostrato definiamo[2]:

[2] $\langle y \rangle \vec{z}$ denota la sequenza il cui primo pezzo è la sequenza $\langle y \rangle$ e il cui secondo pezzo è la sequenza $\vec{z}$

**Definizione 5.** *Dato un insieme $X$ una formula $\phi$ ed una sequenza $\vec{b} \in X^{<\omega}$*

$$Def_{\ulcorner\phi\urcorner}(X, \vec{b}) = \{y \in X : Sat(X, \ulcorner\phi\urcorner, \langle y\rangle\vec{b})\}$$

$$Def(X) = \bigcup\{Def_n(X, \vec{b}) : n \in \omega, \vec{b} \in X^{<\omega}\}$$

Assumendo il teorema 4, invitiamo il lettore a verificare i fatti seguenti utilizzando i lemmi precedenti:

**Lemma 6.** *Per ogni classe transitiva $M$ tale che $M \models T_{Sat}$, $Def_n^M = Def_n \restriction M$ e $Def^M = Def \restriction M$.*

**Lemma 7.** *Per ogni classe transitiva $M$ che sia modello di $T_{Sat}$ ed ogni insieme $X \in M$*

*(a) Per ogni formula $\phi(x_0, \cdots, x_n)$ ed ogni $a_1, \cdots, a_n \in X$, $\{y \in X : X \models \phi(y, a_1, \cdots, a_n)\} \in Def(X)$*

*(b) Per ogni $x \in Def(X)$ esiste una formula $\phi(x_0, \cdots, x_n)$ ed $a_1, \cdots, a_n \in X$ tali che $x = \{y \in X : X \models \phi(y, a_1, \cdots, a_n)\}$.*

Per ora dimostriamo solo il lemma 7:

*Dimostrazione.* (a): Sia $\phi(x_0, \cdots, x_n)$ una formula con variabili libere $x_0, \cdots, x_n$ ed $a_1, \cdots, a_n \in X$. Per l'enunciato *(2)* del teorema 4, per ogni $y \in X$, $X \models \phi(y, a_1, \cdots, a_n)$ sse $V \models Sat(X, \ulcorner\phi\urcorner, \langle y, a_1, \cdots, a_n\rangle)$. Quindi $x = \{y \in X : X \models \phi(y, a_1, \cdots, a_n)\} = \{y \in X : V \models Sat(X, \ulcorner\phi\urcorner, \langle y, a_1, \cdots, a_n\rangle)\} \in Def(X)$.

(b): Dato $x \in Def(X)$ siano $n$ e $\vec{a} = \langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ tali che $x = \{y \in X : V \models Sat(X, n, \vec{a})\}$ e sia $\phi$ tale che $n = \ulcorner\phi\urcorner$, allora $x = \{y \in X : X \models \phi(y, a_1, \cdots, a_n)\}$. $\square$

La dimostrazione del lemma 6 è più laboriosa e utilizza gli enunciati *(1)* e *(3)* del teorema 4.

Nel resto della presente sezione abbozzeremo una dimostrazione del teorema 4.

*Dimostrazione.* Per definire $Sat(M, n, \vec{z})$ procediamo nel modo seguente:

Formalizziamo prima in $V$ le formule del linguaggio $\{=, \in\}$, 3 rappresenta $=$, 5 rappresenta $\in$, $2^{p_{n+2}}$ (dove $p_n$ è l'$n$-esimo numero primo) rappresenta la variabile $x_n$. Ora per induzione asseriamo che $j$ rappresenta una formula $\phi$ sse:

