

Soluzioni agli esercizi di preparazione di logica matematica

1. Dimostrare che $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)))$ è un sequente derivabile.

Soluzione: Procedendo dal basso verso l'alto otteniamo

$$\begin{array}{c} (\wedge\text{-r}) \frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash B \quad A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash D}{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash B \wedge D} \\ (\rightarrow\text{-l}) \frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)}{A \rightarrow B \vdash (C \rightarrow D) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D))} \\ (\rightarrow\text{-l}) \frac{A \rightarrow B \vdash (C \rightarrow D) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D))}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)))} \end{array}$$

quindi basta dimostrare che i due sequenti

$$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash B \quad \text{e} \quad A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash D$$

sono derivabili. Il primo ha come albero di derivazione

$$\begin{array}{c} \text{(i)} \frac{C \vdash C}{A \rightarrow B, A, C \vdash B, C} \quad \text{(i)} \frac{B \vdash B}{A, C, D, B \vdash B} \quad \text{(i)} \frac{A \vdash A}{A, C, D \vdash A, B} \\ \text{(t)} \frac{A \rightarrow B, A, C \vdash B, C \quad A \rightarrow B, A, C, D \vdash B}{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A, C \vdash B} \\ \text{(t)} \frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A, C \vdash B}{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash B} \end{array}$$

dove (i) e (t) denotano, rispettivamente, la regola di indebolimento e di taglio. Il secondo sequente ha come albero di derivazione

$$\begin{array}{c} \text{(i)} \frac{D \vdash D}{A, C, B, D \vdash D} \quad \text{(i)} \frac{C \vdash C}{C \rightarrow D, A, C, B \vdash D} \quad \text{(i)} \frac{D \vdash D}{A, C, D \vdash D, B} \quad \text{(i)} \frac{A \vdash A}{A, C \vdash D, B, A} \\ \text{(t)} \frac{A \rightarrow B, A, C, D \vdash B \quad C \rightarrow D, A, C \vdash D, B}{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A, C \vdash D} \\ \text{(t)} \frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A, C \vdash D}{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \wedge C \vdash D} \end{array}$$

2. Formalizzare la seguente frase

Ogni numero maggiore di uno è divisibile per qualche numero primo

usando i simboli $<$, 1 e $|$ per il predicato di divisibilità.

Soluzione: $\forall x(x > 1 \rightarrow \exists y(\text{"y è primo"} \wedge y|x))$ e "y è primo" è formalizzata così: $y > 1 \wedge \forall z(z|y \rightarrow z = y \vee z = 1)$. Quindi la frase è formalizzata così:

$$\forall x(x > 1 \rightarrow \exists y(y > 1 \wedge \forall z(z|y \rightarrow z = y \vee z = 1) \wedge y|x))$$

3. Mettere in forma normale congiuntiva (CNF) e disgiuntiva (DNF) la seguente formula

$$(Q \leftrightarrow (P \vee R)) \leftrightarrow R$$

Soluzione: Poiché la tavola di verità è

P	Q	R	$(Q \leftrightarrow (P \vee R)) \leftrightarrow R$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

la FND è

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \\ \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

e la FNC è

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R).$$

4. Dimostrare che il seguente insieme di formule è insoddisfacibile:

$$\{A \vee \neg D, \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B \vee \neg C, D, C \vee \neg D\}$$

Soluzione: Per assurdo, sia V una valutazione che soddisfa l'insieme di formule cioè

$$V(A \vee \neg D) = 1 \tag{1}$$

$$V(\neg B \vee \neg C) = 1 \tag{2}$$

$$V(\neg A \vee B \vee \neg C) = 1 \tag{3}$$

$$V(D) = 1 \tag{4}$$

$$V(C \vee \neg D) = 1 \tag{5}$$

Da (4) e (1) otteniamo $V(A) = 1$ e da (4) e (5) otteniamo $V(C) = 1$. Quindi $V(B) = 1$ dalla (3). Ma allora $V(\neg B \vee \neg C) = 0$, contro la (2).

5. Verificare se

$$(Q \rightarrow (P \vee R)) \wedge ((\neg Q \vee P) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P) \models Q$$

Soluzione: Vediamo se c'è una valutazione (o interpretazione) V tale che $V(Q) = 0$ e $V((Q \rightarrow (P \vee R)) \wedge ((\neg Q \vee P) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)) = 1$. Quest'ultima condizione si traduce nelle tre equazioni

$$V(Q \rightarrow (P \vee R)) = 1$$

$$V((\neg Q \vee P) \rightarrow R) = 1$$

$$V(R \rightarrow P) = 1.$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, dato che $V(Q) = 0$. Poiché $V(\neg Q \vee P) = 1$, la seconda implica che $V(R) = 1$. Di conseguenza la terza implica che $V(P) = 1$. Quindi: la valutazione V tale che $V(P) = 1$, $V(Q) = 0$ e $V(R) = 1$ testimonia che

$$(Q \rightarrow (P \vee R)) \wedge ((\neg Q \vee P) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P) \not\models Q.$$

