

Esercizi di preparazione di logica matematica

La parte di logica dell'esame scritto conterrà al più tre o quattro problemi, simili a quelli che trovate in questa lista. Dovreste essere in grado di risolvere un esercizio di logica proposizionale (Capitoli 1–3 del libro di testo) in circa 20 minuti e di risolvere un esercizio relativo alla logica dei predicati (Capitolo 4) in circa 30 minuti.

1. Dimostrare che $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)))$ è un sequente derivabile.

2. Formalizzare la seguente frase

Ogni numero maggiore di uno è divisibile per qualche numero primo

usando i simboli $<$, 1 e $|$ per il predicato di divisibilità.

3. Mettere in forma normale congiuntiva (CNF) e disgiuntiva (DNF) la seguente formula

$$(Q \leftrightarrow (P \vee R)) \leftrightarrow R$$

4. Dimostrare che il seguente insieme di formule è insoddisfacibile:

$$\{A \vee \neg D, \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B \vee \neg C, D, C \vee \neg D\}$$

5. Verificare se

$$(Q \rightarrow (P \vee R)) \wedge ((\neg Q \vee P) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P) \models Q$$

6. Sia L il linguaggio che ha 3 simboli di predicato 1-ari: P, Q, R . Consideriamo la L -struttura $\mathcal{M} = (D, I)$ con $D = \{a, b, c, d\}$, $I(P) = \{a, b\}$, $I(Q) = \{a, b, c\}$ e $I(R) = \{c, d\}$. Dimostrare che \mathcal{M} testimonia

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x (Q(x) \rightarrow R(x)) \not\models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

7. Mettere in forma prenessa il seguente enunciato

$$\forall x \exists y (\exists z \exists w (R(w, x) \wedge R(z, w)) \rightarrow \forall z R(z, y))$$

dove R è un predicato binario.

8. Sia \oplus il connettivo binario definito dalla tavola di verità

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	0	0

Dimostrare che $\{\oplus, \rightarrow\}$ è un sistema adeguato di connettivi.

9. Formalizzare la seguente frase:

Se esistono infiniti numeri che godono della proprietà P allora tra un numero e il suo doppio c'è un numero che gode della proprietà Q

usando i predicati 1-ari P e Q e i simboli $+$, $<$ e $=$.

10. Consideriamo il linguaggio L che ha un simbolo di predicato binario R . Considerare la formula φ

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)))$$

In quali delle seguenti strutture φ è vera?

- $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine $<$.
- $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine \leq .
- $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, I)$ con $I(R)$ la relazione d'ordine $<$.