- $j = 2^{p_{n+2} \cdot p_{m+2} \cdot 2} \cdot 3$ e $\phi$ è la formula $x_n = x_m$,
- $j = 2^{p_{n+2} \cdot p_{m+2} \cdot 3} \cdot 3$ e $\phi$ è la formula $x_m = x_n$,
- $j = 2^{p_{n+2} \cdot p_{m+2} \cdot 2} \cdot 5$ e $\phi$ è la formula $x_n \in x_m$,
- $j = 2^{p_{n+2} \cdot p_{m+2} \cdot 3} \cdot 5$ e $\phi$ è la formula $x_m \in x_n$,
- se $j = 7^m \cdot 11^k$, allora $j$ rappresenta la formula $\phi \wedge \psi$ se $m$ rappresenta la formula $\phi$ e $k$ rappresenta la formula $\psi$,
- se $j = 19^m$, allora $j$ rappresenta la formula $\neg\phi$ se $m$ rappresenta la formula $\phi$,
- se $j = 23^m \cdot 29^k$, allora $j$ rappresenta la formula $\exists x_k \psi$ se $m$ rappresenta la formula $\psi$,

L'insieme $Form$ dei $j \in \omega$ che rappresentano una formula è un sottoinsieme ricorsivo di $\omega$ e quindi è definito in $V$ da una formula $\phi_{form}$ che è $\Delta_0(\omega)$ definibile nella teoria $\mathsf{ZF}$, più precisamente:

Fissamo per ogni $n \in \omega$ una formula $\phi_n$ senza quantificatori tale che $\mathsf{ZF} \vdash \exists! x\, \phi_n(x)$ e $V \models \phi_n(x)[n]$. Allora esiste una formula (o proprietà) $\phi_{form}$ $\Delta_0(\omega)$-definibile e tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$n$ è il numero di Gödel di un formula *sse* $\mathsf{ZF} \vdash \exists x \in \omega \phi_{form}(x) \wedge \phi_n(x)$

Inoltre possiamo supporre che la formula $\phi_{form}$ catturi l'esatta forma sintattica di una formula, ossia che dato $n$ tale che $V \models \phi_{form}(n)$ si possa sapere se $n$ è il numero di Gödel della negazione della fomula rappresentata da un certo $m$ più piccolo di $n$ tale che $\phi_{form}(m)$ etc.(esattamente come si è proceduto formalizzare l'aritmetica nel corso della dimostrazione del teorema di incompletezza di Gödel...).

Ora dato $\vec{z} = \langle a_0, \cdots, a_l \rangle$, definiamo $A(g, X, n, \langle a_0, \cdots, a_l \rangle)$ per ricorsione su $n$ nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
&g \text{ } \textit{è una funzione} \\
&\wedge \\
&dom(g) = X^{<\omega} \times Form \\
&\wedge \\
&im(g) = 2 \\
&\wedge
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{ \\
&n = 2^{p_{i+2} \cdot p_{j+2} \cdot 2} \cdot 3 \rightarrow (a_i = a_j \leftrightarrow g(\vec{z}, n) = 1) \\
&\vee \\
&n = 2^{p_{i+2} \cdot p_{j+2} \cdot 3} \cdot 3 \rightarrow (a_j = a_i \leftrightarrow g(\vec{z}, n) = 1) \\
&\vee \\
&n = 2^{p_{i+2} \cdot p_{j+2} \cdot 2} \cdot 5 \rightarrow (a_i \in a_j \leftrightarrow g(\vec{z}, n) = 1) \\
&\vee \\
&n = 2^{p_{i+2} \cdot p_{j+2} \cdot 3} \cdot 5 \rightarrow (a_j \in a_i \leftrightarrow g(\vec{z}, n) = 1)
\end{aligned}
$$

$\vee$

$n = 7^m \cdot 11^k \rightarrow [g(\langle a_0, \cdots, a_l \rangle, n) = 1 \leftrightarrow (g(\langle a_0, \cdots, a_l \rangle, m) = 1 \wedge g(\langle a_0, \cdots, a_l \rangle, k) = 1]$

$\vee$

$n = 19^m \rightarrow [g(\langle a_0, \cdots, a_l \rangle, n) = 1 \leftrightarrow g(\langle a_0, \cdots, a_l \rangle, m) = 0]$

$\vee$

$n = 23^m \cdot 29^k \rightarrow [\exists a \in M g(\langle a_0, \cdots, a_{k-1} \rangle \langle a \rangle \langle a_{k+1}, \cdots, a_l \rangle, m) = 1 \leftrightarrow g(\langle a_0, \cdots, a_l \rangle, n) = 1]$

$\}$

Una ispezione della formula $A(g, X, n, \langle a_0, \cdots, a_l \rangle)$ mostra che tale formula è $\Delta_0$ nei parametri $g, X, n, \langle a_0, \cdots, a_l \rangle, \omega$ e che $Sat(X, n, \vec{z})$ può essere espressa sia dalla formula $\psi_{Sat} \equiv \forall g\, A(g, X, n, \vec{z}) \rightarrow g(\vec{z}, n) = 1$ che dalla formula $\phi_{Sat} \equiv \exists g\, A(g, X, n, \vec{z}) \wedge g(\vec{z}, n) = 1$.