6. Sia L il linguaggio che ha 3 simboli di predicato 1-ari: P, Q, R . Consideriamo la L -struttura $\mathcal{M} = (D, I)$ con $D = \{a, b, c, d\}$, $I(P) = \{a, b\}$, $I(Q) = \{a, b, c\}$ e $I(R) = \{c, d\}$. Dimostrare che \mathcal{M} testimonia

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x (Q(x) \rightarrow R(x)) \not\models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

Soluzione: Dobbiamo verificare che

$$\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (6)$$

$$\mathcal{M} \models \exists x (Q(x) \rightarrow R(x)) \quad (7)$$

$$\mathcal{M} \not\models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \quad (8)$$

(6) discende dal fatto che $I(P) = \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} = I(Q)$, mentre per (7) basta prendere ξ tale che $\xi(x) = c$ oppure $\xi(x) = d$. La (8) segue da $I(P) = \{a, b\} \not\subseteq \{c, d\} = I(R)$.

7. Mettere in forma prenessa il seguente enunciato

$$\forall x \exists y (\exists z \exists w (R(w, x) \wedge R(z, w)) \rightarrow \forall z R(z, y))$$

dove R è un predicato binario.

Soluzione: $\forall x \exists y \forall z \forall w \forall u (R(w, x) \wedge R(z, w) \rightarrow R(u, y))$.

8. Sia \oplus il connettivo binario definito dalla tavola di verità

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dimostrare che $\{\oplus, \rightarrow\}$ è un sistema adeguato di connettivi.

Soluzione: Sappiamo che $\{\neg, \vee\}$ è un sistema adeguato di connettivi. Poiché $p \vee q$ è semanticamente equivalente a $\neg p \rightarrow q$ (cioè: $p \vee q$ e $\neg p \rightarrow q$ hanno la stessa tavola di verità), ne consegue che $\{\neg, \rightarrow\}$ è un sistema adeguato di connettivi. Quindi è sufficiente verificare che $\neg p$ è esprimibile mediante \oplus e \rightarrow . Ma ciò segue immediatamente dal fatto che $\neg p$ è semanticamente equivalente a $p \rightarrow (p \oplus p)$.

9. Formalizzare la seguente frase:

Se esistono infiniti numeri che godono della proprietà P allora tra un numero e il suo doppio c'è un numero che gode della proprietà Q

usando i predicati 1-ari P e Q e i simboli $+$, $<$ e $=$.

Soluzione: Dire che "ci sono infiniti numeri naturali tali che ..." è equivalente a dire che "per ogni numero c'è un numero ancora più grande tale che ...". Quindi la formula si formalizza così:

$$\forall x \exists y (x < y \wedge P(y)) \rightarrow \forall x \exists y (x < y \wedge y < x + x \wedge Q(y))$$

10. Consideriamo il linguaggio L che ha un simbolo di predicato binario R . Considerare la formula φ

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))).$$

In quali delle seguenti strutture φ è vera?

- $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine $<$.
- $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine \leq .
- $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine $<$.

Soluzione: $(\mathbb{N}, <) \models \varphi$ se e solo se per ogni assegnazione ξ , se $\xi(x) = n < m = \xi(y)$ allora c'è un $k \in \mathbb{N}$ tale che $n < k$ e $k < m$. Ciò è evidentemente falso perché se n e m sono interi consecutivi non c'è nessun numero naturale strettamente compreso tra di loro. Quindi nel primo caso la risposta è negativa.

Nel secondo caso la relazione R è interpretata come \leq . Sia ξ un'assegnazione e siano $n = \xi(x)$ e $m = \xi(y)$. Se $n > m$, allora $\mathcal{A}, \xi \not\models R(x, y)$, quindi, banalmente, $\mathcal{A}, \xi \models R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))$. Se invece $n \leq m$, allora $\mathcal{A}, \xi \models R(x, y)$ e basta modificare la ξ in $\xi[n/z]$ così che $\mathcal{A}, \xi[n/z] \models R(x, z) \wedge R(z, y)$. Quindi $\mathcal{A}, \xi \models \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))$ e allora $\mathcal{A}, \xi \models \varphi$. Essendo ξ arbitrario, abbiamo che $\mathcal{A} \models \varphi$.

Supponiamo infine che $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine $<$. Sia ξ un'assegnazione. Ragionando come sopra, se $\xi(x) \geq \xi(y)$, allora banalmente $\mathcal{A}, \xi \models \varphi$, quindi possiamo supporre che $\xi(x) < \xi(y)$. Allora se ξ' è ottenuta modificando ξ in modo che $\xi'(z) = \frac{1}{2}(\xi(x) + \xi(y))$, allora $\mathcal{A}, \xi' \models R(x, z) \wedge R(z, y)$ e quindi $\mathcal{A}, \xi \models \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))$ da cui $\mathcal{A}, \xi \models \varphi$. Essendo ξ arbitrario, abbiamo che $\mathcal{A} \models \varphi$.