Sia $T_{sat}$ l'insieme finito di assiomi di ZF necessario a dimostrare la proprietà *(3)* di $Sat$ e l'equivalenza tra le formule $\psi_{Sat}$ e $\phi_{Sat}$. Invitiamo il lettore a verificare che $T_{Sat}$, $\psi_{Sat}$ e $\phi_{Sat}$ testimoniano che $Sat$ soddisfa le condizioni *(1)*, *(2)* e *(3)* del teorema 4. $\square$

Nel seguito saremo meno dettagliati nella dimostrazione che determinate proprietà sono $\Delta_1$-definibili in ZF rispetto a certi parametri in $V$.

# 3 Costruibilità

Possiamo a questo punto procedere a definire in $V$, $L$ la classe degli insiemi costruibili:

**Definizione 8.** 
- $L_0 = \emptyset$,
- $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$,
- $L_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} L_\alpha$ *se* $\beta$ *è limite.*
- $L = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha$.

Si può vedere che $L$ è una classe $\Delta_1$-definibile in $V$ (senza parametri) utilizzando le formule seguenti:

- $\phi_L(g) \equiv g$ *è una funzione* $\wedge\, dom(g)$ *è un ordinale* $\wedge\, g(0) = \emptyset \wedge \forall\alpha \in dom(g)\, g(\alpha+1) = Def(g_\alpha) \wedge \forall\beta \in dom(g)$ *limite* $g(\beta) = \bigcup\{g(\alpha) : \alpha < \beta\}$.
- $x \in L \equiv \exists g \phi_L(g) \wedge \exists\alpha \in dom(g) x \in g(\alpha)$
  $\equiv [\forall g(\phi_L(g) \wedge rk(x) \in dom(g)) \rightarrow \exists\alpha \in dom(g) x \in g(\alpha)]$.

Ora possiamo procedere come nel libro di Kunen.

**Lemma 9.** *$L$ ha le seguenti proprietà in* ZF*:*

- $L_\alpha$ *è un insieme transitivo per ogni* $\alpha$,
- $L_\alpha \subseteq R(\alpha)$ *per ogni* $\alpha$,
- *Se vale* AC, $|L_\alpha| = |\alpha|$ *per ogni* $\alpha \geq \omega$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è lasciata la lettore e non dovrebbe presentare difficoltà. Altrimenti rimandiamo al lemma VI.1.3 del libro di Kunen. □

**Teorema 10.** $L \models$ ZF

*Dimostrazione.* **Estensionalità:** $L$ modella l'assioma di estensionalità perché è una classe transitiva.

**Unione:** Se $x \in L_\alpha$, $\bigcup x = \{z : \exists y \in x\, z \in y\} = \{z : L_\alpha \models \exists y \in x\, z \in y\} \in L_{\alpha+1}$.

**Separazione:** Dato $y \in L$ e una formula $\phi(x_0, \cdots x_n)$ ed $a_2, \cdots, a_n \in L$, sia $\beta$ tale che $y, a_2, \cdots, a_n \in L_\beta$ e per ogni $\vec{z} \in (L_\beta)^{<\omega}$ $L_\beta \models \phi(\vec{z})$ sse $L \models \phi(\vec{z})$. Un tale $\beta$ esiste per il teorema di riflessione applicato in $V$ alla classe $L$ (vedi teorema IV.7.5 del libro di Kunen).

Ora $\{x \in y : L \models \phi(x, y, a_2, \cdots, a_n)\} = \{x \in L_\beta : L \models x \in y \wedge \phi(x, y, a_2, \cdots, a_n)\} = \{x \in L_\beta : L_\beta \models x \in y \wedge \phi(x, y, a_2, \cdots, a_n)\} \in L_{\beta+1}$.

**Rimpiazzamento:** Data $\phi(x, y, \vec{z})$ tale che per qualche $\vec{a} \in L^{<\omega}$, $L \models \forall x \exists ! y \phi(x, y, \vec{a})$ e dato $X \in L$ sia per ogni $x \in X$, $\alpha_x = \min\{\beta : x \in L_{\beta+1}\}$. Utilizzando l'assioma del rimpiazzamento in $V$ si ha che $\alpha = \sup\{\alpha_y : \exists x \in X\, L \models x \in X \wedge \phi(x, y, \vec{a})\}$ è ben definito, allora per ogni $x \in X$ esiste $y \in L_\alpha$ tale che $L \models \phi(x, y, \vec{a})$ e quindi $L_\alpha \in L$ testimonia l'assioma del rimpiazzamento in $L$ per la formula $\phi$ e l'insieme $X$.

**Potenza:** Dato $x \in L$ sia $\alpha = \sup\{\alpha_y : y \in L \wedge y \subseteq x\}$, allora $P(x)^L = P(x) \cap L \subseteq L_\alpha$ e $P(x)^L = \{y \in L_\alpha : L_\alpha \models y \subseteq x\} \in L_{\alpha+1}$. □

Prima di procedere osserviamo che $x \in L$ è una proprietà $\Delta_1$-definibile in $\mathsf{ZF}$ e $L \models \mathsf{ZF}$, e quindi che $L \models x \in L$ sse $V \models x \in L$ per ogni $x \in L$. Ossia $L^L = L^V$.

**Teorema 11.** *$L \models AC$ ed esiste $<_L \subseteq L \times L$ classe $\Delta_1$-definibile senza parametri tale che $<_L$ è un buon ordine di $L$.*

*Dimostrazione.* Diamo solo una dimostrazione informale del lemma: Prima di tutto osserviamo che se $X$ è bene ordinato da $<_X$,

$X^{<\omega}$ è bene ordinato da $<^*_X$ dove $s <^*_X t$ se $s \prec t$ oppure $[s \not\prec t$ e per il minimo $i < |s|$ tale che $s(i) \neq t(i)$ si ha che $s(i) <_X t(i)]$.

Supponiamo $<_X$ sia un buon ordine di $X$. Dato $y \in Def(X)$ sia $n^X_y \in \omega$ il minimo intero tale che $n^X_y \in Form$ rappresenta una formula $\phi_y$ e $y = \{z \in X : X \models \phi_y(z, \vec{p})\}$ per qualche $\vec{p} \in X^{<\omega}$ ed $s^X_y$ la più piccola stringa $\vec{p} \in X^{<\omega}$ rispetto a $<^*_X$ tale che $y = \{z \in X : X \models \phi_y(z, \vec{p})\}$.

Ora definiamo

- $<_0 = \emptyset$,
- $<_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} <_\alpha$ se $\beta$ limite,
- $<_{\alpha+1} = <_\alpha \cup <^*$ dove per $x, y \in L_{\alpha+1}$, $x <^* y$ è definito nel modo seguente:
  - se $x \in L_\alpha$ e $y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$, allora $x <^* y$,
  - se $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$, allora $x <^* y$ se e solo se $[n^{L_\alpha}_x < n^{L_\alpha}_y$ oppure $(n^{L_\alpha}_x = n^{L_\alpha}_y$ e $s^{L_\alpha}_x <^*_\alpha s^{L_\alpha}_y)]$.

Si può verificare che $<_L = \bigcup_{\alpha \in Ord} <_\alpha$ è un buon ordine di $L$ definito da una proprietà $\Delta_1$-definibile in $\mathsf{ZF}$ senza parametri.

In particolare $(<_L)^L = <_L$ quindi $L \models \mathsf{ZFC}$ ed esiste un buon ordine di $L$ $\Delta_1$-definibile in $\mathsf{ZF}$. $\square$

**Teorema 12.** $L \models \mathsf{CH}$

*Dimostrazione.* La dimostrazione viene rapidamente accennata. Il punto chiave è il seguente *Lemma di Condensazione*:

**Lemma 13.** *Sia $T_0$ una lista finita di assiomi di $\mathsf{ZF}$ tali che per ogni modello transitivo $M$ di $T_0$ $(<_L)^M = <_L \cap M \times M$*

*Sia $V = L$ la proprietà $\Delta_1$-definibile senza parametri espressa dalla formula*[3]*:*

$$\forall x \exists g\, (\phi_L(g) \wedge \exists \alpha \in dom(g)\, x \in g(\alpha))$$

*o dalla formula:*

$$\forall x \forall g\, (\phi_L(g) \wedge dom(g) > rk(x)) \rightarrow \exists \alpha \in dom(g)\, x \in g(\alpha).$$

*Sia $T_L = T_0 \cup T_{Sat} \cup V = L$.*

*Se $M$ è un insieme* transitivo *tale che $M \models T_L$, $M = L_\alpha$ per qualche $\alpha$.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è lasciata al lettore che può eventualmente fare riferimento anche al teorema VI.3.9 nel libro di Kunen. □

Assumendo questo lemma dimostriamo il seguente:

**Lemma 14.** *Per ogni $x \in L \cap P(\omega)$ esiste $\gamma < (\omega_1)^L$ tale che $x \in L_\gamma$.*

Se questo è il caso $P(\omega)^L \subseteq L_{(\omega_1)^L}$ e poiché $L \models \mathsf{ZFC}$, $L \models |L_{(\omega_1)^L}| = (\omega_1)^L$. Quindi $L \models |P(\omega)| \leq (\omega_1)^L$ ossia $L \models \mathsf{CH}$.

Dimostriamo ora il lemma:

*Dimostrazione.* Osserviamo che se $M$ è un qualunque insieme infinito tale che $\emptyset \in M$ ed $(M, \in)$ soddisfa l'assioma del paio e l'assioma dell'unione allora $\omega \subseteq M$, possiamo quindi supporre che l'assioma del paio e dell'unione siano nella lista $T_L$.

Sia $x \in P(\omega) \cap L$, sia $\beta$ un ordinale limite (potenzialmente molto maggiore di $(\omega_1)^L$) tale che $x \in L_\beta$ e $L_\beta \models T_L$. Tale $\beta$ esiste per il teorema di riflessione applicato ad $L$. Notare che $\emptyset \in L_\beta$ ed $L_\beta$ soddisfa l'assioma del paio e l'assioma dell'unione.

[3]Ricordiamo che la definizione di $\phi_L(g)$ è stata data all'inizio di questa sezione.

Prendiamo $M \in L$ tale che $x \in M$ ed $M \prec L_\beta$ ed $M$ è numerabile (notare che in generale se $\beta > (\omega_1)^L$, $M$ è un insieme *non* transitivo). Tale $M$ esiste per il teorema di Lowenheim Skolem applicato in $L$ alla struttura $(L_\beta, \in)$ (ciò è possibile poichè $L \models \mathsf{ZFC}$ e quindi il teorema di Lowenheim Skolem vale nella struttura $L$.)

Sia $\pi : M \to N \subseteq L$ il collasso transitivo di $M$. Allora $N$ e un insieme numerabile e transitivo e $N \equiv M \equiv L_\beta$. Quindi $N \models T_L$ e quindi $N = L_\gamma$ per qualche $\gamma$. Ora osserviamo che $\emptyset \in M$ e che $M$ soddisfa l'assioma del paio e l'assioma dell'unione e quindi che $\omega \subseteq M$. Da ciò possiamo concludere che $\pi(\omega) = \omega$ e che $\pi(x) = x$.

Allora $x \in N = L_\gamma$ ed $L \models |L_\gamma| = |\gamma|$, poiché $L \models \mathsf{AC}$. Quindi dato che $L \models N$ *è numerabile* , $L \models \gamma$ *è numerabile.* $\square$

Il teorema è dimostrato modulo alcune parti... $\square$